

EL DIÁLOGO EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

THE DIALOGUE IN THE LEARNING OF THE CONCEPT OF FUNCTION

Yuri Carolina Niño Castillo

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia – UPTC (Colombia)

yuricarolina.nino@uptc.edu.co

Resumen

Durante el desarrollo de algunos cursos de Cálculo en el nivel universitario, se observó dificultad al abordar la temática de funciones, y al reflexionar sobre la práctica docente se reconoció que la dinámica de la clase no permitía al estudiante indagar y explorar para dar solución a determinadas situaciones, por lo que la finalidad de la investigación fue caracterizar el aprendizaje de los estudiantes a través del modelado matemático en escenarios exploratorio-investigativos del concepto de función, y para lograrlo se realizó un estudio de caso con un grupo conformado por cuatro estudiantes. Los instrumentos usados para recolectar la información fueron las grabaciones en audio y la observación; y en esta ocasión se muestran los resultados de una de las categorías de análisis, la cual se concentró en los actos dialógicos que se evidenciaron al desarrollar las actividades y su relación con las interpretaciones de la función, que se reflejan en las representaciones de la misma. Así, se pudo reconocer que el diálogo como proceso de interacción social, puede influir positivamente en el aprendizaje de las matemáticas.

Palabras clave: aprendizaje dialógico, función, representaciones de la función

Abstract

During the development of calculus courses at the University, a difficulty to approach function topics was observed. When reflecting on teaching practice, it was recognized that the class dynamics did not allow the student to examine and explore solutions to given situations. So, this study was aimed at characterizing students' learning through the mathematical modeling in research-exploring scenarios of the concept of function. A case study was carried out with a group of four students. Recordings and observation were the tools used to collect data. This paper shows the results of one of the categories of the analysis which was focused on dialogic acts that were evidenced when developing activities and their relationship with the interpretations of the function, reflected in its representations. So, it was possible to recognize that the dialogue, as a social interaction process, can influence positively on mathematics learning.

Keywords: dialogic learning, function, representations of the function

■ Introducción

Con el paso del tiempo las necesidades de la sociedad van cambiando, lo cual repercute de manera directa en la educación, que debe adaptarse a estos cambios con el fin de fortalecer las habilidades de los estudiantes en diferentes ámbitos y canalizar sus intereses positivamente. En este proceso de cambio es normal encontrarse en ocasiones con ciertas dificultades, por lo que se hace necesaria la búsqueda de herramientas que permitan superarlas; en el caso específico de la docencia, es muy difícil eliminar los obstáculos que se presentan, por el contrario, lo que se busca es “modificar la estructura y las funciones de los dispositivos didácticos existentes” (Gascón, 1997, p. 21).

Por otro lado, la necesidad de cambiar implica redefinir o asumir una nueva perspectiva para entender la enseñanza y el aprendizaje como dos procesos que tienen puntos en común, pero que aun así pueden llegar a refractarse tomando direcciones distintas. En acuerdo con Riscanevo (2017) y Wenger (2001), se reconoce que el proceso de enseñanza no se fundamenta en la transmisión y transferencia de conocimiento ya existente, y que el proceso de aprendizaje no implica únicamente procesos individuales de internalización de dicho conocimiento, sino que enseñanza y aprendizaje son procesos sociales dinámicos que implican participación de profesores y estudiantes en actividades culturalmente contextualizadas.

De esta manera, reconociendo el poco protagonismo que se le estaba dando al trabajo en equipo, enfocado a desarrollar y fortalecer procesos de interacción social que podrían favorecer el aprendizaje de las matemáticas; dentro de la teoría de la Educación Matemática Crítica se encontraron propuestas para plantear actividades que permitan dar un rumbo distinto a las clases, evadiendo la dinámica tradicional (Skovmose, 2000); así que la investigación se llevó a cabo a partir de la implementación de actividades denominadas escenarios exploratorio-investigativos, fijándose el objetivo de caracterizar el aprendizaje de los estudiantes a través del modelado matemático en escenarios exploratorio-investigativos del concepto de función.

En cuanto al aprendizaje del concepto de función, es de tener en cuenta que por lo general su limitada comprensión puede deberse a que la manipulación que se hace de éste, solo se remite al aspecto algebraico (Hitt, 2003); además, los métodos de enseñanza en matemáticas se han basado desde hace tiempo en la matemática formal, la memoria y la algoritmia (Cantoral, 2001), y no se considera pertinente abordar el concepto de esta manera, ya que puede generar apatía, aprendizaje sin comprensión y altos índices de reprobación (Salinas & Alanís, 2009). Por otra parte, estas dinámicas de clase tradicional pueden llegar a reproducir desigualdades sociales como la sumisión o dominación, invitando al estudiante únicamente a replicar los procedimientos llevados a cabo por el docente (Skovmose, 2000).

■ Elementos teóricos

Evidenciando que la educación matemática silenciaba y suprimía a las personas, a raíz de que el docente asumía una actitud autoritaria que lograba controlar y aplacar a los estudiantes, el danés Ole Skovmose se ha propuesto generar cambios a través de su labor docente, evitando que dicha autoridad se convierta en represión, por lo que sugiere que se debe relacionar la matemática con aspectos de índole social, que le permitan al estudiantado asumir una actitud crítica frente a dichos aspectos (Skovmose, 1999).

Como componente de una educación matemática que brinde libertad a los estudiantes, se proponen entonces actividades que los motiven a indagar e investigar, y les concedan autonomía para decidir hasta dónde quieren llegar con sus aprendizajes. Skovmose (2000) se refiere a este tipo de actividades como ambientes de aprendizaje, los cuales se mueven entre el denominado paradigma del ejercicio y entre un paradigma investigativo; en el primero lo que se busca es que el estudiante replique los procedimientos que usa el docente, basándose en la existencia de una única respuesta; mientras que en el segundo se pretende dar más protagonismo a la investigación, eligiendo libremente el camino para llegar a la solución de determinada situación.

Partiendo del hecho de que las actividades con un carácter plenamente investigativo pueden llevar un tiempo considerable, impredecible en la mayoría de los casos, que posiblemente haga perder el interés de los estudiantes (Ponte, 2004); se proponen actividades que tengan una duración promedio, de modo que se abordan sin encasillar los caminos de solución, tampoco se consideran exclusivamente investigativas, sino que tienen en cuenta la exploración y la indagación; la primera asumida como una actividad experimental que tiene un carácter investigativo (Camargo, 2010), es decir, en esta el estudiante aplica conocimientos previos, identifica aspectos que desconoce y pone a prueba sus puntos de vista; y a través de la segunda, él busca explicaciones, aclara sus dudas, relaciona lo que ya sabía con lo que ha podido aprender, e identifica la manera en la que puede aplicar todo esto a la situación planteada (Skovmose, 2000), por lo que se denominaron escenarios exploratorio-investigativos, tomando en consideración que en matemáticas se pueden trabajar tareas de exploración (Ponte, 2004) y escenarios de investigación (Skovmose, 2000).

Es de tener en cuenta que a través de este tipo de actividades se puede fomentar el diálogo y el trabajo en equipo, lo cual le daría una orientación diferente al aprendizaje de las matemáticas; Alro y Skovmose (2012) consideran que el aprendizaje dialógico yendo de la mano con la indagación y reflexión, es un elemento importante para el aprendizaje crítico de las matemáticas; estos autores hacen referencia a un aprendizaje dialógico cuando en un proceso de enseñanza y aprendizaje se incluye una variedad de actos dialógicos, los cuales se enuncian en un orden específico, sin embargo, no quiere decir que se observen conservando dicho orden; la jerarquía que se tiene en cuenta para enunciarlos es: entrar en contacto, localizar, identificar, defender, pensar en voz alta, reformular, controvertir y evaluar. A continuación, se describe en qué consiste cada acto dialógico de acuerdo con los autores mencionados.

Entrar en contacto hace referencia a estar presente y consciente a lo largo de la conversación, poniéndose a tono con el otro, este contacto puede perderse cuando no logran captarse realmente las ideas propuestas por el otro. Así mismo, el docente y los estudiantes pueden localizar nuevas perspectivas, que quizá están latentes, pero no han emergido en la conversación, esto lo pueden lograr explorando diferentes posibilidades. También a lo largo del diálogo se pueden identificar ideas matemáticas, prioridades y perspectivas globales, cuando se dan explicaciones más profundas.

En cuanto al acto dialógico de defender, no precisamente hace alusión al hecho de tratar de convencer a los otros de la propia opinión, sino que se refiere a examinar las perspectivas personales, determinar hasta dónde puede encontrar apoyo a través de buenas razones y así mismo, ser objetivo frente a las propuestas de los demás, y si es el caso, argumentar a favor de éstas. De hecho, pensar en voz alta hace alusión a expresar con total libertad los pensamientos, ideas y emociones, que pueden surgir a lo largo del proceso de indagación, esto teniendo en cuenta la igualdad que se debe mantener en el diálogo, además que no sólo se da de manera verbal, ya que puede vincularse el lenguaje corporal, señalando, por ejemplo, una expresión algebraica, indicando acuerdo o desacuerdo con esta.

Respecto a reformular, esto se evidencia cuando se repite lo que se ha dicho, pero en un tono de voz distinto o adicionando algo, y no solo se da cuando alguien reformula sus propias ideas, sino que también comprende lo que el otro plantea y lo complementa. Controvertir se refiere al cuestionamiento que puede surgir respecto a supuestos que ya han sido aceptados, por lo que se debe efectuar de manera prudente y cautelosa, ya que si se hace de manera muy directa puede contribuir para que el proceso de indagación se detenga; este acto dialógico puede ayudar a percibir otras posibilidades que esperan ser localizadas. Así pues, cuando se corrige, critica o confirma, se está realizando una evaluación.

Es de tener en cuenta que en el aprendizaje dialógico no es estrictamente necesario que se den absolutamente todos los actos dialógicos mencionados anteriormente, sino que éste se da cuando los procesos de enseñanza y aprendizaje incluyen “una rica variedad de actos dialógicos”, además el orden en el que se explican no es el mismo orden en el que se presentan a lo largo de una actividad (Alro y Skovmose, 2012, p. 168).

Por otro lado, se considera que quien aprende es un ser social que participa activamente en el proceso de interacción con los otros (Andrew, 2010), y precisamente el lenguaje se considera un medio de interacción social (Vygotsky, 1978); además, el intercambio de ideas o interpretaciones es un elemento esencial para las posibilidades de aprendizaje de cada persona (Valero, 2006). De esta manera, teniendo en cuenta que el diálogo puede influir en el aprendizaje de las matemáticas, y que en este caso se habla específicamente del aprendizaje del concepto de función, a continuación, se exponen algunos aspectos referentes al mismo.

En relación a su evolución histórica, diferentes autores muestran que antes de que se formalizara el concepto ya se usaban diversas representaciones de la función de acuerdo a las necesidades que surgían (véase, por ejemplo, Font, 2011; Hitt, 2002; Riscanevo, Cristancho & Fonseca, 2011), por lo que podría decirse que este ha adquirido importancia a lo largo de los años por los ámbitos en los que se ha reconocido, y que ha evolucionado bajo la influencia de las necesidades y avances de la humanidad, así que con el paso del tiempo se vio representado de distintas maneras.

Actualmente se reconocen cuatro maneras de representar una función, como son: la expresión verbal, con la que textualmente se describe la situación que se está representando; la algebraica, en la que se usan variables para denotar las diferentes cantidades que intervienen en la situación planteada; la tabla de valores, que proporciona una visión cuantitativa de la situación, sin embargo, no permite extraer características globales de la función; y la gráfica que le corresponde a esta, la cual se considera un excelente instrumento para poner de relieve características de la dependencia entre las variables (Azcárate & Deulofeu, 1996).

Cabe la posibilidad de que un tipo de representación se considere más adecuada que las otras (Ugalde, 2014), probablemente porque cada una está diseñada para destacar ciertas características de la función; sin embargo, no es favorable para el aprendizaje de los estudiantes darle prioridad, por ejemplo, a la representación algebraica sin transitar a las otras, ya que no es suficiente contar con varias representaciones si no se cuenta con la habilidad de pasar de una a otra cuando sea necesario (Acosta, 2005).

Del mismo modo, la función puede interpretarse de varias maneras, por ejemplo, puede verse como una ley de correspondencia entre valores de variables o entre elementos de dos conjuntos (Azcárate & Deulofeu, 1996), sin embargo, Posada y Villa (2006) mencionan que si la función se ve sólo como una regla de correspondencia, deja de verse como un objeto matemático que se relaciona con la variación y el cambio, así que la idea más general con la que se trabaja, se basa en que la función es una dependencia entre magnitudes que son susceptibles de cambio (Font, 2011), en otras palabras, se asume como “una ley que regula la dependencia entre cantidades u objetos variables” (p.17).

De esta manera, podría considerarse que las situaciones que permitan al estudiante acercarse al concepto de función, se pueden abordar desde los escenarios exploratorio-investigativos, que sugieren a los estudiantes indagar y explorar para reconocer las variables que intervienen en cada situación, fortaleciendo a su vez el diálogo y el debate de una manera democrática, conservando la igualdad (Skovmose, 2000).

■ Aspectos metodológicos

La investigación se considera de tipo cualitativo, ya que se buscaba determinar la contribución de los escenarios exploratorio-investigativos en el aprendizaje del concepto de función, tomando como elemento determinante en este proceso los diálogos de los estudiantes, además de la manera en que sus planteamientos se modificaban en el desarrollo de las actividades propuestas y el modo en el que interactuaban entre sí; y precisamente el tipo de investigación mencionado centra su interés en la comprensión de los fenómenos basándose en la perspectiva y experiencia de los participantes; así mismo, este tipo de estudios se concentran en examinar los puntos de vista,

interpretaciones y significados que los involucrados le otorgan al fenómeno (Hernández, Fernández & Baptista, 2014).

Por otro lado, teniendo en cuenta que, a diferencia de los estudios cuantitativos, los cualitativos se aplican a un número reducido de casos que permitan trabajar hasta comprender el fenómeno y responder al planteamiento del problema (Hernández *et al*, 2014); se realizó un estudio de caso con un grupo conformado por cuatro estudiantes de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, en el desarrollo de la asignatura denominada Matemática Aplicada a la Informática.

En cuanto a las actividades implementadas, fueron tres, cada una con un tema diferente, y en la tercera actividad los estudiantes debían elegir el ámbito en el que se recolectarían los datos para analizar su comportamiento y reconocer la utilidad de las matemáticas en dicho ámbito. A continuación, la primera y segunda actividad:

Primera actividad: Representar un rectángulo con un perímetro de 24 centímetros y calcular su área. Responder las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Cuántos rectángulos con perímetro de 24 centímetros pueden construirse?
- ✓ ¿Existe relación entre las dimensiones de los rectángulos y su respectiva área? ¿De qué manera(s) se podría representar dicha relación?
- ✓ ¿Cuál es el rectángulo de mayor área que se puede construir?
- ✓ ¿Será posible determinar una manera que permita hallar el área de cualquiera de los rectángulos conociendo la medida de uno de sus lados? ¿Si, no, por qué?

Segunda actividad: Tome una hoja de papel de forma rectangular y recortando cuadrados en sus esquinas construya una caja sin tapa. Responder las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Cuál es el volumen de la caja?
- ✓ ¿Utilizando el mismo tamaño de la hoja de papel se podrán construir cajas con diferente volumen? ¿Cómo se podría calcular el volumen de cualquiera de esas cajas?
- ✓ ¿Con hojas de diferente tamaño se podrán construir cajas de igual volumen? Compare sus respuestas con dos de sus compañeros.

Del mismo modo, los instrumentos usados para recolectar la información fueron las grabaciones en audio y la observación, además, cada actividad comprendió varias etapas, por lo que las grabaciones se obtuvieron de manera independiente para cada una de éstas, y las respectivas transcripciones, que se realizaron teniendo en cuenta las indicaciones de Tusón (2002), se enumeraron de la misma manera.

Respecto al estudio de la información, se tuvieron en cuenta tres categorías de análisis, la primera buscaba reconocer el papel de la modelación matemática en el aprendizaje del concepto de función, la segunda caracterizar actividades exploratorio-investigativas del concepto de función como situaciones de enseñanza, y la última determinar la contribución de los escenarios exploratorio-investigativos como metodología de enseñanza en el aprendizaje del concepto de función.

Teniendo en cuenta que en esta ocasión se presentarán los resultados de la tercera categoría de análisis, cabe aclarar que esta tuvo en cuenta el aprendizaje a partir del diálogo y la relación con las diferentes representaciones de la función, así como la manera en la que se estaba interpretando. Así mismo, los escenarios exploratorio-investigativos se implementaron a través de la modelación matemática, sin embargo, en relación con la categoría mencionada, solo se tomaron los elementos teóricos pertinentes.

■ Resultados

En el primer escenario exploratorio-investigativo se dieron diferentes actos dialógicos como entrar en contacto, localizar, identificar, controvertir, defender y reformular. Por un lado, al abordar la actividad los integrantes del grupo establecen contacto al construir la representación de un rectángulo con 24cm de perímetro, en el siguiente aparte de la transcripción se evidencia en las líneas 7, 8 y 9, ya que los estudiantes mencionan al tiempo los valores de las dimensiones del rectángulo, lo cual indica que reconocen la idea que plantea el compañero, están en sintonía con él:

1. Camilo- *no por eso, yo =pensaría que acá los 24=*
2. Marcela- *=23 y aca uno=...*
3. Camilo- *coger los 24 cm, los dividimos en 4 ¿sí?, sería de a 12 ¿cierto? Digo...5 de a 6, 6 cm cada lado, cojo esos 6 cm y 2 de esos, como tenemos 4 y 6 cm, dos le añadimos 1 y le quitamos 1 a los otros, ¿si me entiende? O sea quedarían dos de 5 y los otros de 7, y ahí tendríamos los 4 lados, y sumando esto nos da 24*
4. Karol - *o sea...*
5. Camilo - *ese sería uno*
6. Karol - *si*
7. Camilo - *porque así tendríamos este aquí así, de 5, =5, 7 y 7=, ese sería uno y ahí podríamos empezar a jugar*
8. Karol - *= 5, 7 y 7=*
9. Marcela - *=7 y 7= mmm a si*

(Transcripción de grabación en audio N° 1, 2018)

Más adelante los estudiantes identifican que hay infinitas posibilidades para construir rectángulos que tengan 24cm de perímetro; sin embargo, cabe mencionar que, en el siguiente aparte de la respectiva transcripción, se reconocieron simultáneamente otros actos dialógicos

25. Karol - *ya habrían 3 opciones*
26. Camilo - *y el de 2 ya sería el de 10*
27. Marcela - *ujummmm si*
28. Camilo - *creo que no podemos más*
29. Marcela - *¿por qué no?...ese se...*
30. Camilo - *¿porque cual más?*
31. Marcela - *el máximo digámoslo por así decirlo =sería este=*
32. Camilo - *=el mínimo=*
33. Marcela - *sí, pero igual uno puede ponerle menos de uno... de uno... =¿no dijo usted que en decima...?, ay nooo=*
34. Camilo - *= ¿menos 1 cm? =*
35. Marcela - *debajo del uno quien va, =decimales=, sii*
36. Karol - *= ¿con decimales? =*

(Transcripción de grabación en audio N° 1, 2018)

Los estudiantes se encuentran en el proceso de determinar cuántos rectángulos de 24cm de perímetro se pueden construir, lo que los lleva a identificar que las dimensiones de éste pueden tomar valores decimales, así que aumentan las opciones. Así mismo, en la línea 29 de la transcripción anterior, la estudiante cuestiona lo que su compañero afirma en la línea 28, acerca de no tener más opciones, lo cual tiene que ver con el acto dialógico de

controvertir, y el hecho de que él le responda preguntando qué otras opciones tendrían, conlleva a que la estudiante en las líneas inmediatamente siguientes, defienda la idea de usar decimales para las dimensiones de los rectángulos.

Como derivado de esta situación, más adelante dicha idea aflora nuevamente, pero en este caso *Camilo* es objetivo y apoya a *Marcela* en la defensa de su propuesta, lo cual también se contempla en el acto dialógico de defender, ya que no solo se trata de argumentar los propios supuestos, sino que también se da cuando se pone de por medio la objetividad para dar argumentos a favor de las ideas de los otros, lo mencionado se evidencia en el siguiente aparte:

- 136. *Marcela* - aja, y ya decimales si tomamos en cuenta que el ancho y el largo tiene que ser mayor a cero, y se debe cumplir que la suma de los lados sea 24, o sea que el perímetro sea igual a 24cm, serían como dos formas de ver la...
- 137. *Camilo* - si porque es que si los vamos a tomar decimales, entonces podemos tomar desde uno sobre 999999, o sea, hay una infinidad
- 138. *Marcela* - hay infinidad de combinaciones
- 139. *Camilo* - sí, exacto

(Transcripción de la grabación en audio N° 1, 2018)

Luego de este proceso en el que se determina que hay infinitas posibilidades para construir rectángulos con 24cm de perímetro, se encuentra una relación entre las dimensiones de cada figura y su respectiva área; en este caso surge el acto dialógico de reformular, ya que la estudiante *Karol* toma los indicios que le proporciona su compañera *Marcela* y los complementa; además, se evidencia que la función se está interpretando como una dependencia entre variables y la manera de representar los datos se podría asociar con la representación tabular de ésta (Figura 1), tomando en cada fila las dimensiones de cada rectángulo y su respectiva área, indicando la dependencia entre éstas:

- 48. *Marcela* - cuando el ancho, la diferencia entre el ancho y el largo es =me...=
- 49. *Karol* - =menor, mayor es su...=
- 50. *Marcela* - =mayor=
- 51. *Camilo* - aaa ya le ... si si
- 52. *Karol* - mayor es su...mayor es su área?, no

(Transcripción de grabación en audio N° 2, 2018)

a	l	Diferencia	Area
11	1	10	11
10	2	8	20
9	3	6	27
8	4	4	32
7	5	2	35

Figura 1. Relación entre los datos

Durante el desarrollo del segundo escenario exploratorio-investigativo también se dio una variedad de actos dialógicos; por ejemplo, se localizó la idea que se podían construir infinitas cajas a partir de hojas del mismo tamaño, y lo que principalmente varía como cantidad independiente es el lado de los cuadrados que se recortan en las esquinas de dichas hojas, lo cual conlleva a que los estudiantes inicialmente identifiquen parcialmente cómo representar este hecho, usando la variable “x”:

17. Marcela – o sea, sería como dibujar el, digamos la hoja rectangular, hacer las medidas y de acuerdo ahí... =o sea=
18. Camilo - = y a los cuadrados= colocar, nombrarlo “x” más bien [lado del cuadrado]
19. Marcela – sí
20. Camilo – porque es una variable

(Transcripción de grabación en audio N° 6, 2018)

Por otro lado, se destaca principalmente que en esta actividad surgió por primera vez el acto dialógico de evaluar, a través del cual se valora lo que se ha hecho, lo que permite reconocer falencias y así tener la oportunidad de corregirlas. En las siguientes líneas se evidencia cómo los estudiantes identificaron una falla que habían tenido en los valores que tomaron para hallar el volumen de la caja:

34. Camilo – nosotros estamos haciendo mal las medidas
35. Marcela – ¿por qué?
36. Karol – =no, más bien varía es el ancho y el...=
37. Camilo – =porque si tomamos la medida de acá = listo, 17 centímetros, está bien, y este son 10 centímetros, 11 centímetros
38. Karol – es que la altura
39. Camilo – estamos tomando mal las medidas, porque nosotros lo tomamos de una vez completa la hoja
40. Marcela – es que...
41. Camilo – las dimensiones de la hoja
42. Marcela – ah sí, o sea el anterior nos quedó, no, ¿sí?
43. Camilo – nos quedó mal
44. Marcela – ujum
45. Karol – ah sí, porque es el volumen como tal de la caja ya hecha =no de la hoja [risas]=

(Transcripción de grabación en audio N° 6, 2018)

Así mismo, luego de que en las líneas 17 a 20 del aparte de la transcripción N°6, se dio el acto dialógico de identificar cómo representar el lado del cuadrado de manera general, y se reconoció la idea de variación inmersa en el concepto de función; se estableció el modelo matemático que permitiría hallar el volumen de cada caja, delimitando el dominio de dicha función, condicionado por las dimensiones de la hoja a partir de la cual se construían las cajas (Figura 2); es decir, en la búsqueda de la manera en la que se podía hallar el volumen de cualquiera de las cajas armadas con piezas rectangulares del mismo tamaño, salió a flote la representación algebraica de la función y nuevamente ésta se interpretó como una dependencia entre variables a través del acto dialógico de controvertir, en las líneas 21 a 23:

19. Camilo – eso normal, así, por 17 menos
20. Marcela – “2x”
21. Camilo – “2x”, ¿por qué “2x”?
22. Marcela – porque... se quitan de lado a lado los, la medida del cuadrado
23. Camilo – exacto
24. Karol – ahí ya varía... = para cualquiera...varía acá este número =

(Transcripción de grabación en audio N° 7, 2018)

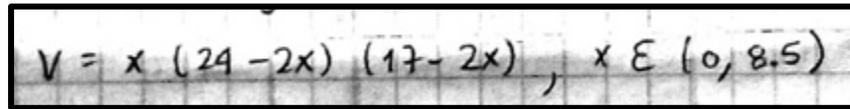

$$V = x(24 - 2x)(17 - 2x), x \in (0, 8.5)$$

Figura 2. Representación simbólica de la función como modelo matemático

En cuanto al tercer escenario exploratorio-investigativo, los estudiantes eligieron como tema la venta ambulante de productos de bonice, que en Colombia son distribuidos por la empresa Quala; el producto denominado bonice es una barra congelada con variedad de sabores y tres tamaños distintos: pequeño, sencillo y doble; y las popetas son crispetas listas para el consumo, que también tienen diversos sabores y dos presentaciones en el tamaño.

Cabe mencionar que la elección del tema debía ser por la cercanía al contexto de los estudiantes, y ellos debían reconocer y mostrar la utilidad de las matemáticas en el ámbito que se eligiera; en este caso un familiar de una integrante del grupo es vendedor de dichos productos, por lo que fue quien facilitó los datos necesarios, de esta manera los estudiantes se apoyaron en las dos actividades anteriores, y empezaron buscando relaciones entre estos. De acuerdo con la indagación que realizaron, cada producto tiene una comisión de venta diferente, popetas grandes \$160, pequeñas \$80, bonice pequeño \$70, sencillo \$80 y doble \$100, además, a los vendedores les pagan un bono de \$5000 diarios sin importar las ventas que se hayan tenido, así que los estudiantes se propusieron formular una expresión algebraica que permitiera determinar los ingresos semanales de estos vendedores ambulantes.

Inicialmente se aclara cómo tener en cuenta el bono mencionado anteriormente en los modelos matemáticos; así que en la línea 83 de la transcripción correspondiente, la estudiante cuestiona por qué se considerarían \$1000 diarios en el modelo de los ingresos que genera cada producto, esto conlleva a que su compañero defiende su idea, defensa que se ve apoyada por otra integrante del grupo, así que juntos explican a la compañera el funcionamiento del modelo y la razón por la que un bono de \$1000 diarios por producto suma un total de \$35000 semanales, que representan los \$35000 por concepto de un bono diario de \$5000, todo esto se refiere respectivamente a los actos dialógicos de controvertir, defender e identificar; a continuación el aparte que evidencia lo mencionado:

83. Karol – son 5000 usted está diciendo que es mil por cada producto
84. Camilo – exacto, entonces ¿si son siete días?
85. Karol - ¿por qué va a dar 7000?
86. Camilo – porque =siete por uno =
87. Marcela – =son mil= son mil por día
88. Camilo – son mil por día, mil pesos por siete días
89. Marcela – siete por cinco treinta y cinco, =sí ahí está=
90. Karol – =ah sí da lo mismo=
91. Camilo – claro [risas]

(Transcripción de grabación en audio N° 12, 2019)

Luego de aclarar que el bono de \$5000 se tendría en cuenta en cada modelo matemático sumando \$7000 a los ingresos que genera cada producto, surge entonces la representación simbólica de la función (figura 3), que permite reconocer nuevamente que la función se interpreta como una dependencia de variables, entre la cantidad de productos vendidos y los ingresos que se generan semanalmente, lo cual se evidenció también en la representación gráfica que usaron los estudiantes, que reflejó un comportamiento lineal.

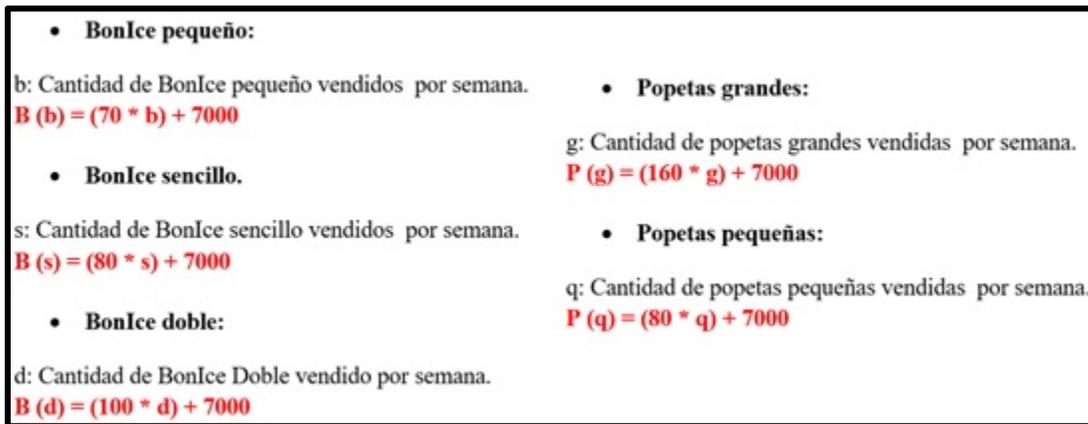


Figura 3. Representación simbólica de la función en la venta de productos de bonice

■ Reflexiones finales

Al implementar los escenarios exploratorio-investigativos a través de la modelación matemática, salen a flote varios actos dialógicos, que de acuerdo a Alro y Skovmose (2012) favorecen el aprendizaje dialógico, evidenciando que los estudiantes reformulan sus ideas teniendo en cuenta los planteamientos de sus compañeros, y también las apoyan o refutan objetivamente, fortaleciendo su aprendizaje al enlazar conocimientos previos con las nuevas temáticas, en este caso relacionadas con la modelación y el concepto de función.

Cabe mencionar que a pesar de que los grupos se conformaron por elección de los mismos estudiantes, uno de los integrantes del grupo parecía no compaginar con sus compañeros, y su participación en las actividades pasó casi desapercibida, tanto así que al final decidió desertar del curso; resulta incierto afirmar que la ausencia de diálogo fue determinante en su experiencia, sin embargo, el desempeño de sus compañeros y los debates que se forjaron durante el desarrollo de las actividades, ponen de relieve que el diálogo como proceso de interacción social, puede influir positivamente en el aprendizaje de las matemáticas.

Por otra parte, la indagación que se deriva de los escenarios exploratorio-investigativos, se relaciona, hasta cierto punto, con el acto dialógico de identificar, a través del cual se dan explicaciones y se cristalizan las ideas; es decir, el proceso de indagar tiene que ver con la búsqueda de explicaciones, y el acto dialógico de identificar, las concreta. Esto permite identificar una diferencia entre los procesos mencionados, y es que no siempre identificar va de la mano con indagar, ya que en cuanto al acto dialógico se refiere, no siempre se da con el fin de aclarar dudas, porque puede ser que las ideas ya se hayan planteado, pero no de una manera clara. Aun así, sigue existiendo una relación ya que cuando se da la identificación tiene que ver con las explicaciones que se dan, las cuales están vinculadas al por qué de las cosas, y el hecho de explicar favorece el desarrollo de las matemáticas (Bishop, 1999, citado en Silva, 2010).

Ahora, la implementación de este tipo de actividades facilita dejar de ver la función como un ente abstracto, y más bien interpretarla como uno que se relaciona con la idea de variación y cambio entre dos variables, es decir, como un modelo matemático (Posada & Villa, 2006); en esto influye positivamente el diálogo, ya que intercambiando interpretaciones de determinada situación se pueden identificar las diferentes aplicaciones de dicho concepto.

En este mismo sentido, se observa que de manera verbal los estudiantes también ponen en evidencia la manera en la que interpretan la función, y lo plasman en las representaciones en las que se apoyan, lo cual en este caso se relaciona de manera directa con los planteamientos de Skovmose (1999), en los que se propone brindar más

autonomía a los estudiantes, por ejemplo, en el primer escenario exploratorio-investigativo surgió la representación tabular para poner de relieve la relación entre los datos, en el segundo escenario se planteó una expresión algebraica que representaba la situación, incluyendo un conjunto de valores para la variable independiente, y en el tercero la atención se fijó en las comisiones de venta para analizar la utilidad de las matemáticas, sin embargo, ninguno de estos aspectos era explícito en las actividades, solo fue elección de los estudiantes el camino para dar solución a las situaciones.

Finalmente, no se puede dejar de lado el hecho de que para comprender lo que realmente sucede en la educación matemática, es importante la prudencia al creer todo lo que se percibe, ya que la realidad no siempre es como parece, y lo que es real es muy difícil de ver (Skovmose, 1999).

■ Referencias bibliográficas

- Acosta, J. (2005). Tránsito entre representaciones en Matemáticas. ¿Pensamiento global o local? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, 5-10. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Alro, H. y Skovmose, O. (2012). Aprendizaje dialógico en la investigación colaborativa. En P. Valero y O. Skovmose. *Educación Matemática Crítica: una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 149-171). Bogotá: Una Empresa Docente.
- Andrew, P. (2010). La identidad y el aprendizaje: una perspectiva social. *Multidisciplina*, 6, 5-13.
- Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1996). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis.
- Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Valencia.
- Cantoral, R. (2001). Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior. *Revista Electrónica Sinéctica* (19), 3-27.
- Font, V. (2011). Funciones. En J. Goñi, J. Barragués, M. Callejo, J. Fernández, S. Fernández, V. Font y G. Torregrosa. *Matemáticas, Complementos de formación disciplinar* (pp. 145-185). Barcelona: Graó.
- Gascón, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad. *Suma*, 26, 11-21.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw Hill.
- Hitt, F. (2002). *Funciones en Contexto*. México: Pearson Educación.
- Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del Cálculo. *Undécimo Encuentro de profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior, Universidad Michoacan de San Nicolás de Hidalgo*, (pp. 1-25). Morelia, México.
- Ponte, J. (2004). Problemas y investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos y J. Ponte. *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Barcelona: Graó.
- Posada, F. y Villa, J. (2006). El razonamiento algebraico y la modelación matemática. *Didáctica de las matemáticas*, 2(2), 127-163.
- Riscanevo, L. (2017). *Aprendizaje, experiencia y formación investigativa del profesor de matemáticas: tejiendo historias*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia.
- Riscanevo, L., Crisancho, K. y Fonseca, C. (2011). La influencia del contrato didáctico en el aprendizaje del concepto de función. *Praxis & saber*, 2(3), 119-137.
- Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma de la enseñanza del cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(3), 355-382.
- Silva, D. (2010). De lo real a lo formal en matemática. *Integra Educativa*, 3(2), 157-178.
- Skovmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la Educación Matemática Crítica*. Bogotá, Colombia: Una empresa Docente.
- Skovmose, O. (2000). Escenarios de Investigación. *EMA*, 6(1), 3-26.

- Tusón, A. (2002). El análisis de la conversación: entre la estructura y el sentido. *Estudios de sociolingüística*, 3(1), 133-153.
- Ugalde, W. (2014). Funciones, desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Matemática, educación e internet*, 14(1), 1-48.
- Valero, P. (2006). ¿De carne y hueso? La vida social y política de la competencia matemática. *Memorias del Foro Educativo Nacional de Colombia- Competencias Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia - MEN.
- Vygostky, L. (1978). *Pensamiento y Lenguaje*. La habana: Editorial Revolucionaria.
- Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad*. Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica, S.A.