Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
**SECCIÓN 2** / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

# TÉCNICAS PARA RESOLVER TAREAS QUE IMPLICAN DEMOSTRACIÓN

# TECHNIQUES FOR SOLVING TASKS THAT INVOLVE DEMONSTRATION

**Maritza Luna Valenzuela[1], Saddo Ag Almouloud[2], Francisco Ugarte Guerra[2]**
Pontificia Universidad Católica del Perú[1] (Perú), Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo[2] (Brasil)
luna.m@pucp.edu.pe, saddoag@gmail.com, fugarte@pucp.edu.pe

**Resumen**
En este artículo estudiamos los procesos (o técnicas) relacionados con la resolución de una determinada tarea en geometría que involucra pruebas y demostraciones para introducir a un nuevo tema. El objetivo es analizar la pertinencia de la tarea para lo cual se debe identificar los tipos de procesos y las herramientas matemáticas (tecnología) que se utilizan para dar solución a dicha tarea. Para el análisis utilizamos la noción de praxeología de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y los conceptos de pruebas y demostraciones según Balacheff. Como resultado se detecta las técnicas y tecnologías utilizadas para resolver la tarea, se muestra las articulaciones de las tecnologías y además se identifica la dimensión ecológica peruana.

**Palabras clave**: vector, baricentro, teoría antropológica de lo didáctico

**Abstract**
In this article, we study the processes (or techniques) related to a specific geometry task that involves proofs and demonstrations to introduce a new topic. It is aimed at analyzing the relevance of the task; so, the types of processes and the mathematics (technological) tools used to give solution to such task should be identified. For the analysis, we used the notion of Praxeology of the Didactic Anthropologic Theory and the concepts of proofs and demonstrations according to Balacheff. Among the results, it was possible to find the techniques and technologies used to solve the task; to show the connections of the technologies; and to identify the Peruvian ecologic dimension, as well.

**Key words:** vector, barycenter, didactic anthropologic theory

## Introducción

Dado un problema, durante el desarrollo de un contenido, se espera que el alumno lo resuelva utilizando los conceptos y propiedades presentados en esa sesión de clase, pero en matemáticas es posible que se presenten diversas soluciones, en algunos casos, siendo algunas de ellas no reconocidas o tomadas en cuenta, ya que no forman parte del contrato didáctico, dejando al alumno con interrogantes de como enlazar lo aprendido con lo que necesita aprender.

En este trabajo, se presenta, a modo de ejemplo, una tarea para alumnos del primer ciclo de una universidad particular peruana del área de ciencias e ingeniería que implica demostraciones. En dicha tarea se espera que el alumno deba resolver la tarea utilizando los vectores y sus propiedades, pero en este caso particular podemos ver que se puede resolver por otras técnicas, utilizando los conocimientos previos de ciertas herramientas matemáticas que traen de la formación media regular o nivel secundario.

La didáctica de las matemáticas advierte de la importancia de la buena elección de los problemas (situaciones, tareas) para un aprendizaje duradero (significativo), pero a veces esta elección se reduce a utilizar la técnica que el programa de estudio establece para dicha sesión, sin considerar otras alternativas, ¿qué hacer para evitar este fenómeno?

Para dar respuesta a esta interrogante debemos analizar las diversas soluciones presentadas que permitirán identificar y mostrar a la luz de la TAD algunas técnicas utilizadas y la tecnología empleada. Luego de dicha identificación se logra relacionar los contenidos utilizados de modo que se permitirá reconstruir una organización matemática, reconocer su tipo y analizarla con miras a plantear, más adelante, un modelo de referencia y una organización didáctica para la enseñanza de los vectores en las demostraciones.

Almouloud, Regnier y Silva (2009) indican que, en la última década, la importancia atribuida a pruebas y demostraciones en Matemática lleva a una enorme variedad de investigaciones en esa área. Consideran, usualmente, la demostración como un procedimiento de validación que caracteriza a la Matemática; y la distingue de las ciencias experimentales. La comprensión de la información dada en el enunciado de una proposición matemática es el reconocimiento de elementos cruciales conocidos como hipótesis y tesis, ambos son fundamentales para el proceso de construcción de una demostración.

Según Arenzana (1997) la geometría actual está expresada, en buena medida, en términos vectoriales. El autor indica que las nociones como las de producto escalar, vectorial, etc. son básicas para expresar teoremas geométricos y resultados científicos. Además, indica que las transformaciones y movimientos geométricos no solamente tienen su ecuación, sino que una operación con vectores puede representar un movimiento en el plano o en el espacio.

El objetivo que se aborda en este trabajo es identificar los tipos de procesos y las herramientas matemáticas que se utilizan para dar solución a una determinada tarea, así mismo, la relación entre las diversas maneras (técnicas) y herramientas (tecnologías) empleadas. Al mismo tiempo mostrar el alcance de la técnica (la economía) de utilizar vectores en la solución de la tarea frente a las diversas técnicas presentadas enmarcadas en la geometría.

## Marco teórico

Para nuestro análisis, utilizaremos la TAD que según Chevallard: “se admite en efecto que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se resume aquí con la palabra de *praxeología*” (1999, p. 2). Es decir, el nivel praxis o “saber-hacer" engloba un tipo de tareas y preguntas estudiadas, así como las técnicas empleadas para llevarlas a cabo. El nivel logos o “saber”, en el que los discursos describen, explican y justifican las tareas y técnicas, es llamado tecnología de la técnica. Toda tecnología necesita también de una justificación y se denomina teoría de la técnica (Bosch & Chevallard, 1999). Podemos ver en la figura 1 más detalles.

**PRAXEOLOGÍA**

| PRAXIS | + | LOGOS |
|---|---|---|
| Saber hacer PRÁCTICA | | Saber RAZÓN |

*Figura 1.* Esquema estructura de una praxeología.

Chevallard (1998) define tipos de *Tareas* (T) como un conjunto de tareas (t), donde una tarea ($t \in T$) es una acción en un objeto específico que es ejecutado por alguien, definido por un verbo, llamado género de tarea. Además, el género de tarea es la acción que agrupa los tipos de tareas. *Técnica* ($\tau$). Una técnica es la manera de resolver una tarea específica. *Tecnología* ($\theta$). La tecnología es un discurso racional, cuya primera función es justificar la técnica $\tau$, para ejecutar un tipo de tarea. Una segunda función de la tecnología es explicar la técnica para que ella sea inteligible. La última función de la tecnología es la producción de nuevas técnicas más eficientes y adaptadas para la resolución de una tarea específica. *Teoría* ($\Theta$)**.** Es el discurso racional sobre la tecnología, esto es, aquella que justifica y explica las afirmaciones de la tecnología.

Es necesario tener presente que, alrededor de una tarea (T), se encuentra una técnica ($\tau$) sustentada por una tecnología ($\theta$), que a su vez es explicada por una teoría ($\Theta$). Finalmente $[T/\tau/\theta/\Theta]$ constituye que una praxeología puntual, relativa a un único tipo de tarea. Es decir, una praxeología está pues constituida por un bloque *práctico-técnico*, $[T/\tau]$, y por un bloque *tecnológico-teórico*, $[\theta/\Theta]$.

Las praxeologías integradas a un saber matemático son la organización matemática (OM) y la organización didáctica (OD). La OM estudia la situación identificada en las tareas, técnicas, tecnología y teoría. La OD observa la manera como estas situaciones fueron constituidas, por intermedio de momentos de estudio. La noción de "momento" fue concebida por Chevallard (1999) para delinear una OD y está estructurada en seis etapas.

De acuerdo con Gascón (2011), la dimensión ecológica de cualquier problema didáctico incluye, de cierto modo, las dimensiones epistemológicas y económico-institucional. Se puede afirmar, desde el punto de vista de la TAD, que todo problema didáctico es, hasta cierto punto, un problema de ecología praxeológica o, y precisamente, que la didáctica se preocupa con el estudio de la ecología institucional de las praxeologías matemáticas y didácticas. Por ello, es necesario considerar las restricciones y condiciones impuestas por las praxeologías en todos los niveles de co-determinación. Identificamos que estos componentes se adecuan a los niveles de la disciplina (dominio, sector, tema e asunto).

Según Balacheff (1987), prueba es una explicación planteada por una comunidad. Demostración es una prueba realizada por matemáticos respetando ciertos criterios rigurosos de reglas o axiomas.

## Metodología

Esta indagación sigue los procesos de los aportes de la TAD, que proponen determinar y analizar qué técnicas, tecnologías y teorías se aplican para realizar una determinada tarea, en el contexto de la geometría. Las soluciones se presentan considerando el desarrollo de la enseñanza del objeto matemático en contexto peruano Ello nos permitirá reconstruir una organización matemática, reconocer su tipo y analizarla con miras a plantear, más adelante, un modelo de referencia y una organización didáctica para la enseñanza de las demostraciones.

## Procesos

Se presenta un ejemplo (tarea) y se muestran cuatro formas de realizar demostraciones sobre la intersección de medianas de un triángulo. Asimismo, en el análisis se explicará cada una de las formas, las propiedades y contenidos matemáticos utilizados. Se finalizará con la esquematización de las comparaciones y articulaciones de las técnicas, tecnologías y teoría encontradas en las demostraciones.

## Análisis de los resultados

Para la tarea:

> Demostrar que el centro de gravedad o baricentro de un triángulo cualquiera es igual al punto de concurrencia de las medianas.

Para cumplir esta tarea, presentamos una primera forma de demostración haciendo uso de la geometría sintética, es decir, la geometría euclidiana que se ocupa del estudio de figuras planas (líneas rectas, círculos, triángulos, etc.).

| **Técnica** ($\tau_1$) | **Tecnología** ($\theta_1$) |
|---|---|
| Consideramos dos pasos para demostrar de que el baricentro de un triángulo *ABC* (denotado en adelante por $\Delta ABC$) concurre en un punto G: <br><br> Primero, se demuestra que el punto *G* divide a las medianas en una razón de 2 a 1. Para ello, en el $\Delta ABC$ trazamos la mediana desde el vértice A al punto medio N del lado *BC*, es decir, la mediana *AN* y del vértice *C* al punto medio *M* del lado *AB*, la mediana *CM*. Como estas dos medianas son dos segmentos no paralelos, se intersecan en un punto, denotemos por *G*. En efecto, si *M* es un punto medio de *AB*, entonces *AM* y *MB* tiene la misma medida, *m*. Si *N* es el punto medio del lado *BC*, implica que *BN* y *NC* tienen igual medida, *n*. <br> Al trazar el segmento *MN,* obtenemos un triángulo $\Delta MBN$. Considerando los triángulos $\Delta ABC$ y $\Delta MBN$, observamos que comparten el mismo ángulo $\measuredangle(ABC)$=$\measuredangle(MBN)$, también la razón $\frac{AB}{MB}=\frac{2m}{m}=2$ y $\frac{BC}{BN}=\frac{2n}{n}=2$. Por lo cual, el segmento *MN* es la mitad del lado *AC*, es decir, $AC=2MN$. Como satisface las condiciones del criterio de semejanza lado, ángulo, lado (LAL), entonces el triángulo $\Delta ABC$ es semejante al triángulo $\Delta MBN$. <br> Además, la medida del $\measuredangle(CAB)=\measuredangle(NMB)$ y $\measuredangle(ACB)=\measuredangle(MNB)$, tenemos que $MN \parallel AC$ y el segmento $MC$ corta a ambos segmentos, entonces por ángulos alternos internos $\measuredangle(CMN)=\measuredangle(MCA)=\varphi$ y $\measuredangle(MNA)=\measuredangle(CAN)=\delta$ y por opuestos por el vértice $\measuredangle(MGN)=\measuredangle(CGA)=\alpha$, lo que implica que $\Delta AGC\approx\Delta NGM$. La figura 2 muestra detalles. Es de notar que la | Concepto de punto medio <br><br> Semejanza de triángulos. <br><br><br><br><br><br><br><br> Teorema de Thales |

razón $\frac{MG}{GC} = \frac{GN}{AG} = \frac{MN}{CA}$, y como $AC = 2MN$, tenemos $\frac{MG}{GC} = \frac{GN}{AG} = \frac{MN}{2MN}$ ó $\frac{MG}{GC} = \frac{GN}{AG} = \frac{1}{2}$. Así, el punto *G* divide a cada mediana en una razón de 2 a 1.
Seguidamente, consideramos el teorema de Thales, para lo cual trazamos una línea que pasa por *B* y es paralela al lado *AC* y extendemos el segmento que pasa por *MN*. Como *AM* y *MB* guardan una razón de 1, al igual que *CN* y *NB*, por ser *M* y *N* puntos medios. Si la línea que pasa por el vértice *B*, la línea que pasa por *MN* y la línea que pasa por *AC* son paralelas, entonces la línea que pasa por *B* y *G* corta a la línea que pasa por *MN* en *H*, en una razón de 1; es decir, *BH* tiene la misma medida que *HP* ( la figura 3). Dicho de otro modo, *H* es punto medio de *BP*.

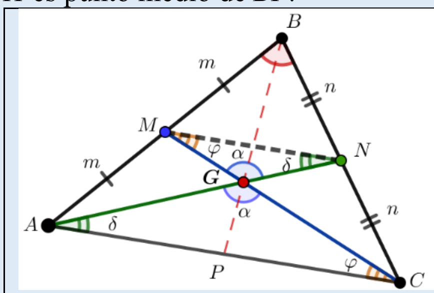



Figura 2. Semejanza de $\Delta AGC \approx \Delta NGM$.

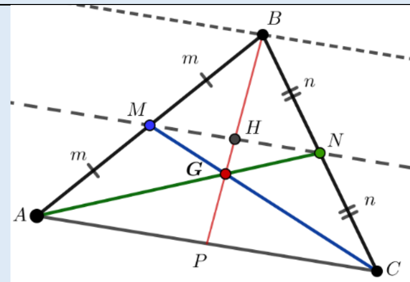



Figura 3. El punto *H* es un punto medio de *BP*.

Semejanza de triángulos

Trazando una línea que pasa por *G* y que sea paralela al lado *AC*. Como demostramos, *G* divide en razón de 2 a 1 al segmento *AN*, también a *CM* y, por tanto, también divide a *PH* en la misma razón. Es decir, *G* divide a *PB* en razón $\frac{4k}{2k} = \frac{2}{1}$ (ver figura 4).
Seguidamente, se demuestra G es el punto de concurrencia de las tres medianas, es decir, demostramos que *P* es un punto medio de *AC*. Para ello, trazamos el segmento que pasa por los puntos *N* y *P*. Como la medida del $\measuredangle(BGA) = \measuredangle(PGN) = \lambda$, por opuestos por el vértice. Además, los lados correspondientes están en razón de 2 a 1. Por el criterio de semejanza lado ángulo lado (LAL), tenemos que $\Delta AGB \approx \Delta NGP$. Así, *NP* es paralelo a *AB,* como se puede apreciar en al figura 5.
Por el punto *C,* trazamos una línea paralela al lado *AB*. Luego, trazamos la línea que pasa por el segmento *NP* y también la que pasa por *AB* y así podemos tener tres líneas paralelas a *AB* (figura 5).

Teorema de Thales

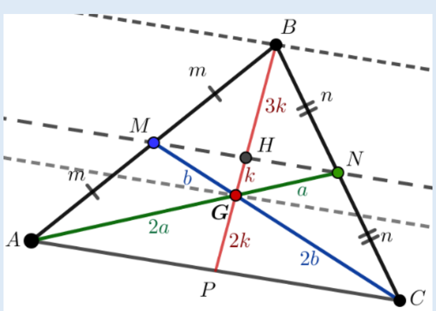
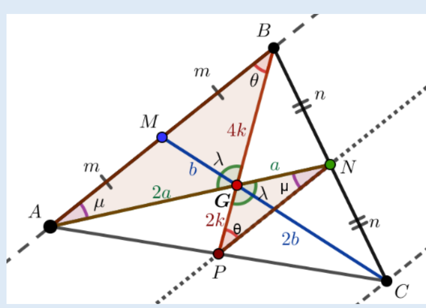
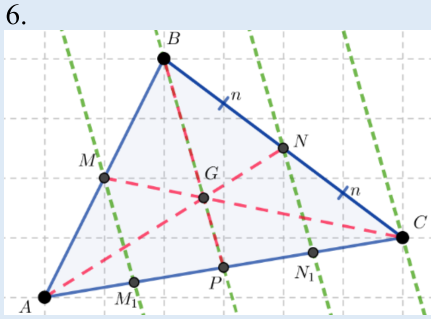



Figura 4. El punto *G* divide al segmento *PB* en razón 2 a 1.



| | |
|---|---|
| Figura 5. Semejanza de triángulos $\Delta AGB$ y $\Delta NGP$ y líneas paralelas a $AB$.<br>Por el teorema de Thales planteamos que si $BN$ y $NC$ están a razón de 1, entonces $AP$ y $PC$ también mantienen esa misma razón. Por consiguiente, $P$ es un punto medio de $AC$, lo que concluye la demostración de que $G$ es el punto donde las tres medianas se intersecan. | |

A continuación, la demostración será realizada por la geometría analítica. Nos estamos refiriendo a la geometría plana, en donde se utiliza un sistema de coordenadas cartesianas. En otras palabras, la Geometría de Euclides unida con el Álgebra y las figuras y cuerpos toman la forma de ecuaciones. Así, el baricentro deberá ser reescrito en términos de sus coordenadas cartesianas. Esto es:
Para todo triángulo, el baricentro (punto de intersección de las medianas) tiene como coordenadas: $G = \left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$.

| **Técnica** ($\tau_2$) | **Tecnología** ($\theta_1$) |
|---|---|
| Sea $\Delta ABC$ un triángulo donde $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, hallamos el punto medio de cada uno de los lados $AC$, $AB$ y $CB$. Usando la fórmula del punto medio, tenemos $P = \left(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}\right)$, $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$ y $N = \left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}\right)$ respectivamente.<br>En el plano cartesiano trazamos el triángulo ΔABC, sus tres medianas y líneas paralelas a una de las medianas; en este caso, consideramos las paralelas a la mediana $BP$. Una línea que pasa por el punto $N$, otra por $C$ y una línea que contiene a la mediana $BP$. Por el teorema de Thales se cumple que la razón $\frac{BN}{NC} = \frac{PN_1}{N_1C}$, pero $BN = NC = n$, entonces $1 = \frac{PN_1}{N_1C}$, lo que implica que $PN_1 = N_1C$. Es decir, $N_1$ es punto medio de $PC$. De modo similar, se demuestra que al intersecar la línea que pasa por $M$ y es paralela a $BP$, es el punto $M_1$. Los detalles se muestran en la figura 6.<br><br>Figura 6. El punto $N_1$ es un punto medio de PC.<br>Por el teorema de Thales tenemos que $\frac{MG}{GC} = \frac{M_1P}{PC}$, pero como $PN_1 = N_1C = M_1P = d$, entonces $\frac{MG}{GC} = \frac{d}{2d} = \frac{1}{2}$. Así, $GC$ y $MG$ están a razón de 2 a 1 o que $G$ divide al segmento $MC$ en razón 2 a 1. De modo análogo, se demuestra para las medianas $AN$ y $CM$. | Punto medio<br><br>Teorema de Thales<br><br>División de un segmento por una rzón dada |

A continuación, encontraremos las coordenadas del punto $G$. Consideramos la fórmula para hallar un punto de acuerdo a una razón $r$ dada. Así, tenemos

$$x_G = \left(\frac{x_A + r x_N}{1 + r}\right); \qquad y_G = \left(\frac{y_A + r y_N}{1 + r}\right),$$

y como $r = \frac{AG}{GN} = 2$, reemplazando obtenemos $x_G = \left(\frac{x_A + 2\left(\frac{x_B + x_C}{2}\right)}{1+2}\right) = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}\right)$, $y_G = \left(\frac{y_A + 2\left(\frac{y_B + y_C}{2}\right)}{1+2}\right) = \left(\frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

La siguiente demostración será realizada en la geometría vectorial, es decir, en la geometría que se ocupa del estudio de vectores (definido por una dirección, sentido y una longitud). La introducción de esta herramienta matemática hace posible, en particular, controlar la alineación de los puntos, el paralelismo o la perpendicularidad de las líneas, determinar las coordenadas de puntos particulares, de la distancia entre dos puntos, calcular ángulos, realizar operaciones algebraicas.

<table>
<tr><th>Técnica ($\tau_3$)</th><th>Tecnología ($\theta_2$)</th></tr>
<tr><td>

Demostraremos que el punto G, punto de intersección de las medianas, está a $\frac{2}{3}$ de cada vértice.

Dado un triángulo $\Delta ABC$ donde podemos representar los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Sea $G$ el punto de concurrencia de las medianas del triángulo $\Delta ABC$. El vetor $\overrightarrow{CM}$ representa la mediana que corresponde al lado $AB$ y el vector $\overrightarrow{BP}$ corresponde a la mediana del lado $AC$. Entonces, tenemos $\overrightarrow{CG} = t\overrightarrow{CM}$, con $t \in \mathbb{R}$ y $t < 1$. El vector $\overrightarrow{GP} = s\overrightarrow{BP}$, con $s \in \mathbb{R}$. Los detalles podemos ver en la figura 7.

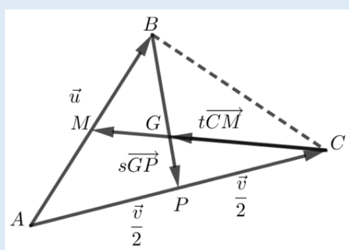



Figura 7. Vectores en el $\Delta PCG$.

Si $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}$ y $\overrightarrow{CG} = t\overrightarrow{CM} = t\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}\right)$, entonces los vectores en el $\Delta PCG$, por la relación de Chasles podemos escribir como $\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$

$t\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}\right) + s\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$,

$t\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}\right) + s\left(\frac{1}{2}\vec{v} - \vec{u}\right) = -\frac{1}{2}\vec{v}$,

$\left(\frac{1}{2}t - s\right)\vec{u} + \left(\frac{1}{2}s - t\right)\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{v}$.

Lo que implica que $\frac{1}{2}t - s = 0$ y $\frac{1}{2}s - t = -\frac{1}{2}$ de donde: $t = \frac{2}{3}$ y $s = \frac{1}{3}$. De la misma manera, se procede para la otra mediana, demostrando que las medianas concurren a $\frac{2}{3}$ del vértice de donde inicia.

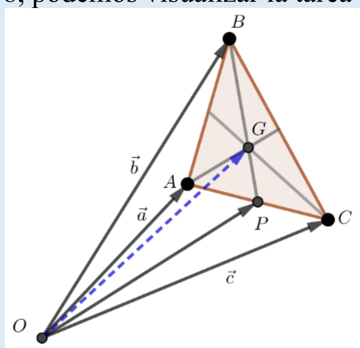
</td><td>

Punto medio

Propiedades de vectores

</td></tr>
</table>

La siguiente demostración será realizada en la geometría vectorial con coordenadas, la cual es una geometría analítica que utiliza como lenguaje matemático de expresión los vectores, un campo de direcciones que satisfacen un algebra definida. Estudia las propiedades de los objetos en el plano y en el espacio.

<table>
<tr><th>Técnica ($\tau_4$)</th><th>Tecnología ($\theta_2$)</th></tr>
<tr><td>
Se demostrará que el baricentro del triángulo es igual al punto de concurrencia de las medianas y esto corresponde a un vector, de referencia externa O, que es igual al promedio de los tres vectores de los vértices del triángulo. Considerando la figura 8, podemos visualizar la tarea a resolver.<br>
<br>
<br>
Figura 8. Vector baricentro de un triángulo.<br><br>
Los vectores $\vec{a}, \vec{b}$, y $\vec{c}$ ubican a los vértices del triángulo, P es el punto medio de AC, el punto G es el baricentro del triángulo. Por la demostración (forma 3), tenemos que el segmento BG esta a $\frac{2}{3}$ de la mediana BP. Por otro lado, el segmento GP es $\frac{1}{3}$ de la misma mediana. Entonces, presenta las siguientes ecuaciones $\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$.<br><br>
Y para determinar el vector que ubica el punto G consideramos lo siguiente: la notación de punto ponderado como la dupla (vector, razones de proporción respecto al baricentro) y para el baricentro entre dos puntos la propiedad : Si $\overrightarrow{OP} = (x_P, y_P)$, $\vec{b} = (x_{\overline{OB}}, y_{\overline{OB}})$ y G es el baricentro de los puntos ponderados $(\overrightarrow{OP}, r_1)$ y $(\vec{b}, r_2)$ entonces: $\overrightarrow{OG} = \frac{r_1\overrightarrow{OP}+r_2\vec{b}}{r_1+r_2}$, donde $r_2 = \frac{2}{3}$ y $r_2 = \frac{1}{3}$ son las razones con respecto al baricentro (Touré, Akele, Baye, Bendiman, Conde, Djiguiba, Don, Neulat, Traoré, 1997). Por lo tanto, tenemos:<br>
$$\overrightarrow{OG} = \frac{\frac{2}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\vec{b}}{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)\vec{b} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$
</td><td>
Punto medio<br><br>División de un segmento por una razón dada<br><br>Propiedades de vectores
</td></tr>
</table>

Desde la perspectiva de la TAD, podemos identificar las cuatro técnicas usadas. Inicialmente, cada técnica parte de conceptos de punto medio de la geometría. Para demostrar que el punto G divide al segmento en una razón de 1 a 2, se aplica semejanza de tríangulos y luego teorema de Thales, en la Geometría Sintética. Después, se demuestra que el punto G es donde coincide la intersección de las medianas. Luego, para la Geometría Analítica, se determina cada coordenada del baricentro, usando la división de un segmento por una razón dada. Mientras que para abordar desde Geometría con vectores, se utiliza propiedades de las operaciones con vectores y finalmente, para considerar las coordenadas hay que hacer uso de la referencia del un punto, en este caso del origen O. Así, se logra determinar las coordenadas de baricentro.

Analizando los procesos (técnicas) seguidos para demostrar, podemos resaltar los teoremas y propiedades utilizadas en el esquema mostrado en la figura 9.

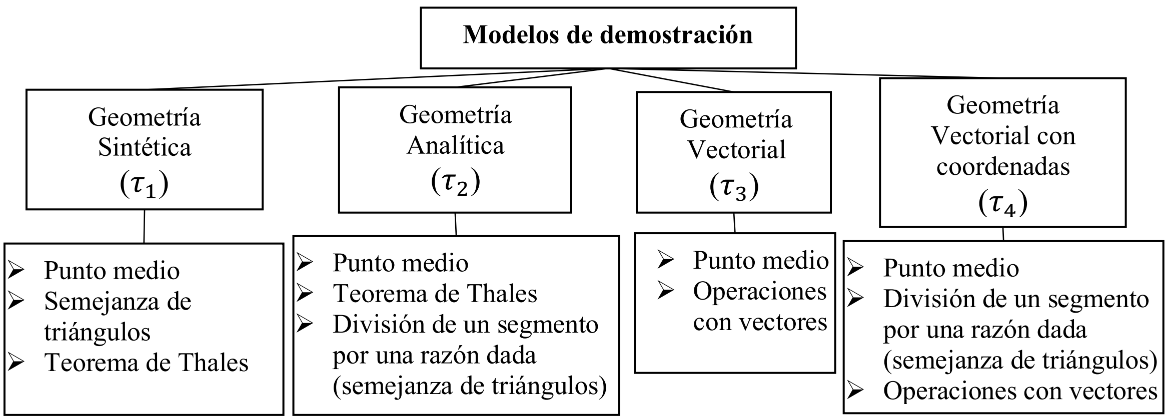



***Figura 9.*** Técnicas para dar solución a la tarea.

Por lo tanto, podemos identificar dos tecnologías para la demostración y son trabajar sin vectores o con vectores, como se muestra en la figura 10.

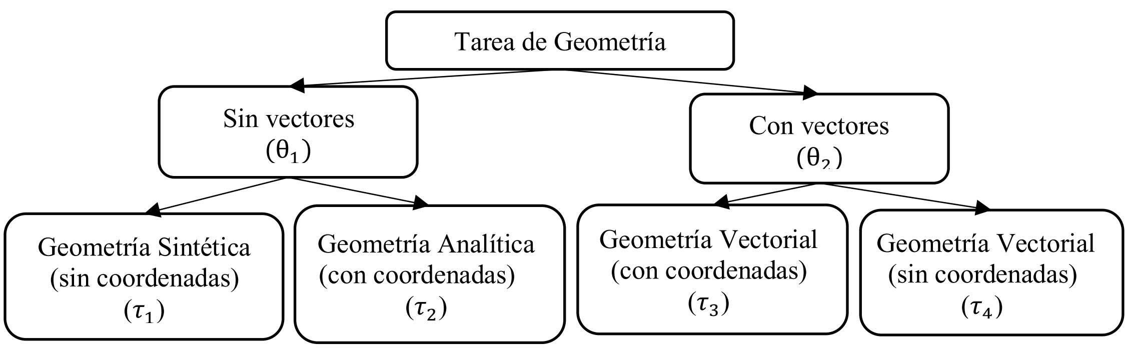



***Figura 10.*** Tecnologías que justifican las técnicas para la resolución de la tarea.

## Conclusiones

En la tarea presentada podemos ver que la solución esperada es la realizada mediante el uso de propiedades de vectores, pero podemos encontrar otras soluciones para el objeto matemático estudiado, baricentro. Entonces la tarea es demostrada a través de cuatro técnicas. Es decir, las demostraciones que fueron realizadas sin vectores (en geometría sintética y vectorial) y con vectores (en geometría analítica y vectorial) y sus respectivas propiedades (tecnologías).

De las soluciones realizadas, podemos inferir que fue posible articular las geometrías, debido a que presentan propiedades en común como el punto medio, teorema de Thales, semejanza de triángulos y división de un segmanto por una razón dada, donde al llegar a demostrar con vectores cuenta con una tecnología que reúne propiedades tanto geométricas como algebraicas que facilitaron las demostraciones.

La dimensión ecológica se manifiesta en las relaciones de personas (profesores /estudiantes) con el objeto matemático baricentro, que es enseñado tanto en la Educación Primaria y Secundaria peruana (Programa curricular de Educación Primaria y Secundaria, 2018) así como en el nivel universitario (Sumilla de Algebra Matricial y Geometría Analítica, 2018). Luego de un análisis de dichos programas y sumilla se muestra en el siguiente esquema, que podemos apreciar en la figura 11, que el objeto matemático está presente y es estudiado por los alumnos.

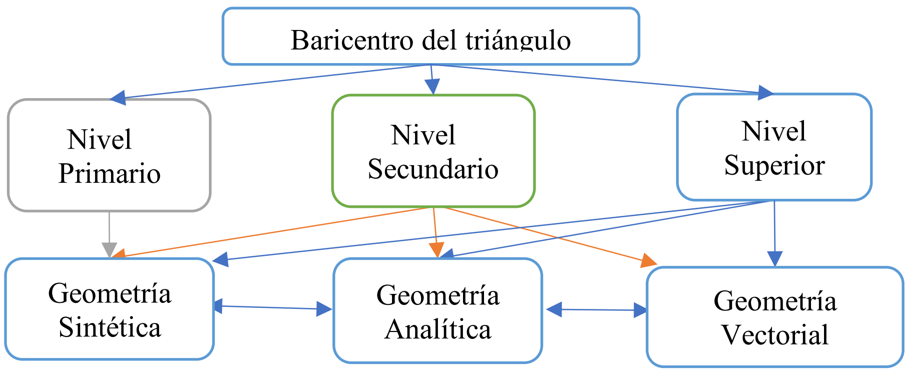



***Figura 11.*** Esquema del objeto matemático baricentro del triángulo

En el nivel primario, se estudia el baricentro con propiedades de la geometría sintética sin demostración. En los últimos años del nivel secundario, se estudia la geometría sintética con algunas demostraciones, pero rara vez del baricentro. Si bien se estudia propiedades como el baricentro en geometría analítica, esto se hace sin demostración. En el nivel superior, es más frecuente realizar las demostraciones del baricentro en los cursos de geometría analítica y vectorial, lo que representa serias dificultades para los estudiantes.

A partir del análisis de las soluciones de la tarea se observa que se resuelve de varias maneras con técnicas ya conocidas por los alumnos. Además, que no hay la necesidad de ampliar las técnicas conocidas ni implementar nuevas teorías y tecnologías para este problema en particular, ya que no es pertinente.

El análisis praxeológico permite ver la no pertinencia de la tarea para este tema en particular, pero, al ver las diversas técnicas, se observa que es mucho más eficiente la solución desde el punto de vista vectorial que la del punto de vista de la geometría sintética y la del punto de vista de la geometría analítica. Por lo tanto, este problema no es pertinente en la introducción o como una motivación en la enseñanza de vectores, pero si va a ser pertinente para mostrar la eficiencia del uso de los vectores en la solución de tareas.

## Referencias bibliográficas

Almouloud, S., Regnier, J. y Silva, C. (2009). Resolver problemas envolvendo Prova e demonstração: Uma dificuldade para professores de ensino básico. *Proceedings of the* 1$^{rst}$ *International Congress of Mathematics, Engineering and Society* - ICMES 2009 Curitiba, Brazil.

Arenzana, V. (1997). El lenguaje vectorial en geometría. Los pioneros William Rowan Hamilton y Hermann Günther Grassmann. *Revista Suma 25*, 61-70.

Balacheff, N. (1987). Processus de prevuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.

Bosch, M. y Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-124.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique, en Actes de l'U. E. de la Rochelle: Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, pp. 91-119.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(2), 203-231.

Ministerio de Educación. Programa curricular de Educación Primaria, (2018). Recuperado de: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-primaria.pdf

Ministerio de Educación. Programa curricular de Educación Secundaria. (2018). Recuperado: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf

Sumilla de Algebra Matricial y Geometría Analítica (2018). Recuperado el 30 de marzo de 2019 de http://facultad.pucp.edu.pe/generales-ciencias/informacion-para-el-estudiante/sumillas/

Touré, S., Akele, C., Baye, B., Bendiman, K., Conde, K., Djiguiba, O., Don, A., Neulat, J., Traoré, T. (1997). *Collectión Inter Africaine de Mathematique*. 1erSM_Mathematiques. Paris, Francia. EDICEF.