

LA MATEMÁTICA Y EL ARTE EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

MATHEMATICS AND ART IN THE TEACHING-LEARNING PROCESS OF GEOMETRY

Fernando González Aldana
Universidad Antonio Nariño UAN (Colombia)
fernalmat@hotmail.com

Resumen

El presente proyecto de investigación tiene como objetivo, dar a conocer una propuesta de aula, cuya innovación pedagógica, parte de la experiencia y contacto con elementos geométricos y artísticos, de la exploración y uso de la tecnología con un programa, como el GeoGebra; para que las estudiantes adquieran herramientas pedagógicas importantes en su desarrollo espacial. La implementación del sistema de actividades sobre la matemática y arte, sirven como motivación para el estudio de la geometría, específicamente en la relación que tienen estas dos disciplinas, especialmente en la demostración de teoremas y en la resolución de problemas retadores, se mejora así, la percepción visual y a la vez se crean espacios de estimulación matemática, con métodos menos complicados y más didácticos.

Palabras clave: arte, geometría, GeoGebra, elementos, desarrollo

Abstract

This research project is aimed at showing a classroom proposal whose pedagogical innovation comes from the experience and contact with geometric and artistic element, from the exploration and use of technology with a program, such as the GeoGebra; so that the students acquire important pedagogical tools in their spatial development. Implementing the system of activities on mathematics and art serves as motivation for the study of geometry, specifically with respect to the relationship these two disciplines have; particularly, in the demonstration of theorems and in the solution of challenging problems. Like that, visual perception is improved, and mathematical stimulation spaces are created as well, by using less complex and more didactic methods.

Keywords: art, geometry, GeoGebra, elements, development

■ Introducción

La presencia de la matemática en el arte se manifiesta desde tiempos remotos: los griegos, los artistas del Renacimiento (siglo XV), y los árabes (s. XII-XV), utilizaron la geometría en la construcción de sus monumentos, decorados y pinturas. En el siglo XX muchos artistas han utilizado figuras geométricas y elementos de geometría en sus obras.

La matemática y el arte en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría tienen un rol significativo, pues contribuye a lograr un aprendizaje significativo del contenido geométrico. En este proceso se propicia el desarrollo del pensamiento matemático y espacial, se favorece la creatividad en las estudiantes en la resolución de problemas retadores y permite la independencia cognoscitiva para el trabajo en el aula. El contenido geométrico está presente en todos los currículos de los diferentes niveles educativos, por tal motivo es necesario lograr un aprendizaje adecuado de este contenido en cada nivel, y esto sirve de base para los grados superiores.

Por otro lado, la geometría es uno de los campos de la matemática con mayores aplicaciones a la realidad, pero en las pruebas PISA, CERSE, Pruebas Saber, Prueba Simulacros internos, demuestran que es el contenido matemático con más bajos resultados y por ende el de mayores dificultades en su aprendizaje. El presente trabajo, tiene su origen en la necesidad de crear estrategias para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría y a la vez, que permitan a las estudiantes adquirir conocimientos y habilidades creativas que conduzcan a la visualización y apreciación del arte en una demostración o práctica matemática.

El uso de los elementos artísticos para el aprendizaje de la geometría, es una propuesta que surge de la experiencia de trabajo en el aula del investigador, al tener experiencia profesional en el campo de las matemáticas y en el campo de las artes, lo ha llevado a observar el limitado desarrollo del componente geométrico en los estudiantes. En este sentido, se pretende retomar, además de materiales manipulables como la regla y el compás, conceptos básicos de geometría, el uso de la tecnología, elementos artísticos y sumados a esto, el ingenio y la creatividad para que haya una apropiación y disfrute de la geometría.

En una demostración matemática se despiertan sentimientos y cambios de estado de ánimo que también se encuentran al crear una obra de arte, siendo éste, el verdadero valor de motivación. Esto implica que se puede incluir, para lograr un aprendizaje significativo del contenido geométrico en las estudiantes, la técnica de Omar Rayo (1928-2010), artista colombiano considerado geométrico-óptico, que aprovecha los cuadrados, los rectángulos y las líneas en zig-zag y se expresa con el blanco, el negro y el rojo. También se puede tomar al artista Húngaro Víctor Vasarely (1906-1997), considerado como el padre del op art o modelo propio de arte abstracto geométrico, con efectos ópticos de movimiento, ambigüedad de formas y perspectivas, e imágenes inestables.

La matemática y el arte en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en el grado octavo, ha sido abordada por diferentes investigadores, donde plantean sus ideas y características importantes. Esta temática ha ocupado a los investigadores, en diferentes reuniones y congresos, en particular se destacan las investigaciones presentadas en el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), en el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), en la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), en las reuniones latinoamericanas de matemática educativa (RELME), en Encuentros Colombianos de Matemática Educativa (ECME), los Simposios de Matemática y Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño (MEM), entre otros.

En el ICMI (2001), se considera a la geometría como una herramienta vital para el entendimiento, y también como una parte intuitiva y concreta de las matemáticas, ligada a la realidad. El ICMI 2008 centra su atención en la enseñanza-aprendizaje de la geometría mediante software de geometría dinámica (SGD). Koyuncu, Akyuz & Cakiroglu (2014) enfatizan que la interacción con los SGD favorece el desarrollo cognitivo y la adquisición de

conocimientos. Estos autores consideran que para ubicar de nuevo la geometría en un lugar prominente se hace necesario retomar las herramientas con las que se generó la geometría y su historia.

Para lograr resultados satisfactorios en el aprendizaje del contenido geométrico, debe existir una colaboración entre matemáticos y artistas; aunque no se asista a un nuevo Renacimiento, sin embargo, se puede esperar resultados interesantes entre ambas. Para dar una idea cada vez mayor de la importancia de este aspecto visual, basta recordar los congresos que se han celebrado en el Mathematical Science Research Center (MSRI) de Berkeley desde 1988, el año siguiente al inicio del Geometry Supercomputer Project en la Universidad de Minnesota en Minneapolis.

El segundo congreso se realiza en octubre de 1992, recordando las ideas de Piero Della Francesca, de gran importancia para el estudio de la relación entre matemática y arte. Esa misma semana del MSRI se publicó el número especial de Leonardo titulado Visual Mathematics. Emmer, M. (1992) dedicado a Piero Della Francesca.

En las actas del congreso Matemáticas y arte celebrado en 1991 en el Centre Culturel Cerisy La Salle, el matemático habla de la espontaneidad matemática, se refiere a que:

La intuición inicial del matemático o del artista es libre... La matemática, aparte de la evolución relacionada con la física, se desarrolla siguiendo una lógica propia y, de hecho, no está ligada a la realidad. El matemático, practica la matemática por introspección, como lo haría un artista (Mandelbrojt 1995, p. 29).

En la resolución de problemas, donde se involucra la historia de las matemáticas, relacionadas con matemática y arte, favorece el razonamiento de los estudiantes, enseña a enfrentar situaciones nuevas y se tiene la oportunidad de involucrarse con las aplicaciones del arte en la matemática. También, brinda una buena base matemática y favorece la idea de que hacer matemáticas es crear obras de arte.

Las valoraciones anteriores y el estudio epistemológico inicial realizado, permiten determinar el siguiente problema de investigación: ¿cómo favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría a través del uso de algunos elementos del arte, en las estudiantes del grado octavo del colegio Santa Teresa de Jesús de Ibagué?

Se infiere como objetivo general: favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, mediante la implementación de actividades basadas en problemas, que permitan a las estudiantes adquirir habilidades y destrezas creativas que conduzcan a la visualización y apreciación del arte en una demostración o práctica matemática.

■ Marco teórico

Con relación al arte y las matemáticas se plantea: «... las matemáticas como quehacer humano pueden volverse profundamente satisfactorias, y aún apasionantes, porque están más cerca de las artes que de las ciencias. En efecto, los verdaderos matemáticos practican sus matemáticas como arte» (Vasco 2006, p. 23). Ratifica que «... si los profesores y maestros vivieran y enseñaran las matemáticas como arte, todos podríamos vivir esa experiencia creativa, y tal vez muchos de los artistas serían también matemáticos, muchos de los matemáticos artistas...» (Vasco 2006, p. 24) La matemática y el arte en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría tienen un rol significativo, pues contribuye a lograr un aprendizaje significativo del contenido geométrico.

Por otra parte, «Sugiere que la geometría se encuentra ligada a la realidad y por ello hay numerosas herramientas que permiten manipular y abstraer conceptos y propiedades» (Castillo 2011, p. 523). Una de estas herramientas para el trabajo en el aula, con el contenido geométrico; es la utilización de la manipulación geométrica y de la

visualización como una herramienta didáctica, y la integración de la matemática y el arte, para el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría.

Se puede decir, que la geometría, va más allá de la belleza superior, de la armonía existente entre líneas, puntos, polígonos y color; gracias al orden armonioso de las partes y su relación con las formas y los números. El trabajo del matemático es encontrar las semejanzas y diferencias entre una y otra forma matemática, cuya esencia conduce a una apreciación artística, «... se considera arte la producción por un ser humano de un objeto bello» (Velázquez 2005, p. 10). Las matemáticas son la esencia de la realidad de la naturaleza y al reflejarla, lleva a la creación de un objeto matemático al igual que las artes, es allí donde se encuentra la cercanía entre estas dos ciencias. Esta temática ha sido abordada por diferentes investigadores, donde plantean sus ideas y características importantes (De Guzmán 2013, p.243). La relación entre la geometría, la matemática, el arte y el diseño es bastante obvia. La belleza de muchos objetos de la geometría es inspiración para los artistas.

La naturaleza por sí sola tiene un diseño único artístico-matemático. Cada uno de los objetos naturales tiene una armonía, un juego de colores que contrastan todo tipo de sensación y es allí, donde se encuentra implícita la matemática porque esto hace que sea perfecto, que sea irrepetible. Cada fenómeno natural funciona gracias a su matemática. Falk de Losada (2013, p.53), precisa que los griegos no fijaron su atención en la simetría sino en la proporcionalidad y terminaron por estudiar temas relacionados con construcciones de regla y compás. Emmer, Michelle (2005) “Un hecho matemático debe ser, ante todo bello. Un teorema puede y debe ser bello, como lo es, por ejemplo, una poesía...”. Es allí donde se puede encontrar la relación matemática y arte.

■ Metodología

La investigación se orienta a encontrar la relación entre matemática y arte en el aula, con una metodología que propicia “conocer y actuar” en el contexto de un proceso de apropiación y aplicación del conocimiento geométrico. Para ello, en el grupo seleccionado se realizan talleres sobre dominio de herramientas físicas y tecnológicas. Los métodos empíricos e instrumentos de geometría, de dibujo y el uso de la tecnología a través de GeoGebra, conducen a encontrar la relación entre matemáticas y el arte. En esta parte se consideran:

La población objeto de investigación son las estudiantes del grado octavo del colegio Santa teresa de Jesús de Ibagué, de carácter estatal, nivel muy superior, ubicado en el departamento del Tolima, país Colombia y como muestra 37 estudiantes del grado octavo C.

La investigación se lleva a cabo bajo el paradigma cualitativo, con un enfoque de investigación acción. Este enfoque en el área de la matemática y el arte permite transformar, mejorar y enriquecer el quehacer docente, dirigido a despertar la motivación y el interés para lograr un aprendizaje significativo en las estudiantes de grado octavo del colegio Santa teresa de Jesús de Ibagué. Aquí se combinan métodos y técnicas de investigación científica, en un nivel teórico y empírico. En el primero se hace relación al histórico-lógico porque se emplea, con el fin de valorar la evolución y desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría a través del arte. El segundo se relaciona con las experiencias que tienen cada una de las estudiantes en el manejo de algunos elementos del arte y de la geometría (observación participante y encuesta). También se utilizan los métodos estadísticos matemáticos para el procesamiento de la información obtenida, a través de los métodos y técnicas del nivel empírico.

Durante la exploración se utilizan elementos del arte y de la geometría, imágenes pictóricas de los artistas Omar Rayo y Víctor Vasarely, software de geometría dinámica (GeoGebra), materiales visuales manipulables de geometría y dibujo como la regla, compás, escuadras, colores, borrador, lápices, entre otros. El instrumento de contenido se dirige a constatar cómo se manifiesta el proceso de diseño y reproducción de ejercicios pictóricos (representación visual), como resultado de una práctica o de una demostración geométrica, importante en la resolución de problemas.

La investigación se fundamenta teórica y prácticamente en la visualización, ya que el estado final de la resolución de problemas, tiene como resultado ejercicios artísticos, geométricos y abstractos, presentes en el proceso de enseñanza aprendizaje. Además, se propone una metodología, con el propósito de contribuir a la lectura, interpretación de imágenes, a la vez que se sugieren la implementación de reglas heurísticas que les son inherentes a este. Por último, se realiza una implementación parcial en la práctica con estudiantes de grado octavo y se muestran los resultados alcanzados, los cuales se contrastan con una encuesta de satisfacción aplicada a las estudiantes para valorar el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría con ayuda de la relación que existe entre las matemáticas y el arte, una vez terminada la aplicación de la práctica pedagógica.

El contenido de las actividades se dirige a encontrar la relación entre las matemáticas y el arte, con el propósito de aprender geometría apoyada en la resolución de problemas que constituyen retos para los estudiantes.

■ Resultados

Para la búsqueda de la relación entre matemática y arte, en la investigación se desarrollan seis actividades basadas en problemas retadores. Las acciones de las estudiantes en el proceso de resolución de los problemas se encaminan a establecer conjeturas, en las cuales ellas apliquen recursos heurísticos. En este proceso, se busca que desarrollen las cuatro fases propuestas por Polya (1945) para el momento de la resolución de problemas, hasta conseguir elaborar ejercicios artísticos con sentido matemático. Estas actividades son: Construcción de figuras geométricas con regla y compás, Teorema de Pitágoras y su aplicación a los números irracionales, Aplicación del Teorema de Tales para la resolución de problemas, Perspectiva en el arte óptico, Problemas geométricos y Exposición concurso intercolegiado “Matemáticamente” 2017.

Las estudiantes del grado octavo realizaron los siguientes ejercicios pictóricos (ver figura 1), que se encontraban en cada una de las actividades, utilizando elementos de geometría, elementos del arte y aplicando la técnica del op art del artista Víctor Vasarely en la perspectiva y las series de cuadrados, se muestra la creatividad, el buen manejo y uso de los elementos de geometría en la creación y construcción de cada pintura.

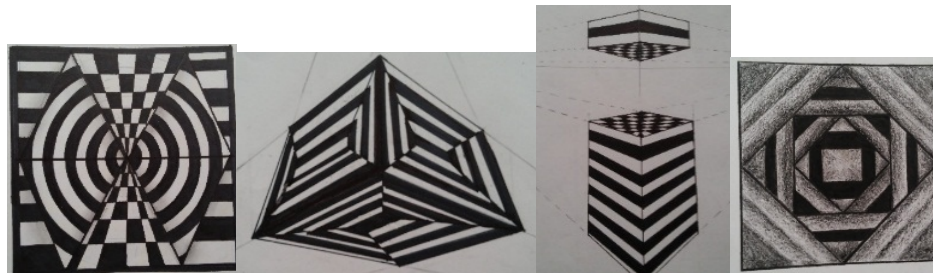


Figura 1. Ejercicios artísticos geométricos

Fuente: Elaboración de los estudiantes

Se le ha dado continuidad al proceso de investigación en donde una gráfica o una demostración geométrica pueden dar origen a una obra de arte, realizadas por el autor, como son los casos del Teorema de Feuerbach, que dice “En un triángulo el círculo de los nueve puntos es tangente al incírculo y a los tres excírculos”. La segunda pintura hace referencia al problema ¿cómo encontrar un cuadrado a partir de un triángulo isósceles?; la tercera pintura es la solución al problema: sea ABC un triángulo. Una circunferencia de centro en un punto que pasa por B y C y corta a AB y AC en M y N respectivamente. Los circuncírculos de los triángulos $\triangle AMN$ y $\triangle ABC$ se cortan en los puntos A y K . Demostrar que el ángulo AKO es recto.



Figura 2. Obras de arte en óleo

Fuente: Elaboración del autor

■ Análisis de resultados

Se realiza un análisis de los resultados obtenidos de la implementación de las actividades propuestas para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, utilizando algunos elementos del arte, en las estudiantes del grado octavo de la Educación Básica. En cada actividad se valora su descripción y análisis, motivación, logros obtenidos y dificultades presentadas. También se muestran evidencias fotográficas del trabajo realizado en el aula. Los resultados de las actividades son analizados teniendo en cuenta la forma como fueron desarrolladas, la motivación por el aprendizaje, los logros obtenidos y las dificultades presentadas. En la descripción del desarrollo de cada actividad se precisa la forma como las estudiantes afrontaron la resolución de cada problema y los resultados obtenidos por ellas.

También se resalta como a través del trabajo en grupo y de la heurística de cada una de las preguntas, conllevan a despertar interés en las estudiantes, quienes desarrollan cada problema con gusto, interactúan entre sí, en de cada grupo, acompañamiento docente permanente en cada socialización, fortaleciendo así conceptos, manejo de instrumentos de arte y de geometría, uso de las TIC en la cual se logra un aprendizaje significativo, analizar tareas desde lo visual con enfoques dinámicos y gráficos como lo manifiesta Santos Trigo y Luis Moreno (2016), y sobre todo el encontrar la relación matemática y arte, manifestado en cada uno de los ejercicios artísticos realizados en la práctica.

En estas actividades, es fundamental la resolución de problemas, resaltando en algunos casos los materiales didácticos y los niveles de ayuda ofrecidos para la construcción de la solución. De esta manera, a medida que las actividades incrementaban en complejidad, las estudiantes tomaban lo aprendido y lo aplicaban en la solución de los siguientes problemas, lo que permite apreciar la apropiación de un robusto conocimiento.

La quinta actividad se desarrolló con la participación de 37 estudiantes divididos en 10 grupos, de 4 y 3 estudiantes respectivamente. Adicionalmente se usó un video beam para proyectar las diferentes partes de la guía y que se pudiera tener mejor visión de las imágenes. Para el desarrollo de la actividad se le suministraron las carpetas con la actividad el cual desarrollaron los problemas de la siguiente manera:

Conocidas las técnicas de los artistas Omar Rayo y Víctor Vasarely, en el problema 1, hubo dificultad en un 40% en el literal b, debido a que no lograban reproducir las figuras geométricas utilizadas por Omar Rayo, se orientó utilizando el concepto de mediatriz, de sectores circulares y de radio, utilizando como medida la abertura del compás; 3 grupos no respondieron el literal e, en donde muestran dificultad en querer expresar sus ideas por el temor al error. Los literales a, c, y d, los respondieron correctamente en un 100%.

En el problema 2, las estudiantes siguieron las instrucciones de análisis y diseño de la pintura de Víctor Vasarely, pero la circunferencia del medio la dibujaron arbitrariamente y al aplicarle geometría en 7 grupos, se dieron cuenta que la habían dibujado incorrectamente, esto sirvió para que las estudiantes se dieran cuenta, que la pintura tuvo su inicio en un problema geométrico, cuyos orígenes están en la construcción geométrica de un rombo y que este a la vez ubica las dos circunferencias concéntricamente o siendo más ambicioso que las dos circunferencias de la pintura es el lugar geométrico de otra circunferencia (ver Figura 3). En un 30% de las estudiantes, se les dificulta expresar ideas sobre el problema que versa en esta obra de arte, del inciso j.

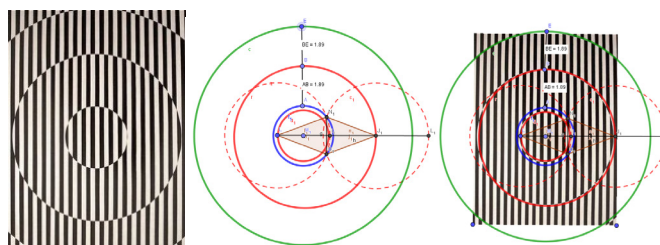


Figura 3. Matemática en obra de arte.

Fuente: Elaboración de los estudiantes

Los problemas 3 y 4, no tuvieron dificultades, en un 100% respondieron las preguntas correctamente en todos los grupos, al igual que los ejercicios de arte y matemática que allí se relacionan. Figura 4.

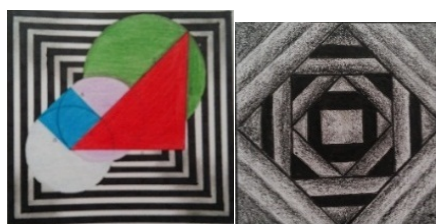


Figura 4. Problemas que conducen a obras de arte.

Fuente: Elaboración de los estudiantes

En el problema 5, de la imagen de Víctor Vasarely, las estudiantes replicaron la obra partiendo del siguiente problema “Sean dados el punto P y la circunferencia de centro O. Supongamos que P está en el interior de la circunferencia dada”. El problema parte de la solución “Sea el segmento AB, el diámetro de la circunferencia que contiene a P, el segmento EF es la cuerda de la cual P es el punto medio, entonces P y O están en el lugar geométrico que se desea construir. Para una cuerda cualquiera el segmento DH donde C es el punto medio de seta, se cumple que r_{OC} es perpendicular a r_{DH} , y todos los triángulos que se formen al trazar las diferentes cuerdas, análogos a POC, tendrán en común la hipotenusa PO y estarían inscritas en la circunferencia de centro O' y de radio $\frac{1}{2} l$ (PO) es el lugar geométrico buscado”. Se descubrió que las demás circunferencias son el resultado de puntos medios que son los centros de las circunferencias y muy interesante desde el punto de vista geométrico por la armonía artística que producen este patrón. Las estudiantes respondieron en un 70%, los incisos g e i, porque aún sienten cierto temor en expresar sus ideas. Las demás preguntas fueron interpretadas y contestadas de acuerdo con lo esperado. Figura 5.

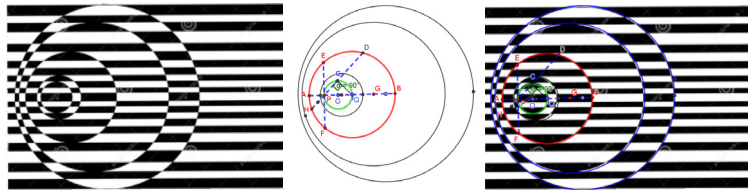


Figura 5. Matemática en obra de arte.
Fuente: Elaboración de las estudiantes

El problema 6, se realizó con ayuda de tabletas, suministrada a cada estudiante, en donde se encuentra debidamente instalado el GeoGebra, se continúa trabajando en grupo y con ayuda del video beam, se fueron aclarando los pasos. Las estudiantes lograron realizar con mucha creatividad la réplica de la pintura en un 80% terminada, dos grupos les faltó terminar porque aún tienen cierta dificultad en el manejo del software de geometría dinámica. Figura 6.

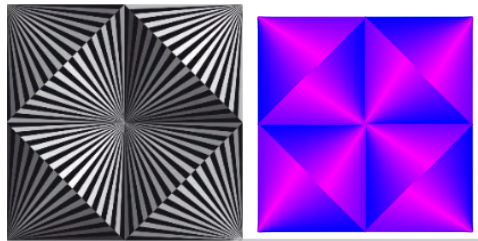


Figura 6. Obra de arte con GeoGebra.
Fuente: Elaboración de las estudiantes.

Finalmente se socializó la actividad, en donde se observó, menor el temor a expresar sus ideas a sus compañeras, en cuanto a la solución de un problema o a la creación de una situación geométrica o matemática. Se escucharon comentarios muy positivos sobre todo en la utilización del GeoGebra para la clase de matemáticas.

■ Resultados de la encuesta de satisfacción aplicada a los estudiantes y discusión

Al realizar el análisis respectivo de la encuesta de satisfacción, aplicada a 33 estudiantes presentes del grado octavo C, del colegio Santa Teresa de Jesús de Ibagué, acerca de la percepción que tienen las niñas involucradas en la práctica pedagógica, se evidencia en alto porcentaje de favorabilidad el cumplimiento de los objetivos planteados en la tesis (ver gráfico 2), tabla de datos de la encuesta de satisfacción.

Preg	Valor	1	2	3	4	5
1				1	2	30
2					8	25
3	1	1		1	6	24
4	1			2	7	23
5				2	3	28
6				2	10	21
7					12	21
8				1	7	25

Gráfico 2. Tabla de datos de la encuesta de satisfacción.
Fuente: Elaboración propia.

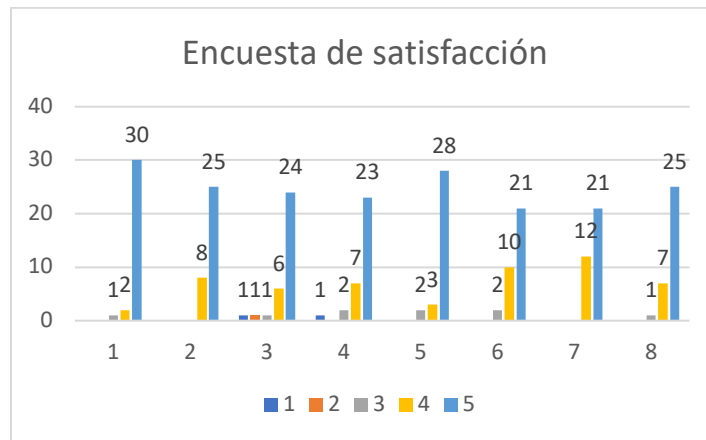


Gráfico 3. Análisis estadístico de la encuesta de satisfacción
Fuente: Elaboración propia.

El anterior gráfico de barras (gráfico 2), análisis estadístico de la encuesta de satisfacción, en donde participaron 33 estudiantes de las 37 de la muestra, se evidencia la calificación más alta de uno a cinco, la tienen un gran número de estudiantes en cada una de las ocho preguntas realizadas, en la pregunta uno, 30 estudiantes manifestaron 5, dos en 4 y una en 3; en la segunda pregunta, 25 en 5 y ocho en 4; en la tercera pregunta 24 en 5, seis en 4 y una estudiante en el 1, 2 y 3; en la cuarta pregunta 23 en 5, siete en 4, dos en 3 y una en 1; la quinta pregunta 28 en 5, tres en 4, dos en tres; en la sexta pregunta 21 en 5, diez en 4 y dos en 3; en la pregunta 7, 21 estudiantes 5, y doce estudiantes en 4 y en la octava pregunta 25 en el 5, siete estudiantes en 4 y una en 1.

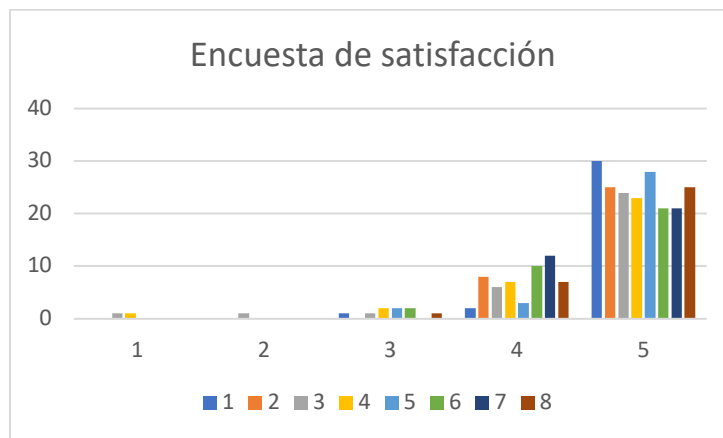


Gráfico 3. Análisis de datos por valoración
Fuente: Elaboración propia.

El gráfico 3, análisis de datos por valoración, nos muestra que de las 33 estudiantes encuestadas, se concentra en la valoración de 5 en cada una de las preguntas así; la 1 en un 91%, la 2 en un 76%, la 3 en un 73%, la 4 en un 70%, la 5 en un 85%, la 6 y la 7 en un 64% y la 8 en un 76%; en la valoración 4, el porcentaje es en la pregunta 1 es de 6%, la 2 de 24%, la 3 de 18%, la 4 de 21%, la 5 de 9%, la 6 de 30%, la 7 de 36% y la 8 es de 21%; la valoración de 3 en un porcentaje en la preguntas 1, 3 y 8 de un 3% y las pregunta 4, 5 y 6 en un 6%, las preguntas 2 y 7 0%; la valoración de 2, la pregunta 3 un 3% las demás preguntas 0%, en la valoración de 1, sólo las preguntas 3 y 4 con

un 3%, las preguntas 0%. Las estudiantes hicieron valoración de la pregunta 3 y 4 de 1 porque no consideraron un reto las actividades y tienen ciertas dificultades en el manejo de los elementos artísticos y geométricos.

Informalmente, siguiendo en clase el progreso de las estudiantes y hablando con ellas, se pudo recopilar algunas ideas interesantes sobre cómo estaba cambiando su percepción. En general, las estudiantes se mostraron sorprendidas de los logros que obtuvieron y de la forma como se puede aprender matemática con ayuda de los elementos del arte, se propuso una reflexión y una mirada hacia las expresiones artísticas que utilizan exclusivamente formas geométricas como objeto representado, en cada uno de los ejercicios tal como lo plantea Franco (2003), es aquí donde existe una, aproximación interdisciplinar entre la geometría y el arte, como lo manifiesta Serenato (2008).

Por otra parte, el dibujo en la geometría podría parecer una redundancia, como diría Recreo (2016) pero en esta práctica es en sí misma dibujada, esto llevó a las estudiantes a construir ejercicios artísticos, con un lenguaje geométrico adecuado. También constituye un lenguaje de la misma pintura y la belleza de muchos objetos de la geometría en el arte y el diseño (Nuere, 2002). El dibujo en la geometría según Mariño (2004) constituye una inspiración para las estudiantes al momento de crear pequeñas obras, pues estas creaciones fueron el resultado de preguntas heurísticas que conducen a la aplicación de los cuatro pasos de Polya (1945), en la resolución de los problemas. Otro aspecto que se observó fue la motivación de que sus trabajos se hizo público, expuestos en un concurso de matemática que realiza la institución Santa Teresa de Jesús de Ibagué, Colombia, en donde participan 10 instituciones del mismo municipio y que fueron visitadas por un evaluador de la Universidad Antonio Nariño, dándole mayor importancia a sus trabajos y su aprendizaje.

Se pudo constatar que en algunas ocasiones se sintieron con cierta frustración, pero que con el correr del tiempo esa dificultad se convirtió en fortaleza. Algunas estudiantes crearon ejercicios artísticos sorprendentes, dignos de replicar en obras de arte.

■ Conclusiones

El proceso de investigación sobre matemática y arte, en el grado octavo de la Educación Básica, permitió dar respuesta al objetivo. Los resultados obtenidos permiten destacar algunos elementos en este trabajo, ellos son:

- La teoría de la resolución de problema es fundamental para el trabajo en el aula con la solución de problemas de matemática y arte. En la investigación se retoman las ideas de especialistas en Educación Matemática, los cuales aportan definiciones sobre problemas, resolución de problemas y estrategias para la resolución, que constituyen elementos básicos en la propuesta de actividades, basada en problemas retadores.
- La resolución de problemas aporta a la construcción de ejercicios artísticos con contenido matemático, a través del uso de algunos elementos del arte, pues las estudiantes aprenden a pensar y a razonar de manera geométrica abstracta, a explorar y a crear sus representaciones y modelos mentales. Mediante este proceso se propicia resolver situaciones de la matemática, del arte y de la vida real.
- La visualización favorece la construcción de ejercicios artísticos, a través del uso de elementos de geometría como la regla y el compás. En este proceso se considera que la visualización es una habilidad, que permite formar imágenes y representaciones, para la búsqueda de una interpretación geométrica de las obras de arte y de utilizar las técnicas artísticas como el op art y geometría abstracta en una gráfica geométrica o en un teorema.
- La comunidad de práctica para el trabajo de la matemática y arte en el aula, transitó durante su desarrollo por las fases: potencial, coalescencia, madurez, gestión y transformación. El tránsito por estas fases permite su consolidación como comunidad y favorece la construcción del conocimiento, donde es esencial la

participación, la imaginación de las estudiantes, para la búsqueda de su propia identidad. El trabajo en comunidades de práctica permite la comprensión y socialización en el salón de clases de la construcción y apropiación de conocimientos geométricos.

- Como resultado de la implementación de las actividades en la práctica escolar, se constata:
 - ✓ Comprensión por las estudiantes acerca del proceso de relacionar imágenes de obras de arte con sus respectivas soluciones geométricas y viceversa.
 - ✓ El diseño de las actividades, la heurística utilizada en los problemas, el estilo de trabajo en grupo, la relación entre matemática y arte, motivaron a las estudiantes en querer socializar sus ideas y mostrar sus experiencias pictóricas.
 - ✓ Se interpretan y analizan los Teoremas de Pitágoras y Tales y, se fortalecen otros conceptos matemáticos y geométricos que implican estas demostraciones.
 - ✓ El uso de los materiales didácticos en la clase, genera mayor motivación en las estudiantes para la resolución de los problemas geométricos que relacionen la matemática y el arte.
 - ✓ Los diferentes procedimientos que utilizaron las estudiantes para la resolución de los problemas se constatan en la socialización de las actividades, tanto en los grupos de comunidades de práctica, como en el debate con todas las estudiantes del aula.
 - ✓ Se fortalece el sentido de cooperación, responsabilidad y compañerismo y la participación entre las estudiantes, lográndose su satisfacción al notar avances en el desarrollo de sus procesos matemáticos.
 - ✓ En las actividades participaron 10 grupos de trabajo, para un total de 37 estudiantes, de ellos un 90% responde de forma correcta cada una de las actividades.
 - ✓ La exposición de sus trabajos sobre matemática y arte en el concurso intercolegiado “Matemáticamente 2017”, a diez delegaciones de instituciones privadas y públicas de Ibagué, fortalecen su motivación y autoestima.

■ Referencias bibliográficas

- Castillo, A. (2011). *El geo plano: Una alternativa para mejorar la enseñanza de la geometría. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26. Recuperado el 24 de junio de 2017, de <http://funes.uniandes.edu.co/4082/1/CastilloElgeoplanoALME2013.pdf>
- De Losada, M. (2013). *Corrientes de pensamiento matemático del siglo XX. Segunda parte: Estructuralismo*. Universidad Antonio Nariño. P. 53-80
- De Guzmán, M. (2013) *Polivalencia de las matemáticas: Ciencia, técnica, arte, juego, filosofía*. Real Academia de Ciencias. www.rac.es/ficheros/doc/00337.pdf p.243
- Emmer, M. (1992). *Visual Mathematics*. Edición especial: “Leonardo”. Oxford: Pergamon Press, vol. 25, pp. 3-4.
- Franco, C. (2003). *Arte geométrico: Análisis y tendencias de su desarrollo plástico*. Universidad de Granada. Granada España
- Krulik s y rudnick k, 1980. *Problem solving in school mathematics*. National council of teachers of mathematics; *Year Book*. (Reston: Virginia).
- Koyuncu, I. Akyuz, D & Cakiroglu, E. (2014) *investigating plane geometry problem-solving strategies of prospective mathematics teachers in technology and paper-and-pencil environments*. *International Journal of Science and Mathematics Education*. Recuperable el 01 octubre de 2014 de la URL: <http://link.springer.com/article/10.1007/s10763-014-9510-8>.
- Lütfiye G. K. (2014). Karabuk University. The Faculty of Literature The Department of History of Art, Karabuk, TURKEY
- Mandelbrojt, J. (1995). *Spontanément mathématique*. En: Loi, M. (ed.). *Mathématiques et Art*. París: Herman editeurs, pp. 29-38.
- Mariño, R. (2004). *La geometría en el arte y el diseño*. Univesidad Nacional de Colombia. Bogotá Colombia.

- McGee, M. (1979). Human Spatial Abilities: Psychometric Studies and Environmental, Genetic; Hormonal, and Nurillogical Influence, *Psychological Bulletin*, vol. 86.
- Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica*. Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia. p. 116
- Moreno, L. & Santos, M. (2015). *The Use of Digital Technology in Mathematical Practices Reconciling Traditional and Emerging Approaches*. Cinvestav-IPN, México.
- Nuere, M. (2002). El lenguaje geométrico en la pintura. Soportes audiovisuales e informáticos Serie Tesis Doctorales. Fundación Dialnet Universidad Complutense de Madrid España.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*, Editorial Princenton University press, Princenton.
- Recreo G.V. (2016). *Geometría dibujada análisis crítico y comparado de metodologías de su enseñanza* Soportes audiovisuales e informáticos Serie Tesis Doctorales. Fundación Dialnet Universidad de Nueva Granada. España
- Riad, S. (2014). Faculty of Instructional Technology, Troy University, Troy, Alabama, USA, raisami@troy.edu
- Rodríguez, A. (2005). Periódico de El espectador. La geometría abstracta de Omar Rayo. Recuperado de www.jornada.unam.mx/2005/04/20/index.php?section=cultura&article=a09n1cul
- Sandín, E. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones*. Madrid: Mc Graw Hill. p. 123.
- Serenato, L. (2008). *Aproximações Interdisciplinares entre Matemática e Arte: Resgatando o Lado Humano da Matemática*. universidade federal do paran á sistema de bibliotecas coordena çã o de rocessos técnicos. Brasil.
- Trigo, S. & Moreno, A. L. (2016). The Use of Digital Technology to Frame and Foster Learners' Problem-Solving Experiences. Centre for Research and Advanced Studies, Cinvestav-IPN, San Pedro Zacatenco, México DF, México.
- Vasco, C. E. (2005). "Didáctica de las matemáticas: artículos selectos" U. Pedagógica Nacional.
- Velázquez, M. (2005). *Presentación de la monografía: Matemáticas, belleza y arte. Art, de UNO*. Revista Uno 40. Recuperado de www.grao.com/revistas/uno/...matematicas-belleza-y-arte/presentacion-de-la-monogra.
- Weltman, A. (2015). Libro *this is Not a Maths Book: A Smart Art Activity Book*. Reino Unido.