Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

**SECCIÓN 2** / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

# PLANTEO ANALÓGICO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS. DESCUBRIENDO RELACIONES ENTRE EL TEOREMA DE WALTER Y EL DE MORLEY

# ANALOGICAL POSING OF MATHEMATICAL PROBLEMS; DISCOVERING THE RELATIONSHIP BETWEEN WALTER'S AND MORLEY'S THEOREMS

**Miguel Cruz Ramírez**
Universidad de Holguín (Cuba)
cruzramirezmiguel@gmail.com

**Resumen**
En el presente trabajo se establece una conexión entre el planteo de problemas matemáticos y la teoría de Gentner sobre el razonamiento analógico. Se parte de una estrategia metacognitiva compuesta por etapas orientadas hacia el planteo creativo de problemas, luego se fundamenta el razonamiento analógico por medio del mapeo de predicados, y finalmente se ejemplifican las conexiones entre ambos procesos a partir de un problema de geometría elemental. El problema analizado revela ciertas conexiones entre el teorema de Walter y el de Morley, las cuales reflejan las potencialidades de la estrategia para imaginar nuevos problemas por un camino analógico.

**Palabras clave**: planteo de problemas, razonamiento analógico, teorema de Walter, teorema de Morley

**Abstract**
This work shows a connection between mathematical problem posing and Gentner's theory on analogical reasoning. It starts from a metacognitive strategy composed of stages focused on the creative problem posing; then, analogical reasoning is based on predicate mapping, and finally, the connections between both processes are exemplified from a problem of elementary geometry. The analyzed problem reveals certain connections between Walter's theorem and Morley's theorem, which reflect the potential of the strategy to imagine new problems along an analogical path.

**Key words**: problem posing, analogical reasoning, Walter's theorem, Morley's theorem

## Introducción

El planteo de nuevos problemas constituye una actividad eminentemente creativa, la cual requiere de mayor atención en el campo de la matemática educativa (Abdulla y Cramond, 2018; Kilpatrick, 1987; Mallart-Solaz, 2018; Van Harpen y Sriraman, 2012). Bajo una mirada epistémica, resulta consustancial el vínculo entre planteo y resolución de problemas para el desarrollo del conocimiento matemático (Ernest, 1991); bajo un enfoque curricular, numerosos textos y programas de estudio promulgan la importancia de la enseñanza y el aprendizaje del planteo y la resolución de problemas, como parte de la formación integral de las nuevas generaciones (Cai, Jiang, Hwang, Nie, y Hu, 2016; NCTM, 2000); y bajo una perspectiva didáctica, esta relación expresa una oportunidad no siempre aprovechada para el desarrollo del pensamiento matemático (Bonotto y Santo, 2015; English, Fox, y Watters, 2005).

Dentro del ámbito escolar, plantear nuevos problemas implica varias problemáticas relativas a su desarrollo conceptual y metodológico, por ejemplo: ¿qué es realmente plantear un problema? ¿Se trata de una habilidad matemática o constituye una competencia? ¿Cuáles son las etapas por las cuales transcurre el proceso cognitivo subyacente? ¿Cómo evaluar su aprendizaje? ¿Qué dispositivos didácticos permiten efectuar dicha evaluación? Incluso, el propio término "plantear" es susceptible de cuestionamiento. En la literatura esta pluralidad ha conllevado al empleo de otros términos tales como "inventar" (Espinoza, Segovia, y Lupiáñez, 2018) y "construir" (Bernardo, 2001). El primero ha sido utilizado con la intención de significar el proceso creativo en su totalidad y no enfocado solamente hacia el planteo como acción final, mientras que el segundo ha sido empleado como sinónimo de "diseñar", en el sentido de elaborar problemas principalmente con fines docentes. Como puede apreciarse, el primer camino es coherente con el planteo como una habilidad que puede ser adquirida por el alumno, mientras que el segundo enfatiza el planteo como una competencia profesional propia del docente. Además, epistémicamente el primero de ellos enfatiza su valor gnoseológico, mientras que el segundo vindica su carácter ontológico.

El presente trabajo parte de un modelo cognitivo descrito en trabajos previos (Cruz, García, Rojas, y Sigarreta, 2016; Cruz, 2019), donde se describe un conjunto de acciones que conforman un proceso cognitivo orientado hacia el planteo de nuevos problemas. La dinámica de estas acciones refleja numerosas estrategias de razonamiento, pero no han sido suficientemente fundamentadas las bases teóricas que conectan el establecimiento de analogías y el planteamiento creativo de problemas. Estudios cuantitativos y cualitativos han mostrado la presencia de procesos analógicos en ciertos subprocesos cognitivos (Bernardo, 2001; Cruz et al., 2016), de modo que constituye un problema teórico la búsqueda de un fundamento científico que explique las relaciones del razonamiento analógico con el planteo de problemas matemáticos. Una solución viable consiste en sustentar el planteo analógico de problemas bajo la concepción del mapeo estructural de Gentner (1983). Las conexiones de este modelo con los procesos cognitivos asociados al planteo constituyen el aporte fundamental de la presente investigación, lo cual se ejemplifica por medio de dos interesantes teoremas de la geometría elemental.

## Marco teórico

Tanto el planteo de problemas como el uso de analogías son dos procesos de elevado nivel de complejidad (Bernardo, 2001; Cruz et al., 2016). El primero de ellos ha sido tratado en la literatura en estrecha relación con la resolución de problemas, mientras que el segundo ha seguido un derrotero enfocado hacia los tipos de razonamiento. A continuación, se presentan aspectos relevantes que pueden esclarecer en primera instancia la relación entre ambos procesos, desde un punto de vista predominantemente cognitivo.

Como proceso cognitivo, el planteo de problemas implica la ejecución de estrategias complejas, el despliegue de habilidades y destrezas matemáticas, la activación de recursos metacognitivos, y también la influencia de creencias y concepciones subyacentes (Silver, 1994). El acto de plantear nuevos problemas imbrica procesos específicos que han sido descritos por varios autores. Un ejemplo de ello reside en la relación dialéctica entre aceptar un hecho u objetar ¿qué-si-no? (Brown y Walter, 1983). Esta dualidad despliega amplias posibilidades para establecer los puntos de partida, como en el caso de problemas ya resueltos, teoremas ya demostrados, y conceptos ya establecidos. El pensamiento prosigue por un camino inquisitivo y creador, donde se modifican elementos y se indaga acerca de qué pasaría bajo condiciones diferentes.

En un estudio relacionado con el uso de analogías durante el planteo de problemas, Cruz et al. (2016) describen una estrategia metacognitiva para generar problemas a partir de un objeto matemático, la cual tiene en cuenta ciertas regresiones cíclicas y las etapas sugeridas por Brown y Walter (1983). Esta estrategia consta de seis etapas: selección de un objeto, identificación de componentes, asociación de propiedades, búsqueda de relaciones, verbalización rigurosa de la interrogante, y la transformación posible durante todo el proceso. La secuencia de las primeras cinco expresan el camino más unidireccional, pero al incorporar la transformación se establece un proceso más complejo y dinámico. En lo adelante, a esta estrategia se le denominará SCABV+T para abreviar.

La Figura 1 representa de forma compactada la estrategia SCABV+T. La ubicación central de la etapa de transformación refleja su conexión directa con las etapas restantes. Este aspecto expresa la posibilidad de realizar ciertos cambios o variaciones, no solo en el objeto sino también en los elementos identificados, las propiedades seleccionadas, e incluso en los tipos de relaciones analizadas y en las preguntas verbalizadas. La transformación proporciona un elevado grado de flexibilidad, lo cual es esencial en todo acto creativo.

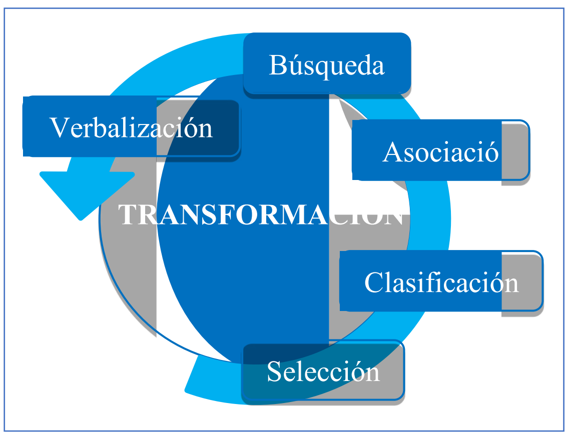


*Figura 1.* Una estrategia metacognitiva para el planteo de problemas matemáticos

Por otra parte, el avance paulatino hacia el planteo no significa que dejen de existir regresiones e interacciones dinámicas entre diferentes etapas. Los procesos iterativos pueden adoptar dos formas fundamentales: los unidireccionales (de tipo I), relacionados con ciclos entre etapas no necesariamente subsiguientes del camino selección-clasificación-selección-búsqueda-verbalización, y los multidireccionales (de tipo II), que implican el paso por la transformación. Esta concepción permite diferenciar los ciclos de Brown y Walter (1983) básicamente en dos grupos, lo cual es favorable desde el punto de vista didáctico, pues ello permite reconocer y evaluar diferentes niveles de desarrollo en el proceso cognitivo.

La parte final de la saeta en la Figura 1 no significa un vacío ni un estadio conclusivo en el proceso de razonamiento. Es este, precisamente, el momento en que el pensamiento matemático avanza hacia el proceso de resolución de problemas. Por tanto, la estrategia metacognitiva descrita tiene lugar bajo estrecha unidad dialéctica con las estrategias de solución de problemas. Este hecho marca una diferencia esencial entre la estrategia SCABV+T y la descrita por Brown y Walter (1983), ya que esta última culmina con el análisis del problema, lo cual puede implicar acciones de resolución. El nuevo problema que se expresa por medio de la verbalización requiere de revisión por varios motivos. Por ejemplo, es posible que los datos sean inconsistentes o contradictorios, lo dado podría ser insuficiente para arribar a lo buscado, las herramientas mínimas de solución podrían rebasar los objetivos curriculares, la formulación podría no ser suficientemente clara o motivadora, entre otros aspectos. Ciertamente, el proceso de resolución de problemas puede coadyuvar a disminuir estas dificultades, pero en la estrategia SCABV+T se concibe fuera del proceso de planteo. Aunque pueden verse en unidad dialéctica, el planteo, la solución y el perfeccionamiento o adecuación del problema son subprocesos complejos, cuyo estudio específico ya resulta suficientemente complejo.

## Metodología

Para la búsqueda de fuentes teóricas argumentativas que sustenten el planteo analógico de problemas, un análisis cualitativo puede servir de puente entre elementos descritos en ambos campos del saber científico: elementos psicológicos y didácticos como la estrategia metacognitiva SCABV+T antes descrita, y elementos lógicos relacionados con el establecimiento de analogías. En este último caso, en la literatura existen dos enfoques fundamentales: el axiomático y el mapeo estructural (Schlimm, 2008). El camino analítico adoptado no persigue desechar uno de ellos o compararlos, sino revelar los elementos positivos que tiene el segundo para fundamentar la naturaleza del razonamiento analógico durante el planteo de problemas. Esta argumentación se complementa con una ejemplificación, donde se ha tomado el resultado empírico de aplicar la estrategia SCABV+T durante un curso de geometría.

## Resultados

*El planteo analógico de problemas con base en el mapeo estructural de Gentner*

Para explicar de forma coherente los mecanismos empleados durante el razonamiento analógico, es factible adoptar la teoría de Gentner (1983) sobre el papeo de estructuras. Esta teoría se apoya en varios conceptos tales como los “dominios” y las “situaciones”, consistentes en sistemas que pueden ser de objetos, de atributos de objetos, así como de relaciones entre objetos. Al trasladar esta idea al marco conceptual del planteo de problemas, el sistema de objetos queda definido durante la etapa de selección. Seguidamente, durante la interacción clasificación-identificación emerge paulatinamente un conjunto de propiedades conocidas previamente. La amplitud del conocimiento constituye un elemento favorable, pues provee al sujeto de un inventario superior de elementos y hechos relacionados con el objeto. Sin embargo, esto es insuficiente cuando se carece de aspectos reguladores tales como la motivación, la atención, la fluidez, la flexibilidad, entre otros. Por ejemplo, la fluidez constituye un elemento catalizador para identificar nuevos elementos, no necesariamente reflejados de manera explícita en el objeto matemático, mientras que la flexibilidad permite cambiar de rumbo ante obstáculos insoslayables.

En la mencionada teoría, el conocimiento se configura como un conjunto de redes proposicionales de nodos y predicados. Aquí los nodos representan los conceptos tratados como totalidades, mientras que los predicados aplicados a los nodos expresan proposiciones sobre tales conceptos. Los predicados constituyen funciones cuyas variables son los nodos, y pueden expresar atributos propios como *amplitud*($\angle ABC$), o relacionales como *con cíclicos* ($A, B, C, D$). También los predicados pueden subdividirse siguiendo otra clasificación, conforme a su tipo de argumento: los de primer orden donde los argumentos son objetos, como ocurre con los dos ejemplos anteriores, y los de orden superior donde los argumentos están constituidos por proposiciones, como *causa* [*paralelismo* ($r, s$), *perpendicularidad* ($s, t$)]. Por su forma de realización, las analogías basadas en predicados simples constituyen niveles primarios de complejidad, mientras que aquellas relacionadas con predicados de orden superior expresan niveles de complejidad más avanzados.

La organización del conocimiento en forma de redes proposicionales de nodos y predicados, incluyendo la estructura de estos últimos, refleja la forma en que las personas construyen una situación. Gentner (1983) señala que la flexibilidad de estas representaciones va más allá de lo que pudiera parecer lógicamente posible. Con ello, la teoría de mapeo de estructuras se distingue por definir las analogías dependiendo solo de las propiedades sintácticas en que se representa el conocimiento, y no del contenido específico de su dominio. Una analogía se diferencia de una abstracción, de una similitud literal y de otras clases de comparaciones, en que mapea pocos o ningún atributo de la fuente hacia el objetivo. No se trasladan rasgos particulares sino propiedades esenciales. El proceso consiste en 'extraer' información relevante de la fuente y darle significado en el dominio del objetivo (Villafiorita, 1996).

Bajo cierto grado de formalización, según Gentner (1983), todo mapeo puede representarse como una función $M$ que aplica de la fuente $F$ en el objetivo $O$, o sea $M: F \to O$, donde a un conjunto de nodos $f_i$ de la fuente le corresponde un conjunto de nodos $o_j$ en el objetivo ($f_i \to o_j$). Dicha función determina otra correspondencia de orden superior, la cual transporta atributos $A$ y relaciones $R$, en forma de predicados de mayor complejidad. Estudios pioneros, principalmente relacionados con inteligencia artificial, han utilizado esta formalización para modelar el proceso de razonamiento analógico en el campo de la resolución de problemas (Melis, 1993; Villafiorita, 1996). Para conseguir mayor rigor, por ejemplo, el modelo de Villafiorita (1996) separa el mapeo de la fuente y del objetivo, y lo define exactamente entre abstracciones de estos.

En un sentido heurístico, Gentner (1983) refiere tres principios básicos que sirven para potenciar el razonamiento analógico. Primero, tratar de descartar los atributos de objetos; segundo, intentar preservar las relaciones entre objetos; y tercero, elegir sistemas de relaciones. A esta última idea este autor la denomina "principio de sistematicidad" y sugiere que, al decidir qué relaciones se conservan, es necesario elegir un sistema de relaciones en lugar de predicados aislados. Transferir sistemas de relaciones es más efectivo que trasladar relaciones aisladas. Seguidamente, se ejemplifica el planteo analógico de un problema geométrico, tomando como sustento argumentativo el mapeo estructural de Gentner (1983) y la estrategia metacognitiva SCABV+T. Este ejemplo ha sido tomado de una discusión realizada durante un curso de geometría en la carrera de Licenciatura en Educación, especialidad Matemática, en la Universidad de Holguín.

*Un ejemplo de razonamiento analógico durante el planteo de un problema geométrico*

En el siguiente ejemplo se parte de un teorema de geometría afín, el cual sirve de base para imaginar nuevos problemas por un camino analógico. Se trata del teorema de la matemática germano-norteamericana Marion I. Walter (n. 1928), precisamente la coautora junto a Stephen I. Brown del influyente libro anteriormente referido (Brown y Walter, 1983). No se sabe a ciencia cierta quién formuló este teorema por primera vez, pero se debe a Walter el mérito de popularizarlo. El teorema plantea el siguiente hallazgo (ver Figura 2):

> *Teorema 1 (de Walter).* Dado un triángulo cualquiera, al trazar las cevianas que trisecan cada lado en tres segmentos iguales y seleccionar convenientemente sus puntos de intersección, queda definida una región hexagonal central cuya área constituye la décima parte del área del triángulo original.

El camino de la estrategia SCABV+T favorece el planteo de numerosos problemas. En efecto, la selección corresponde al propio teorema consistente de un objeto matemático y una propiedad que le es inherente. La clasificación implica desmembrar el objeto en partes, lo cual es similar a la implementación de la estrategia heurística descomponer/recomponer, descrita por Pólya (1957) en el proceso de resolución de problemas. Como componentes relevantes del triángulo respecto a la propiedad, figuran las seis cevianas y los puntos de intersección seleccionados convenientemente para la conformación del hexágono *PR'QP'RQ'*. Ahora, existen otros elementos visibles claramente, como los restantes puntos de intersección y los propios pies de las cevianas. En cambio, la geometría del triángulo es inagotable y es posible identificar otros elementos no considerados en el teorema, los cuales podrían favorecer el hallazgo de nuevos problemas. Por ejemplo, considerar las medianas y el baricentro, las mediatrices y el circuncentro, las alturas y el ortocentro, las bisectrices y el incentro, puntos especiales como el de

Gergonne, el de Brocard, y el de Miquel, la circunferencia de Euler y la de Lemoine, la recta de Gauss y la de Simson, etcétera.

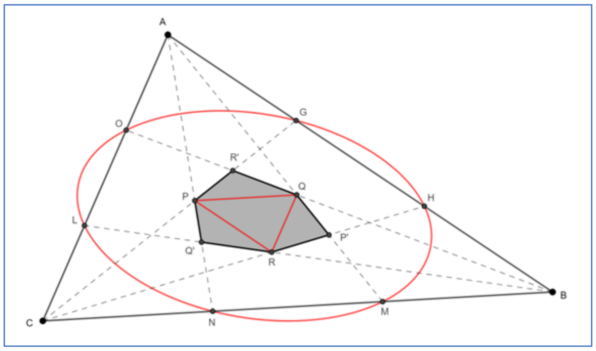


**Figura 2.** *Formulación de problemas bajo las premisas del teorema de Walter*

Seguidamente, a los elementos identificados se les asocia propiedades que resulten afines. Por ejemplo, a los puntos se les puede hacer corresponder la pertenencia o no a cierto lugar geométrico, la colinealidad, la posición relativa respecto a una figura, entre otras. De igual modo, a un segmento se le pueden hacer corresponder los conceptos de longitud, paralelismo, equidistancia, etcétera. Con los objetos y sus propiedades sobreviene la etapa de búsqueda de relaciones. Este momento es el más complejo pues implica la certeza de que resulten consistentes dichas relaciones. Procesos mentales como la intuición favorecen una mejor orientación hacia el planteo de problemas interesantes, proveídos de sentido lógico-matemático. Por ejemplo, si se consideran todos los puntos de intercepción de las cevianas, podría identificarse un objeto nuevo por medio de la unión de dichos puntos. Surge así una especie de polígono estrellado, al cual podría asociarse el concepto de área y explorar relaciones similares al teorema original. Similarmente, la consideración del triángulo $\Delta PQR$ (Figura 2) conlleva a numerosas ideas relacionadas con su área y posición, donde puede demostrarse que este triángulo es semejante con el triángulo $\Delta ABC$.

El uso de un software de geometría dinámica ayuda a identificar posibles propiedades como estas con economía de tiempo, y también a descartar tempranamente las falsas hipótesis. Queda así por delante la verbalización como expresión rigurosa del problema que da paso al proceso de resolución. Muchas veces este proceso de resolución se antepone a la propia verbalización, pues la búsqueda de un problema se solapa con la exploración matemática del objeto. Por tanto, una verbalización temprana podría ser: "Hallar los ángulos del triángulo $\Delta PQR$", mientras que otra más avanzada podría ser: "Probar que los triángulos $\Delta ABC$ y $\Delta PQR$ son semejantes, con razón 5:1". La Figura 2 ilustra una propiedad más, relacionada con la posición de los pies de las cevianas en el teorema de Walter. En efecto, puede demostrarse que la elipse que pasa por cinco de ellos pasa también por el sexto.

Por otra parte, la transformación constituye una oportunidad para imaginar problemas con mayor despliegue en el pensamiento. Los ciclos no lineales (de tipo II) favorecen reconsiderar elementos seleccionados previamente, la búsqueda de nuevas relaciones, e incluso la variación de condiciones en el objeto. Un camino efectivo lo constituye la implementación de la estrategia ¿qué-si-no? desarrollada por Brown y Walter (1983). Por ejemplo, qué pasaría si, en lugar de trisecar cada lado, las cevianas trisecan cada ángulo del triángulo $\Delta ABC$. En este caso, es oportuno mostrar cómo el razonamiento analógico puede trasladar ideas similares de una figura a otra, de modo que la búsqueda de relaciones implique la identificación de problemas similares. En primera instancia, un nuevo problema surge inmediatamente al considerar el cociente entre las áreas de los triángulos $\Delta PQR$ y $\Delta ABC$ en la Figura 3. ¿Será este cociente, en principio, una constante?

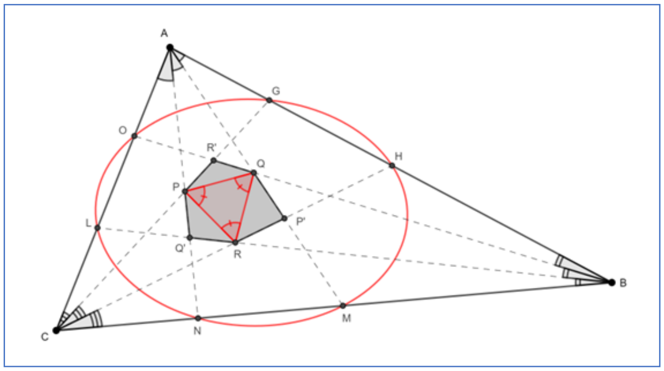


**Figura 3.** *Problemas análogos bajo las premisas del teorema de Morley*

Con la ayuda de un paquete de geometría dinámica es fácil convencerse de que dicho cociente no es constante. Ahora, al mover los vértices y considerar una amplia variedad de triángulos, llama la atención el hecho de que los cocientes resultantes siempre sobrepasan el valor de una décima. Precisamente, el razonamiento analógico lleva a tomar este hecho como relevante, ya que la razón 1/10 es el valor expresado en el teorema de Walter. Una primera conjetura sugiere la posibilidad de que esta fracción constituya una cota inferior. Tal conjetura es cierta; en efecto, puede demostrarse que se cumple el siguiente teorema análogo (ver Figura 3):

> *Teorema 2.* Dado un triángulo cualquiera, al trazar las trisectrices de cada ángulo, y seleccionar convenientemente sus puntos de intersección, queda definida una región hexagonal central cuya área siempre supera la décima parte del área del triángulo original.

Ciertamente, también pueden trasladarse a estas nuevas condiciones otros problemas analizados con anterioridad. Por ejemplo, puede demostrarse que los seis pies de las trisectrices también son puntos de una elipse. Asimismo, la consideración de los ángulos interiores en el triángulo $\Delta PQR$ favorece el redescubrimiento del teorema del matemático anglo-norteamericano Frank Morley (1860-1937), el cual afirma que este triángulo es siempre equilátero. Así, surge una interesante conexión entre el teorema de Walter y el teorema de Morley.

Como ha sugerido Gentner (1983), el camino del razonamiento analógico ha partido de un dominio de situaciones. Esencialmente, el sistema original de objetos consta del triángulo, las cevianas cuyos pies trisecan cada lado, así como del hexágono interior definido. El sistema de atributos y relaciones incluye la arbitrariedad del triángulo, el área de este y del hexágono, el cociente entre ambas áreas, entre otros aspectos. Después de transformar el objeto y considerar las trisectrices de los ángulos, ocurre un mapeo de predicados. Por ejemplo, en forma muy primitiva transcurre la transferencia de predicados de primer orden, como $M_1$: $\{área(\Delta ABC), área(\Delta PQR)\} \rightarrow \{área(\Delta ABC), área(\Delta PQR)\}$, lo cual lleva a transferir la idea de calcular las áreas correspondientes desde el problema original, sin considerar relaciones entre estas. Sin embargo, la transferencia de predicados de orden superior favorece la búsqueda de analogías más profundas. Por ejemplo, el mapeo $M_2$: $\{cociente(área(\Delta ABC), área(\Delta PQR)) = 1/10\} \rightarrow \{cociente(área(\Delta ABC), área(\Delta PQR)) > 1/10\}$ sugiere una fuerte analogía entre los dos teoremas antes enunciados.
En este proceso de planteo analógico, cabe destacar la importancia que reviste el principio de sistematicidad de Gentner (1983). En efecto, la aprehensión de un sistema de relaciones provee al sujeto de mecanismos más sofisticados para identificar y transferir estructuras y relaciones desde un sistema conocido (fuente) hacia uno menos conocido (objetivo). Una comprensión más profunda de las relaciones que tipifican el problema original contribuye a una transferencia efectiva de predicados de orden superior. Por otra parte, la analogía requiere mantenimiento, manipulación, activación e inhibición selectiva de representaciones mentales, dirigidas a establecer correspondencias e inferencias acerca de relaciones de similitud más complejas. El razonamiento analógico se configura gracias a varias operaciones mentales que son especialmente importantes en un sentido amplio de la

cognición humana, tales como la comparación, el análisis, la síntesis, la generalización, la clasificación, y la identificación de relaciones causa-efecto. La riqueza de esta actividad cognitiva encuentra en el principio de sistematicidad un efecto catalizador.

El problema de demostrar el Teorema 2, invita a reflexionar analógicamente acerca de dos cuestiones fundamentales. Por un lado, el razonamiento analógico ha favorecido el hallazgo de dos teoremas similares por los objetos a los cuales se refieren, y también por las propiedades que en ellos tienen lugar. Por otra parte, cabe preguntarse si también existen analogías entre las demostraciones de ambos teoremas. En la literatura pueden encontrarse numerosas formas de demostrar el Teorema 1, pero esencialmente están alejadas por su naturaleza y menor complejidad del aserto del Teorema 2. De forma general, aunque puede resultar una afirmación apresurada, no son visibles elementos de similitud entre ambos caminos de razonamiento.

El segundo aspecto está condicionado por el cálculo intermedio del área del triángulo de Morley, resultado elemental con cierto grado de complejidad. El lado de este triángulo equilátero tiene una expresión naturalmente simétrica para su longitud: $L = 8R\sin(\frac{\alpha}{3})\sin(\frac{\beta}{3})\sin(\frac{\gamma}{3})$, donde $R$ es el circunradio del triángulo $\Delta ABC$ y α, β, γ son las amplitudes de los ángulos $\angle A$, $\angle B$, y $\angle C$, respectivamente (ver Conde, 2004). El hexágono $PR'QP'RQ'$ está compuesto por el triángulo $\Delta PQR$ (primer triángulo de Morley) y por tres triángulos $\Delta PQR'$, $\Delta QRP'$, y $\Delta RPQ'$, los cuales puede verificarse que son isósceles con sus bases ubicadas respectivamente sobre los lados $PQ$, $QR$, y $RP$, todas de longitud $L$. El área del hexágono puede calcularse por medio de la suma de las áreas de estos cuatro triángulos que lo componen. La expresión resultante es la siguiente:

$$A_{PR'QP'RQ'} = 16R^2\sin^2(\tfrac{\alpha}{3})\sin^2(\tfrac{\beta}{3})\sin^2(\tfrac{\gamma}{3})\left[\sqrt{3}+\tan(\tfrac{\pi-\alpha}{3})+\tan(\tfrac{\pi-\beta}{3})+\tan(\tfrac{\pi-\gamma}{3})\right].$$

Después de sustituir $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$ se obtiene la siguiente función dependiente de la longitud $a$ del lado $BC$, y de los ángulos β y γ:

$$f_{(a,\beta,\gamma)} = A_{PR'QP'RQ'} = \frac{4a^2\sin^2(\frac{\pi-\beta-\gamma}{3})\sin^2(\frac{\beta}{3})\sin^2(\frac{\gamma}{3})\left[\sqrt{3}+\tan(\frac{\beta+\gamma}{3})+\tan(\frac{\pi-\beta}{3})+\tan(\frac{\pi-\gamma}{3})\right]}{\sin^2(\beta+\gamma)}.$$

Con iguales argumentos, es posible expresar el área del triángulo original como una función $A_{\Delta ABC} = g_{(a,\beta,\gamma)}$, donde $g_{(a,\beta,\gamma)} = \frac{a^2}{2(\cot\beta+\cot\gamma)}$. Así, demostrar el Teorema 2 equivale a demostrar que la siguiente función $h_{(a,\beta,\gamma)} = \frac{1}{10}g_{(a,\beta,\gamma)} - f_{(a,\beta,\gamma)}$ es estrictamente positiva para todos los valores posibles del argumento, donde $a$, β, γ son reales positivos y $\beta + \gamma < \pi$. Realmente, es posible prescindir del factor $a^2$, prefijando $a = 1$ sin pérdida de generalidad salvo semejanza. Para amplitudes de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ cercanas a cero, la función $h$ produce valores cada vez más pequeños. Por ejemplo, $h_{(1,\,0.01,\,0.01)} = 0.000245\ldots$ La Figura 4 ilustra el comportamiento de $h_{(1,\,\beta,\,\gamma)} = h_{(\beta,\,\gamma)}$ sobre la región triangular abierta $\Psi = \{0 < \beta,\ 0 < \gamma,\ \beta + \gamma < \pi\}$. La cercanía de la función al plano $h = 0$ sugiere que el Teorema 2 es una especie de caso límite del Teorema 1, considerando variaciones continuas en los pies de las cevianas.
Concluido este análisis, puede repetirse de forma dinámica el ciclo expresado en la Figura 1. Al finalizar dicho ciclo es posible imaginar nuevos problemas pues, como señala Silver (1994), el planteo de problemas ocurre siguiendo dos variantes fundamentales: formulando un nuevo problema o reformulando un problema dado. La descripción anterior ha enfatizado la primera variante por el camino del razonamiento analógico, pero la segunda también permite el desarrollo de ideas interesantes y creativas. Al tener dos problemas análogos, el pensamiento matemático podría sugerir la reformulación de ambos, también por caminos análogos.

Demostrar la propiedad ilustrada en la Figura 4 constituye una reformulación analítica del nuevo problema. Luego de mapear esta idea “hacia atrás”, podría imaginarse un problema similar en el objeto original, donde la función que sirve de modelo es necesariamente constante. Determinar cuán interesante y complejo es el nuevo problema, constituye un aspecto relativo y singular. Lo más trascendente en el orden epistémico reside en las posibilidades amplias de exploración y búsqueda de nuevos problemas. Al respecto, en su *How to Solve It*, Pólya señaló que:

[…] Encontrar un nuevo problema que sea interesante y accesible, no es fácil; necesitamos experiencia, buen gusto y suerte. Sin embargo, no debemos dejar de buscar otros problemas nuevos cada vez que hayamos logrado resolver uno. Los buenos problemas y ciertas clases de setas tienen algo en común, crecen en racimos. Habiendo encontrado uno, deberías mirar alrededor; hay una buena posibilidad de que haya algunos bastante cerca (Pólya, 1957, p. 65).

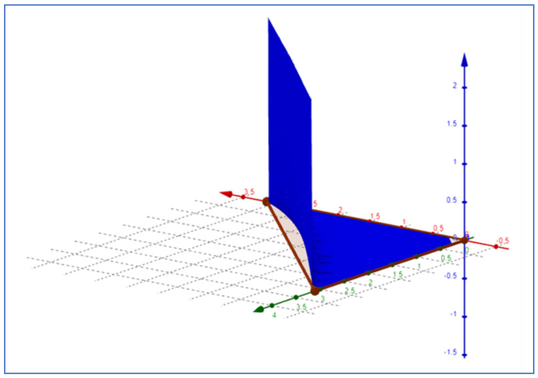

**Figura 4.** *Una visualización del resultado expresado en el Teorema*

## Conclusiones

El planteo analógico de problemas expresa un vínculo entre dos aspectos relevantes de la actividad matemática: por una parte, el hallazgo de nuevos problemas y por otro el establecimiento de analogías. Ambos procesos son importantes en la formación matemática de los estudiantes, pero no han sido suficientemente desarrollados. El presente trabajo ha tomado como centro el primero de ambos aspectos, mostrando la utilidad de la estrategia metacognitiva SCABV+T, donde los procesos analógicos pueden ser explicados con la ayuda del mapeo estructural de Gentner (1983). Este enfoque ha mostrado una notable coherencia entre ambos rasgos del pensamiento matemático, donde las conexiones más fuertes se observan por intermedio de la etapa de transformación. No puede afirmarse que esta relación es única, pues se dejaría fuera la búsqueda de analogías entre objetos matemáticos seleccionados sin conexión previa, o sea, sin que uno de ellos se imagine a partir de otro. Sin embargo, el razonamiento analógico entre objetos desligados a priori también puede ser descrito dentro de la estrategia SCABV+T, donde la etapa inicial de selección involucra un objeto nuevo e independiente. Con el despliegue del subproceso clasificación-asociación-búsqueda comienza una actividad cognitiva que puede conllevar al hallazgo de analogías, en el sentido de mapear propiedades y relaciones por intermedio de predicados. Si este subproceso no tiene lugar, entonces es difícil transferir problemas análogos de un objeto a otro. Además, los niveles de complejidad de las analogías se corresponden directamente con los niveles de complejidad de los ciclos y también de los predicados mapeados.

Para investigaciones posteriores es interesante profundizar en otros aspectos del planteo analógico de problemas. Por ejemplo, el tipo de analogía conforme a alguna clasificación, como podría ser la diferenciación entre analogías entre propiedades y entre relaciones, lo cual se conecta con dos formas lógicas del pensamiento: los juicios y los razonamientos. Otro elemento por considerar consiste en la relación creatividad/planteo, donde la flexibilidad se relaciona directamente con la capacidad para efectuar transformaciones, mientras que la fluencia está ligada estrechamente a las etapas de clasificación y asociación de propiedades. En este último caso, la fluencia se conecta de forma directa con otra forma lógica del pensamiento: los conceptos. Un conocimiento profundo del objeto analizado favorece la fluidez en la identificación de componentes y propiedades, pero no necesariamente la determina. Finalmente, otro elemento notable consiste en la elaboración de instrumentos válidos y fiables que faciliten la evaluación de la estrategia SCABV+T, a fin de identificar dónde y cómo ocurren los razonamientos analógicos.

## Referencias bibliográficas

Abdulla, A. M., & Cramond, B. (2018). The creative problem finding hierarchy: a suggested model for understanding problem finding. *Creativity*, 5(2), 197-229. doi: 10.1515/ctra-2018-0019

Bernardo, A. B. I. (2001). Analogical problem construction and transfer in mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 21(2), 137-150. doi: 10.1080/01443410020043841

Bonotto, C., & Santo, L. D. (2015). On the relationship between problem posing, problem solving, and creativity in the primary school. In F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice* (pp. 103-123). New York: Springer. doi: 10.1007/978-1-4614-6258-3

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1983). *The Art of Problem Posing*. New Jersey: Erlbaum.

Cai, J., Jiang, C., Hwang, S., Nie, B., & Hu, D. (2016). How do textbooks incorporate mathematical problem posing? An international comparative study. In P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems. Advances and New Perspectives* (pp. 3-22). Switzerland: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-28023-3

Conde, J. M. (2004). Teorema de Morley. *Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática*, 14. https://www.oei.es/historico/oim/revistaoim/numero14.htm

Cruz, M., García, M. M., Rojas, O. J., & Sigarreta, J. M. (2016). Analogies in mathematical problem posing. *Journal of Science Education*, 17(2), 84-90.

Cruz, M. (2019). Aprendiendo a plantear nuevos problemas. Una Experiencia con GeoGebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 32(1), 468-477.

English, L. D., Fox, J. L., & Watters, J. J. (2005). Problem posing and solving with mathematical modeling. *Teaching Children Mathematics*, 12(3), 156-163. https://eprints.qut.edu.au/3475/

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. Routledge: Taylor & Francis.

Espinoza, J., Segovia, I., & Lupiáñez, J. L. (2018). Variables de estudio para caracterizar las producciones de estudiantes con talento matemático ante tareas de invención de problemas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31(2), 1132-1138. https://clame.org.mx/uploads/actas/alme31_2.pdf

Gentner, D. (1983). Structure-mapping: a theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7(2), 155-170. doi: 10.1016/S0364-0213(83)80009-3

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Mallart-Solaz, A. (2018). Interés de los futuros maestros en saber crear problemas de matemáticas para enseñar a resolverlos. *Psicología Educativa*, 25(1), 31-41. doi: 10.5093/psed2018a17

Melis, E. (1993). *Change of Representation in Theorem Proving*. SEKI-Report SR-93-07. Universität der Saarlandes, Saarbrücken. doi: 10.1.1.53.6811

NCTM [National Council of Teachers of Mathematics] (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Pólya, G. (1957). *How to Solve It: A new Aspect of Mathematical Method* (2nd ed.). Princeton: Princeton University Press.

Schlimm, D. (2008). Two ways of analogy: Extending the study of analogies to mathematical domains. *Philosophy of Science*, 75(2), 178-200. doi: 10.1086/590198

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28. http://www.jstor.org/stable/40248099

Van Harpen, X. Y., & Sriraman, B. (2012). Creativity and mathematical problem posing: an analysis of high school students' mathematical problem posing in China and the USA. *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 201-221. doi: 10.1007/s10649-012-9419-5

Villafiorita, A. (1996). *Reasoning by Analogy via Abstraction*. Technical Report MRG/DIST # 96-0030. University of Ancona.