

CONSTRUCCIONES Y MECANISMOS MENTALES PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL QUE MODELA UN CIRCUITO ELÉCTRICO

Abel Medina Mendoza¹, Alejandro Miguel Rosas Mendoza²
Instituto Tecnológico de Comitán¹, Instituto Politécnico Nacional-CICATA Legaria²
amedina105@hotmail.com¹, alerosas2000@gmail.com²

Resumen

Este reporte de investigación se encuadra en un proyecto de investigación doctoral en Matemática Educativa en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA) del Instituto Politécnico Nacional, donde se tiene como objetivo investigar sobre las construcciones y mecanismos mentales necesarios para diseñar una descomposición genética (DG) preliminar para construir la solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden que modela un circuito eléctrico RL, planteado en el primer componente (Análisis Teórico) del diseño metodológico del proyecto de investigación; fundamentándose del marco teórico y la metodología de la teoría APOE (acción, proceso, objeto y esquema). El análisis de los resultados permitió definir los conocimientos necesarios para la construcción del objeto matemático.

Palabras Clave: APOE, Ecuación Diferencial, Construcciones y Mecanismos Mentales.

Antecedentes

La asignatura de Ecuaciones Diferenciales dentro del plan de estudios de la Ingeniería en Sistemas Computacionales consolida la formación matemática como ingeniero y potencia su capacidad en el campo de las

aplicaciones, aportando al perfil del Ingeniero una visión clara sobre el dinamismo de la naturaleza (Tecnológico Nacional de México, 2017). Una de las características sobresalientes de ésta asignatura es que en ella se aplican todos los conocimientos previos de las matemáticas.

El primer tema fundamental de dicha asignatura es el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden y sus aplicaciones. Por ello la Descomposición Genética preliminar que se presenta muestra los elementos que nos permitirán construir la solución de una EDO de primer orden que modela un circuito eléctrico RL.

Desde la práctica docente se ha observado que en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales los conceptos permanecen ocultos por fórmulas y procesos algorítmicos que dificultan la comprensión y aplicación de los mismos.

Haciendo un análisis de investigaciones que muestran dificultades en la comprensión o aplicación del concepto de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), se establece la problemática mediante la determinación de la pregunta de investigación ¿Qué construcciones y mecanismos mentales son necesarios para el aprendizaje de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden que modela un circuito eléctrico RL, en los estudiantes del IV semestre de Ingeniería en Sistemas Computacionales del Instituto Tecnológico de Comitán?. Para responder ésta pregunta, se condujo ésta investigación a las experiencias de los investigadores como estudiantes y profesores, análisis de libros de texto relacionados al tema de

ecuaciones diferenciales, llevándonos al diseño de una descomposición genética preliminar del concepto matemático de estudio con las construcciones y mecanismos mentales utilizados.

Marco Teórico

Los elementos teóricos a considerar se enmarcan en la Teoría APOE cuya sigla significa Acción, Proceso, Objeto y Esquema. Esta teoría fue desarrollada por Ed Dubinsky (1996) a partir de lo que Piaget llamaba “Abstracción Reflexiva”. Dicha “Abstracción reflexiva” es un mecanismo, introducido por Piaget para describir el desarrollo del pensamiento lógico en niños, y Dubinsky extiende esta idea al mecanismo de construcción de los conceptos matemáticos más avanzados (Campero, 2010).

Según esta teoría todos los conceptos matemáticos pueden representarse en términos de acciones, procesos, objetos y esquemas los cuales se denominan construcciones o estructuras mentales, éstas no se dan necesariamente, en forma lineal. La forma como se pasa de un estado de construcción de conocimiento a otro se denomina mecanismo mental (García-Martínez y Parraguez-González, 2015a).

Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas (1996) determinan con base a las observaciones de los estudiantes, que para que alguien se apropie de un conocimiento es necesario seguir una secuencia de las construcciones mentales de la Teoría APOE, ya que consideran que la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones;

acciones que son interiorizadas para formar procesos los cuales son entonces encapsulados para formar objetos. Objetos que pueden ser desencapsulados para regresar a los procesos los cuales fueron formados. Finalmente, acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas, los cuales se describen a continuación:

Acciones

Son una manipulación física o mental sobre objetos. La persona las percibe como algo externo, y cada uno de sus pasos es estimulado por el anterior.

Procesos

Se pueden describir como una serie de acciones sobre un objeto, con la particularidad de que el individuo los controla de manera consciente, es decir, puede describirlas paso a paso, invertirlas, coordinar y componer una transformación con otras para obtener una nueva.

Objetos

Cuando una persona reflexiona sobre las operaciones aplicadas en un proceso particular, llega a tomar conciencia de este como una totalidad, sobre el que puede efectuar y construir acciones o transformaciones; entonces, se dice que ese proceso ha sido transformado en un objeto.

Esquemas

Es una colección de acciones, procesos, objetos y aun otros esquemas (hay una relación dialéctica en espiral, pues los objetos pueden ser

transformados por nuevas acciones, lo cual lleva a nuevos procesos, objetos y esquemas).

Las construcciones son las Acciones, los Procesos, los Objetos y los Esquemas, mientras que los mecanismos para hacer esas construcciones son Representar, Coordinar, Encapsular, Generalizar e Invertir (Dubinsky, 1991; tomado de Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktac, Roa Fuentes, Trigueros y Weller 2014).

Representar

Es la capacidad de utilizar símbolos, lenguajes, imágenes mentales, para construir procesos internos como formas de encontrar significados de los fenómenos percibidos. Piaget denominó a esta capacidad como interiorización y se refirió como “la traducción de una serie de acciones materiales en un sistema de operaciones” (Piaget, 1980, p. 90). “La interiorización permite al sujeto ser consciente de una acción, reflexionar sobre esta y combinarla con otras acciones” (Dubinsky, 1991, p. 107).

Coordinar

“Es la composición de dos o más procesos para la construcción de una nueva acción, proceso u objeto” (Tall, 1991, p. 101).

Encapsular

Es la conversión de un proceso (dinámico) en un objeto (estático). “La encapsulación ocurre cuando el individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso particular, toma conciencia de éste como un todo y

es capaz de realizar y crear transformaciones, sobre éstas acciones o procesos” (Tall, 1991, p. 101).

Generalizar

Tall (1991) mencionó lo siguiente:

Es la capacidad de aplicar un esquema existente particular a un conjunto más amplio de fenómenos y se considera como la forma más simple y más familiar de abstracción reflexiva. La generalización puede ocurrir cuando el sujeto se da cuenta de la aplicabilidad más amplia del esquema o cuando un proceso se encapsula en un objeto. (p. 101)

Invertir

“Una vez que un proceso existe internamente es posible para el sujeto invertirlo, no en el sentido de deshacer, sino como un medio de construir un nuevo proceso” (Tall, 1991, p. 102).

En la Imagen 1 se muestra cómo se relacionan las construcciones y los mecanismos mentales (Asiala et al., 1996).



Imagen 1. Relación de las Construcciones y Mecanismos Mentales

En resumen, con los conceptos de acción, proceso, objeto, esquema y los mecanismos de construcción, se describe lo que se denomina la descomposición genética de un concepto.

La descomposición genética, según Badillo (2003), es el eje de la aplicación de la Teoría APOE en estudios sobre la comprensión de objetos matemáticos porque permite estructurar el concepto matemático, orienta a la organización del contenido a enseñar y el diseño de actividades y tareas que contribuyan a la construcción de las estructuras que se busca que los estudiantes desarrollen.

Suárez-Aguilar (2015) conjetura que la construcción de la mayoría de los conceptos matemáticos se pueden describir en términos de las cinco formas de abstracción reflexiva: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y la inversión, como lo afirmó Piaget (1972):

Las matemáticas por lo tanto, pueden considerarse en términos de la construcción de estructuras, entidades matemáticas que pasan de un nivel a otro, una operación de tales entidades se convierte a su vez en objeto de la teoría, y este proceso se repite hasta llegar a estructuras que se van alternando para convertirse en estructuras más fuertes. (p. 70)

Metodología

La Teoría APOE tiene su propia metodología de investigación, la cual está integrada por tres componentes que de manera secuenciada son las siguientes: Análisis teórico o Descomposición Genética, Diseño y aplicación de instrumentos y Análisis y verificación de datos.

En el libro APOS Theory (Arnon et al., 2014) se explica qué es una descomposición genética de la siguiente forma: “Una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar construir para aprender un concepto matemático específico.” (p. 27).

García-Martínez y Parraguez-González (2015b) mencionan que el objetivo principal de la descomposición genética es proponer a priori un modelo para el aprendizaje de un determinado concepto matemático. Asiala et al. (1996) plantean dos preguntas que deben guiar el trabajo en esta componente: ¿Qué significa comprender un concepto matemático? Y ¿cómo esa comprensión puede ser alcanzada por un individuo? Estas preguntas promueven la reflexión sobre el significado de comprender un

concepto matemático determinado y las implicancias que tiene dicha reflexión en la forma en que un estudiante concibe dicho concepto.

Es importante resaltar que para un mismo concepto matemático pueden existir varias descomposiciones genéticas, las cuales pueden ser todas viables, ya que cada una puede representar un camino diferente de construcción mental de dicho concepto (García-Martínez y Parraguez-González, 2015b).

Avances

El planteamiento a seguir en la componente Análisis Teórico de la metodología de investigación son: Experiencias de los investigadores como estudiantes y profesores y Análisis de libros de texto relacionados al tema de Ecuaciones Diferenciales, Diseño de una descomposición genética preliminar del concepto matemático de estudio con las construcciones y mecanismos mentales utilizados.

Como parte de la experiencia se aplicó un cuestionario a docentes e investigadores con la finalidad de tener información sobre la enseñanza-aprendizaje de EDO de primer orden.

Sobre los conocimientos previos para abordar el tema de EDO de Primer Orden, mencionaron lo siguiente:

- ✓ “Álgebra, Cálculo Diferencial e Integral, Planteamiento y Resolución de Problemas de Álgebra y Cálculo”... *(Dr. Julio Antonio Moreno Gordillo del Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez)*

- ✓ “Álgebra, Cálculo Diferencial e Integral y Gráfica de funciones”... *(Ramón Soto Anchondo del Instituto Tecnológico Superior de Nuevo León)*
- ✓ “Cálculo Diferencial e Integral de una y varias variables, particularmente: concepto de función, concepto de límite, concepto de derivada, concepto de diferencial e integral”... *(Dra. Ma. De Lourdes Guerrero Magaña de la Universidad de Guadalajara)*

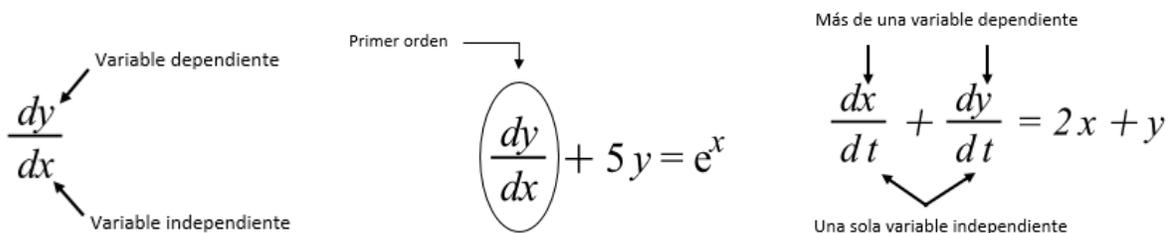
Sobre la manera de como logran que el estudiante comprenda el tema de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden, mencionaron lo siguiente:

- ✓ “Para la actividad de aprendizaje deben considerarse cuatro aspectos: el físico, el simbólico, el numérico y el gráfico”... *(Ing. Ildberto de los Santos Ruíz del Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez)*
- ✓ “Que el alumno reconozca la Ecuación Diferencial en su parte analítica (Ecuación y solución), así como la aplicación de la Ecuación Diferencial a problemas de la vida real”... *(Dra. Ruth Rodríguez Gallegos del Tecnológico de Monterrey)*
- ✓ “Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales, conocer y desarrollar los procedimientos para la solución de una ED y su interpretación en un modelo físico”... *(Ing. Marco Antonio López Pinto del Instituto Tecnológico de Comitán)*
- ✓ “Hacer énfasis en la observación de la estructura de la ED”... *(Dra. Ma. De Lourdes Guerrero Magaña de la Universidad de Guadalajara)*

- ✓ “Es necesario darle al alumno muchos ejemplos para su comprensión del concepto de ED”... (Lic. Edwin Garivaldy López Álvarez del Instituto Tecnológico de Zitácuaro)

✓
Con base a lo anterior, se mencionan los conocimientos previos necesarios y la importancia de reconocer y estructurar una definición analítica del concepto de EDO de primer orden como parte fundamental para su comprensión, por tal motivo se realiza una revisión en siete libros en temática de ecuaciones diferenciales, donde se logró definir el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria de primer orden:

Es la expresión matemática que contiene las derivadas o diferenciales, de orden uno, de una o más funciones desconocidas (variables dependientes) con respecto a una variable independiente.



La revisión de investigaciones en Matemática Educativa, aunado al análisis reflexivo de lo considerado en la componente Análisis Teórico del ciclo metodológico de la Teoría APOE, ha permitido desarrollar una descomposición genética preliminar del concepto matemático en estudio con las construcciones y mecanismos mentales utilizados.

En la imagen 2 se muestra la primera parte de la DG preliminar que consiste en realizar acciones para reconocer a la Ecuación Diferencial, su clasificación de acuerdo a su tipo, orden, linealidad y definición de su solución, aspectos que son interiorizados para llegar al proceso de una EDO lineal de primer orden tanto de su forma general, como de su forma estándar. Sin olvidarnos de los conocimientos previos sugeridos por docentes e investigadores como: concepto de función, límite e interpretación geométrica y física de la derivada.

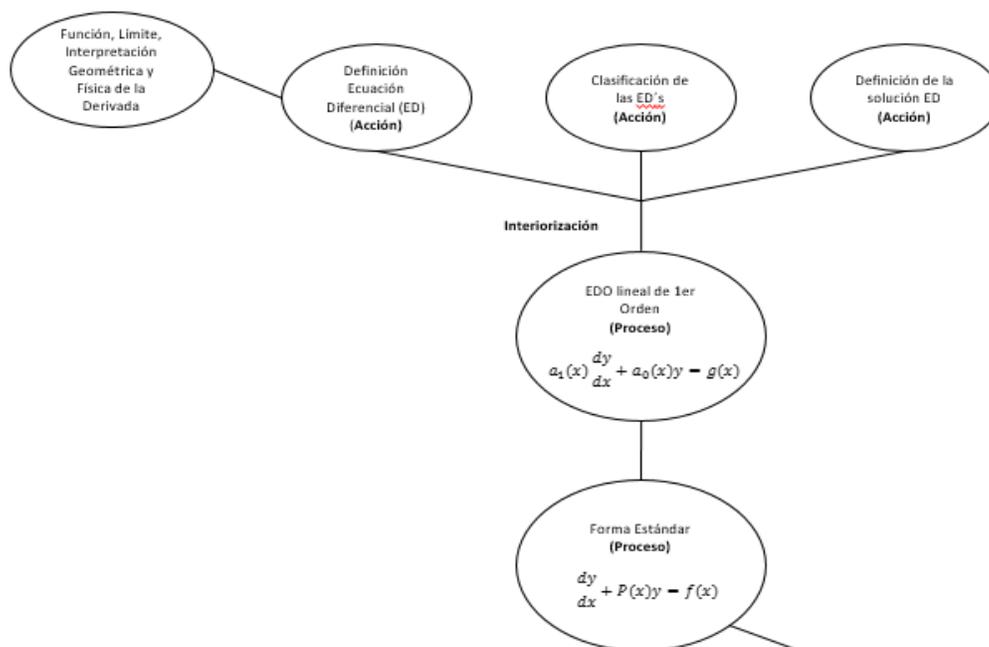


Imagen 2. Primera parte de la Descomposición Genética preliminar

En la Imagen 3 se muestra la segunda parte de la DG preliminar que consiste en contar con los temas necesarios para modelar matemáticamente un proceso dinámico, en nuestro caso un circuito eléctrico RL, para ellos leyes físicas y eléctricas como la Ley de Faraday,

Ley de Ohm y Ley de Kirchhoff, específicamente la segunda ley de kirchhoff, que son interiorizados para llegar al proceso del modelo matemático del circuito eléctrico RL con el uso de Ecuaciones Diferenciales, representándolo en su forma estandar.

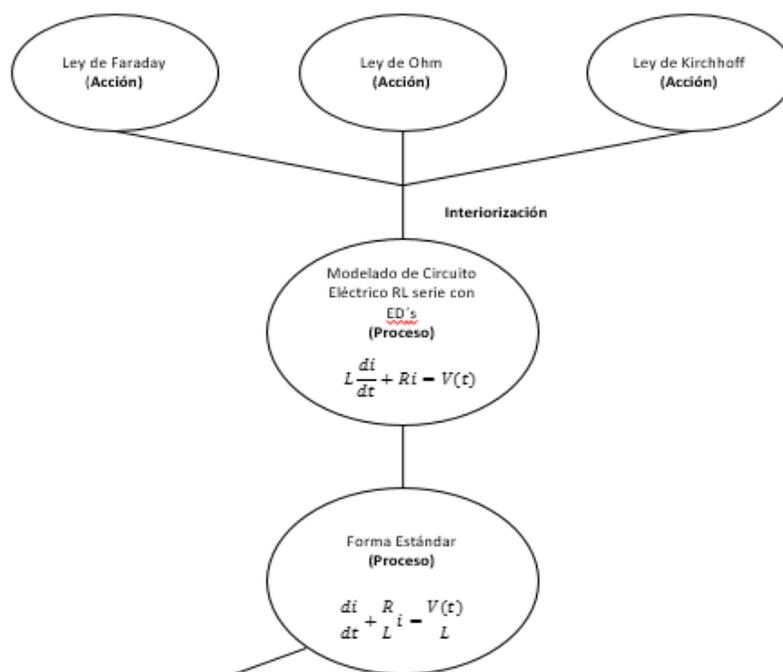


Imagen 3. Segunda parte de la Descomposición Genética preliminar

En la Imagen 4 se muestra la tercera parte de la DG preliminar que mediante el mecanismo mental de la coordinación, podemos observar que la representación de una EDO de primer orden en su forma estándar es similar al modelo matemático del circuito eléctrico RL también representado en su forma estándar, haciendo la comparación de variables dependientes e independientes para su interiorización y mediante un método apropiado

hallar la solución de la EDO de primer orden que modela un circuito eléctrico RL.

Un método apropiado de acuerdo a la forma estándar del modelo matemático obtenido del circuito eléctrico RL es el del factor integrante, donde la coordinación con otro proceso como lo es el de la Regla del Producto de la derivación nos permitirá encapsular su método de solución y finalmente llegar a la construcción del objeto matemático.

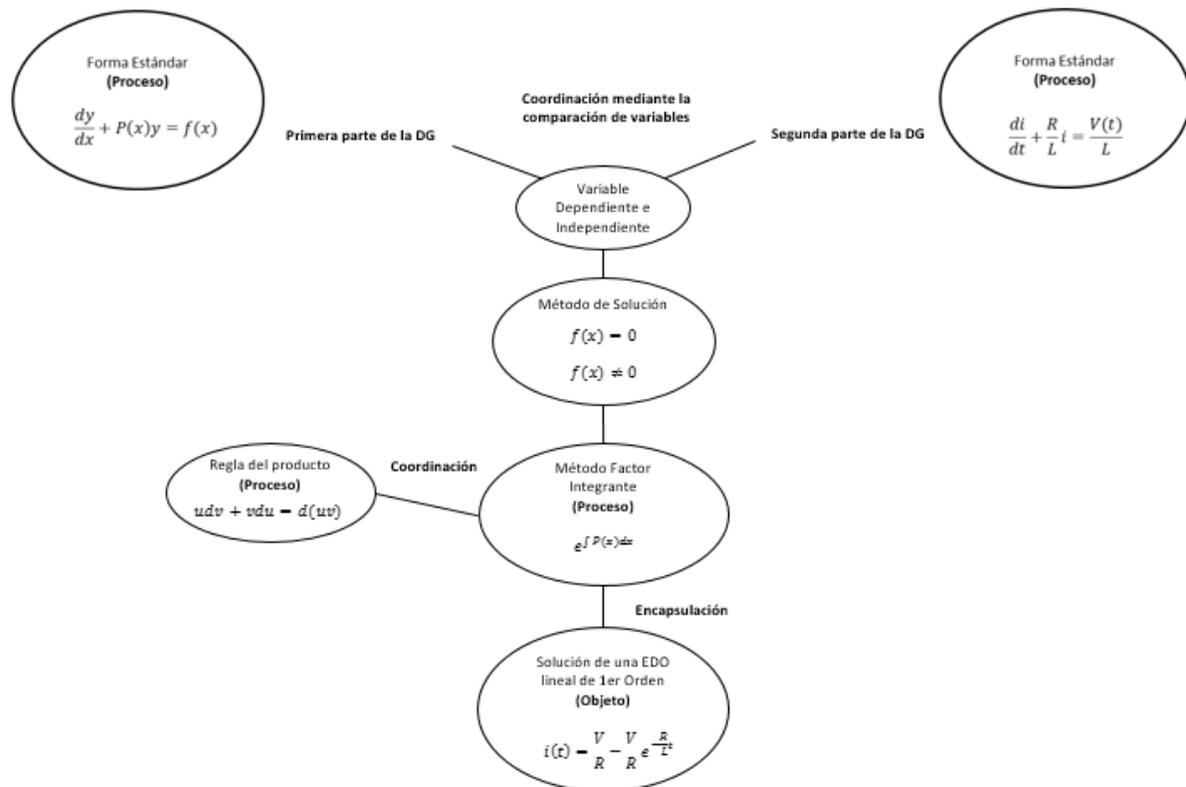


Imagen 4. Tercera parte de la Descomposición Genética preliminar

El objeto matemático es en nuestro caso la solución de una EDO de primer orden que modela un circuito eléctrico, nos ayudará a predecir su

comportamiento y analizar el fenómeno en condiciones distintas de un proceso dinámico.

Comentarios Finales

La revisión de investigaciones en Matemática Educativa, aunado al análisis reflexivo de lo considerado en la primera componente del ciclo metodológico de la Teoría APOE (Análisis Teórico) para el desarrollo de la descomposición genética del concepto matemático, ha permitido llegar a las siguientes consideraciones:

- ✓ Permitted definir los conocimientos necesarios para la construcción del objeto matemático como: Variables Dependientes e Independientes, Función, Límite, Interpretación Geométrica y Física de la Derivada, Regla del Producto, Integral, Definición y Clasificación de la Ecuación Diferencial, Método de solución (Factor Integrante), Ley de Faraday, Ley de Ohm y Ley de Kirchhoff.
- ✓ Con el diseño de la DG preliminar, ha orientado a la organización del contenido a enseñar.
- ✓ Mediante la desencapsulación del objeto de estudio, ha permitido definir los procesos y acciones que lo generaron.

Con las consideraciones anteriores se presenta una Descomposición Genética preliminar con las construcciones y mecanismos mentales necesarios para la construcción del concepto matemático y se está planeando el desarrollo de actividades e instrumentos que permitan la obtención y análisis de datos para finalmente valorar si la descomposición genética preliminar es viable.

Referencias Bibliográficas

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory, A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer Science.
- Asiala, M., A. Brown, DeVries D., Dubinsky, E., Mathews D., & Thomas K. (1996). A Framework for Research and Currículum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2(3), 1-32.
- Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia* (Tesis Doctoral no publicada). Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.
- Campero, J. (2010). *Propuesta didáctica en optimización dinámica: El caso del cálculo de variaciones y la teoría de control* (Tesis de doctorado no publicada). CICATA-IPN, México.
- Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación matemática*, 8(3), 25-41.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (vol. 11, pp. 95–126). New York: Springer
- García-Martínez, I., & Parraguez-González, M. (2015a). Refinamiento de una descomposición genética para el concepto de inducción

matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 28, 765-773). México D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

García-Martínez, I., & Parraguez-González, M. (2015b). Validación de una descomposición genética del concepto de inducción matemática. *Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX*. 277-283.

Piaget, J. (1980). *Psicología y pedagogía*. Buenos Aires: Ariel.

Piaget, J. (1972). *The principles of Genetic Epistemology*. (W. Mays, Trad.). London: Neubauer, P. B. (original published 1970).

Suárez-Aguilar, Z. (2015). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto diferencial de una función en varias variables. *Revista de Investigación Desarrollo e Innovación*, 6(1), 45-60.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking, D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking*, 3-21.

Tecnológico Nacional de México. (2017, enero 20). Recuperado de <http://www.tecnm.mx/docencia/planes-de-estudio-2009-2010>