LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN ESTUDIANTES DE LOS PRIMEROS CURSOS DE INGENIERÍA

Miryan Trujillo Cedeño
mtrujillo@unisalle.edu.co
Universidad de La Salle de Bogotá, Colombia.

Resumen

El escrito relaciona resultados parciales de una investigación realizada en la Universidad de La Salle de Bogotá Colombia, con estudiantes de ingeniería, relativos a la comprensión del concepto de función en Cálculo I. El estudio incorporó como base conceptual la problemática Tall y Vinner y como metodología el indicador del nivel básico de comprensión de un concepto matemático tomado de Álvarez y Delgado (2002) y adaptado al concepto de función con tratamiento local consistente en una guía con situaciones de aprendizaje enmarcadas en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau. Los resultados muestran que siendo el concepto de función un eje fundamental en los primeros cursos de matemáticas en ingeniería, los estudiantes manifiestan dificultades marcadas en su comprensión y se resalta la importancia de considerar estrategias didácticas para afrontar las dificultades y procurar la permanencia de los estudiantes y la minoración de los índices de deserción.

Palabras Clave: Función, Comprensión, Cálculo, Ingeniería.

Problema

El estudio se focalizó en las relaciones entre la formación matemática de los estudiantes que ingresan a la Universidad de La Salle de Bogotá Colombia y las demandas sobre la comprensión del concepto de función como uno de los conceptos fundamentales que definen la estructura del curso Cálculo I (Cálculo Diferencial de una variable) para estudiantes de los programas de la Facultad de ingenierías en dicha Universidad.

Estudios sobre la comprensión del concepto de función, realizados a nivel nacional e internacional, (Sierpinska, 1992; Alvarez y Delgado 2002), revelan múltiples problemas en el aprendizaje de un concepto considerado básico e importante dentro del cálculo diferencial en una variable.

Las investigaciones citadas tuvieron interés para el trabajo porque muestran que los errores y las incomprensiones de los estudiantes son resistentes y difíciles de superar debido a las rupturas que se presentan entre las prácticas actuales de enseñanza y las formas como el estudiante accede al conocimiento matemático.

El objetivo del estudio fue indagar en torno a los niveles de comprensión del concepto de función que tenían los estudiantes al ingresar a un curso de Cálculo I, contrastado con los niveles de comprensión después de desarrollada las temáticas en torno al concepto de función, a través del desarrollo de una guía pautada, en el mismo curso.

Marco Conceptual

Noción de concepto imagen

Esta noción fue fundamental en la investigación para la determinación de los niveles de comprensión de función en los estudiantes.

Tall y Vinner (1981) introducen la noción de concepto imagen y señalan diferencias entre definición formal y definición personal de un concepto matemático, manifestada la problemática en torno a estos dos conceptos:

Definición personal (DP): Es el concepto matemático tal como es apropiado por las personas.

Imagen Conceptual (IC): Determina la forma en que entendemos el concepto.

Imagen Conceptual Evocada (ICE): Es una subestructura de la IC activada por la demanda cognitiva de la situación. Las ICE se infieren de los observables de las acciones del estudiante.

Definición Formal o Institucional (DI): Es el concepto matemático tal como se expresa y concreta socialmente en la academia.

Tall-Vinner identificaron los siguientes problemas:

A. El concepto imagen visto como un todo puede presentar incoherencia al activarse o ponerse en juego en diferentes situaciones; este hecho se evidencia cuando un estudiante de primer semestre en Cálculo Diferencial, tiene éxito al identificar una función en una expresión analítica homogénea (Ejemplo: $f(x) = x^2 - 5x$), pero no lo logra en el caso de una función definida a trozos (Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & si\ x \geq 0 \\ x - 5 & si\ x < 0 \end{cases}$$

B. Entre el concepto imagen o concepto personal que construye el sujeto y el concepto matemático institucional se pueden presentar desadaptaciones matemáticas relativas a la forma en que el sujeto apropia el significado socialmente compartido, del concepto matemático. Por ejemplo, no ver como asíntota de una función, una recta que corta en algún punto a la gráfica de dicha función, pero que institucional o formalmente sí lo es. En este caso, la definición personal de asíntota, es una versión restringida de la definición formal o institucional.

C. Es frecuente que los estudiantes no dispongan de la definición personal de un concepto matemático que han estudiado; pero aún en el caso de tenerla, y aún si la definición que verbaliza concuerda con la definición institucional, ella puede estar desarticulada del correspondiente concepto imagen sin que tenga efectos en la acción del sujeto; es el caso en el cual a un estudiante que se le pide hallar la ecuación de una recta tangente a una curva dada en un punto dado, no lo hace, a pesar de saber derivar la función y de conocer la interpretación geométrica de la derivada en un punto.

Con el fin de hacerlo operativo y entender cómo evoluciona y se transforma el "concept image", Álvarez y Delgado (2002), hacen una redefinición del término *imagen conceptual* introducido por Tall y Vinner y precisan los siguientes conceptos así:

Una **definición personal** relativa a un concepto matemático, es **estable** cuando la persona verbaliza una definición sobre el concepto en forma consistente y equivalente en diferentes situaciones.

Una definición personal **estable** se llama **bien adaptada matemáticamente** si es equivalente a la definición institucionalizada del concepto.

La **coherencia** de la definición se refiere al grado de articulación que tiene dicha definición personal con la acción. Se dice **global** cuando está referida a distintos contextos. Será **local** cuando está referida a un solo contexto o situación.

La Propuesta de la Teoría de Situaciones

Los elementos abordados desde esta teoría fueron fundamentales en la construcción y desarrollo de la guía pautada con la que se abordó el concepto de función en el curso de Cálculo I.

Brusseau (1986) plantea la articulación entre situaciones adidácticas (a cargo del estudiante) y didácticas (a cargo del profesor). Las situaciones adidácticas pretenden generar perturbaciones a la acción que se transformen en conflictos cognitivos para el estudiante y se clasifican en tres tipos: de acción, formulación y validación.

Situación adidáctica de acción: El profesor organiza el medio en el que vive el conocimiento , pero luego se retira para permitir el libre discurrir de la acción del estudiante.

Situación adidáctica de formulación: Se construye de manera que el estudiante se obligue a explicitar el conocimiento en la aplicación a la situación concreta o para que otro pueda actuar usando su formulación.

Situación adidáctica de validación: Refleja el nivel de desarrollo de *la toma de conciencia* del sujeto respecto a la naturaleza de sus acciones y del conocimiento. La conceptualización, se mejora en la interacción con otros que refutan o validan los argumentos del sujeto.

Las situaciones didácticas por su parte, buscan lograr los ajustes de las acciones del estudiante con las acciones del profesor para alcanzar tanto el conocimiento (significado) a enseñar en un momento dado como el sentido particular que este conocimiento va a tomar, debido a las restricciones y deformaciones aportadas por la situación. Estas intervenciones son principalmente de dos tipos: devoluciones e institucionalizaciones.

Situación didáctica de devolución: Es la acción que realiza el profesor para que el alumno se responsabilice de la tarea, cuestionando algunos resultados mal establecidos o imprecisos.

Situación didáctica de Institucionalización: Se contextualizan los logros del estudiante destacándose aquellos que tienen pertinencia en términos del conocimiento. El profesor desempeña el papel de representante del saber encomendado a la institución escolar

El profesor utiliza situaciones adidácticas con una intención didáctica que se impone porque los conocimientos matemáticos no pueden vivir por sí mismos en la institución escolar

Metodología

Con el fin de identificar el nivel Básico de comprensión de función, se aplicó una prueba[1] escrita que constaba de 15 preguntas. Esta prueba se aplicó al iniciar el curso de Cálculo I y después del estudio de las funciones, con el fin de identificar el nivel de comprensión en dos momentos.

Los niveles de comprensión de función se determinaron teniendo en cuenta el indicador del nivel básico de comprensión de función (ICBF), planteado por Álvarez y Delgado (2002) y adaptado al concepto de función que se trabaja en el curso de Cálculo I en los programas de ingeniería de la Universidad de La Salle (Trujillo, Guerrero, y Castro, 2007), el cual está dado por un vector de seis componentes así:

ICBF= (DP*, COGH, NEF, NEI, NECB, DSA)

En donde,

NEF= Nivel de Ëxito al identificar Funciones en los distintos contextos. Se obtuvo dividiendo el número de aciertos, entre el número de contextos (parejas, gráfico, algebraico y a trozos) y su máximo valor fue 1.

NEI = Nivel de éxito de cada estudiante al seleccionar funciones que poseen Inversa. Se dividió el número de aciertos entre el número de contextos (parejas, gráfico y algebraico), siendo la nota máxima 1.

D S A = Disponibilidad del Sistema Simbólico Abstracto. Indica en qué medida el estudiante ha construido en forma general el significado de los signos: f(a), f(x)=b y h(g(a)). Se asumió que un estudiante disponía del DSA de cada símbolo cuando realizaba con éxito dicho cálculo en por lo menos dos contextos diferentes entre parejas, gráfico o algebraico.

NECB = Nivel de éxito que tiene el estudiante para realizar los cálculos básicos en los contextos de parejas, gráfico y algebraico. Cuando son indicados en el simbolismo abstracto de funciones (f(x), d=f(x), f(g(x)) se halla del promedio de los indicadores NEC de h(g(a)), NEC de f(a) y NEC de f(x)=b. Para calcular cada NEC(Nivel de éxito en el cálculo), se calificó sobre 5 cada variable, en los tres contextos.

COHG = Coherencia Global: Se refiere al grado de integración entre la acción organizada por las ICE y la conciencia de cómo y por qué se hace, determinada por la DPE. La medida es un coeficiente entre cero y uno que se obtuvo dividiendo el número de prototipos de ICE que se habían identificado y que coincidían o eran equivalentes con el prototipo de la DPE, entre el número de respuestas.

DP* = Definición Personal Estable bien adaptada matemáticamente. Determinada por la existencia de un prototipo estable al calificar la pregunta: ¿Para usted qué es función matemática?, que coincidía con la definición Cuasi- conjuntista (C) : Sean X e Y conjuntos no vacíos arbitrarios. Una función de X en Y es una asociación o correspondencia entre elementos de X y elementos de Y tal que a cada elemento de X le corresponde un elemento y sólo uno en Y. Si este era el caso se escribía 1; si no, cero.

Se caracterizó un nivel mínimo de comprensión de función, teniendo en cuenta los siguientes criterios:

(DP*=1, COHG > o = 0,66, NEF > o = 0,6, NEI > o = 0,6, NECB > o = 3, DSA > o = 0,66

Para d el segundo nivel de comprensión, los criterios fueron:

NEF y NEI mayor o igual que 0,75, NECB mayor o igual que 3,75, COHG mayor o igual que 0,825, manteniendo invariable DP* y DSA.

Para el abordaje del concepto de función, se diseñó y aplicó una guía pautada durante cuatro semanas, relacionada con el concepto de función y basada en la teoría de situaciones de Brousseau, tendiente a cubrir las temáticas que se abordan en torno a dicho concepto en un curso de Cálculo I o Cálculo Diferencial en una variable.

Para la guía se diseñaron dos actividades. La primera actividad incluyó cuatro eventos y la segunda seis. De acuerdo a la teoría didáctica, los eventos contenían situaciones adidácticas y didácticas. Las adidácticas fueron de acción, de formulación y de validación (a cargo del estudiante) y en relación con éstas, las situaciones didácticas fueron de devolución del problema e institucionalización del conocimiento que estuvieron a cargo del profesor.

Cada una de las actividades en la guía estuvo soportada por dimensiones matemático-epistemológicas, cognitivas y didácticas, así:

Dimensión Matemático Epistemológica: Hace referencia a los conceptos matemáticos que se necesitan y la relación entre ellos para la construcción del conocimiento.

Dimensión Cognitiva: Es el conjunto de esquemas que se deben asociar para resolver una tarea. Entendiéndose por esquema, como concepto imagen según Tall –Vinner (1981).

Dimensión Didáctica: Hace referencia a las acciones encaminadas a transformar los esquemas para adquirir el conocimiento matemático.

La concepción de aprendizaje en la que se apoyan la construcción y el desarrollo de la guía estuvo basada en Brousseau (1986) para quien el aprendizaje se hace por la puesta a prueba de concepciones sucesivas, provisorias y relativamente buenas, que será necesario rechazar sucesivamente o retomar en una verdadera epistemología, nueva cada vez.

Esta propuesta desde lo didáctico llama la atención sobre el acento que debe darse al diseño y gestión de situaciones de aprendizaje que motiven a los estudiantes a comprometerse en la realización de una *actividad matemática* en la que el conocimiento nuevo sea el producto de construcciones y re-construcciones a partir de la experiencia adquirida (en diferentes contextos) y no el resultado de la recepción pasiva de un conocimiento ya perfeccionado.

En acuerdo con Delgado (2010) se trata de diseñar entornos de aprendizaje que pongan de manifiesto la necesidad de que los estudiantes pongan a prueba sus conocimientos, formulen conjeturas, desarrollen modos de validación y argumentos de refutación.

En este sentido la actividad matemática parte de la experiencia adquirida y el conocimiento matemático institucional es producto de la comprensión y no el punto de partida para alcanzarla.

Resultados

Las tablas 1. y 2., muestran los resultados de prueba aplicadas a 16 estudiantes, que permitieron determinar el nivel mínimo y el segundo nivel de comprensión, del concepto de función.

Los resultados reflejan que ningún estudiante en el momento de ingreso tenía el nivel mínimo de comprensión del concepto de Función. Al finalizar, el 31.3% de la población obtuvo el nivel mínimo de comprensión del concepto de Función, mientras que el 18,7% de la población alcanzó el segundo nivel.

Tabla1. Identificación de funciones

Est.	Identificación de Funciones							
	DP*		COHG		NEF		NEI	
	I	F	I	F	I	F	I	F
1	0	0	0,00	0,67	0,00	0,50	0,00	0,00
2	0	0	0,67	0,00	0,75	0,75	0,00	0,33
3	0	0	0,00	0,33	0,25	0,50	0,00	0,00
4	0	0	0,00	0,00	0,00	0,75	0,00	0,00
5	0	0	0,33	0,00	0,25	0,75	0,33	1,00
6	0	1	0,33	1	0,25	1	0,00	1
7	0	0	0,00	0,00	0,25	0,75	0,00	0,00
8	0	1	0,67	1	0,75	1	0,33	1
9	0	0	0,00	0,00	0,50	0,50	0,00	0,00
10	0	1	0,67	1	0,50	1	0,33	1
11	0	0	0,00	0,00	0,00	0,75	0,00	0,33
12	0	0	0,00	0,33	0,00	0,75	0,00	0,00
13	0	0	0,00	0,00	0,50	0,75	0,00	0,00
14	0	1	0,33	1	0,50	0,75	0,00	1
15	0	1	0,00	1	0,00	0,75	0,00	1
16	0	0	0,00	0,33	0,00	0,75	0,00	0,33

Estos resultados no difieren mucho de los obtenidos por Álvarez y Delgado (2002), en un estudio realizado en la Universidad del valle, con estudiantes de primer semestre de Ingenierías y Ciencias en donde encontraron que al momento del ingreso a la universidad, el 17,1% de la población, mostró tener el nivel uno de comprensión básica de función y ningún estudiante alcanzó el nivel dos. Al término del semestre, 27.3 alcanzó el nivel uno y un 9.1% el nivel dos.

Tabla 2. Indicador vectorial de comprensión de función (ICBF)

Est.	NECB		DSA		Nivel mínimo de Comprensión		Segundo nivel de Comprensión	
	I	F	I	F	I	F	I	F
1	0	0	0	0	NO	NO	NO	NO
2	0	0	0	0	NO	NO	NO	NO
3	0,57	2,27	0	0,66	NO	NO	NO	NO
4	0	0,57	0	0	NO	NO	NO	NO
5	0,57	3,9	0	0,66	NO	NO	NO	NO
6	1,13	3,37	0,33	0,66	NO	SI	NO	NO
7	0,57	1,13	0	0,33	NO	NO	NO	NO
8	0,57	3,9	0	0,66	NO	SI	NO	SI
9	0	2,27	0	0,66	NO	NO	NO	NO
10	3,33	5	0,66	1	NO	SI	NO	SI
11	0	2,27	0	0,66	NO	NO	NO	NO
12	1,13	3,33	0,33	0,66	NO	NO	NO	NO
13	1,7	2,8	0,33	0,66	NO	NO	NO	NO
14	1,13	3,9	0,33	0,66	NO	SI	NO	SI
15	0	3,33	0	0,66	NO	SI	NO	NO
16	0	3,9	0	0,66	NO	NO	NO	NO

I = Preprueba. F= Posprueba. **NO**= No alcanza el nivel de comprensión. **SI**= Sí alcanza el nivel de comprensión

Comentarios finales

Con base en el hecho que el 31,3% de la población obtuvo el nivel mínimo de comprensión del concepto de función y el 18,7% alcanzó el segundo nivel, se puede concluir que estos estudiantes superaron satisfactoriamente la problemática Tall – Vinner.

Es de resaltar que, aunque el concepto de función se abordó con el desarrollo de una guía pautada conformada por situaciones de aprendizaje que motivaban a los estudiantes a comprometerse en la realización de la actividad matemática, los resultados obtenidos revelaron que en los cursos de primer semestre de ingenierías en la Universidad de La Salle, existen problemas de comprensión alrededor del concepto de función, que persisten o evolucionan muy lentamente. Se advierte que el ignorar la presencia de esta problemática puede traer como consecuencia el fracaso de los estudiantes en los cursos de cálculo y por tanto un aumento en los niveles de deserción.

Este hecho, concuerda con los resultados obtenidos por Álvarez y Delgado (2002), en un estudio realizado en la Universidad del valle, con estudiantes de primer semestre de Ingenierías y Ciencias.

Notas:

[1] La prueba está consignada como anexo B en el informe final del proyecto de investigación: Castro, N., Trujillo, M., y Guerrero, J. (2006). Mediación de situaciones didácticas apoyadas en el uso de la calculadora graficadora en la superación de obstáculos cognitivos en el aprendizaje del concepto de función. Universidad de La Salle. Bogotá. 211pp.

Referencias Bibliográficas

Álvarez, J., y Delgado, C. (2002). The Tall-Vinner Problem. An Operative Reformulation. En A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 261). Norwich, U.K.: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Brousseau, G. (1986). Fondements et Méthodes de la didactique des Mathématiques [Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas, (Publicaciones del CINVESTAV del Instituto Politécnico Nacional de México, Trad.)]. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Delgado, C. (2010). Enseñanza, actividad y aprendizaje. En M. Trujillo, N. Castro, & C. Delgado (Eds.), *El concepto de función y la teoría de situaciones: Bases epistemológicas y didácticas en la enseñanza del concepto de función con la ayuda de calculadoras graficadoras* (pp. 73-106), Bogotá: Universidad de La Salle

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinsky & G. Hareld (eds.), *The concept of function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy*. *Mathematical Association of America Notes,* (Vol. 25, pp. 25-58). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Images and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Trujillo, M., Guerrero, J., & Castro, N. (2007). Obstáculos cognitivos en el aprendizaje del concepto de función con la mediación de la calculadora graficadora. *Revista de Investigación, 7*(2), 223-233.