

EL CALENTAMIENTO Y ENFRIAMIENTO DE SUSTANCIAS Y LOS MODELOS MATEMÁTICOS: UNA SITUACIÓN REAL

HEATING AND COOLING OF SUBSTANCES AND MATHEMATICAL MODELS: A REAL SITUATION

Honorina Ruiz Estrada, Patricia Mendoza Méndez, Juan Nieto Frausto

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

hruizestrada@gmail.com, patriciamndzmndz@gmail.com, jfrausto@fcfm.buap.mx

Resumen

Proponemos el calentamiento y enfriamiento de una masa de agua como una tarea de modelado, la cual resolvió un grupo de estudiantes universitarios de la carrera de Física. Para conducirlos por las etapas de la modelación, se les presentó un dispositivo experimental para calentar agua hasta su punto de ebullición y su posterior enfriamiento a la temperatura ambiente. Antes de hacer los experimentos, ellos propusieron representaciones gráficas para ambos fenómenos. Para completar el ciclo de modelación, los estudiantes elaboraron un reporte, contrastando sus predicciones con los datos experimentales y la información existente en la literatura. En esta comunicación breve se discuten los modelos elaborados por los estudiantes considerando una modificación del ciclo de modelación matemática de Borromeo y se analiza si sus propuestas están relacionadas con el grado de consolidación de su reflexión cognitiva. Encontramos que los estudiantes no vieron la ventaja de proponer modelos matemáticos ni para el calentamiento ni el enfriamiento.

Palabras clave: modelación matemática, calentamiento y enfriamiento de sustancias, reflexión cognitiva

Abstract

We propose the heating and cooling of a water mass as a modeling task, which was solved by a group of university students of the Physics degree. In order to lead students through the modeling stages, an experimental device to heat water up to its boiling point and its subsequent cooling to room temperature was presented to them. Before experimenting, they proposed graphic representations for both phenomena. To complete the modeling cycle, the students prepared a report and compared their predictions with experimental data and the information available in the literature. In this brief report, the models developed by the students are discussed, considering a modification of Borromeo's mathematical modeling cycle and it is analyzed whether their proposals are related with the degree of consolidation of their cognitive reflection. We found that the students did not see the advantage of proposing mathematical models for neither heating nor cooling.

Key words: mathematical modeling, heating and cooling of substances, cognitive reflection

■ Introducción

La modelación matemática es un proceso cíclico que inicia en un fenómeno de la realidad, el cual se traduce al ámbito de las matemáticas y es aquí donde se obtienen los resultados matemáticos que deben ser interpretados y validados en el mundo real, completándose así un período del modelado. La conexión entre la situación real y la matemática involucra necesariamente conocimientos del mundo real que pueden pertenecer a la experiencia cotidiana o a las ciencias naturales y exactas como: la biología, la física o la química. Este aspecto puede ser un gran inconveniente para estudiantes y profesores que se enfrentan a problemas de modelado y es una de las razones por las que la modelación matemática es difícil de aprender y enseñar en las aulas. Además, en la modelación intervienen demandas de tipo cognitivo y competencias matemáticas como, comprender un texto, comunicar información, diseñar estrategias de resolución de problemas, así como trabajo matemático como calcular y razonar.

La modelación matemática ayuda a los estudiantes a comprender mejor el mundo que los rodea y a prepararse para desarrollar sus futuras responsabilidades ciudadanas, entre las que pueden considerarse a las científicas y tecnológicas. La modelación matemática motiva y ayuda al aprendizaje de la matemática escolar, desarrolla en los alumnos competencias matemáticas y contribuye a formar una imagen social positiva, a saber, que la matemática es útil en el mundo real. Estas consideraciones pudieran ser motivos suficientes para incluir problemas de modelado en la enseñanza. Sin embargo, da la impresión que la presencia cada vez más acentuada de la modelación en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática escolar se debe a la prueba PISA, que en esencia evalúa la capacidad de los estudiantes para resolver situaciones del mundo real con argumentaciones sólidas.

Los libros de texto de matemáticas de la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (CONALITEG) de la Secretaría de Educación Pública de México se ocupa de la modelación matemática desde la educación básica, como lo han relatado Quiroz y Rodríguez (2015). Las autoras han usado el ciclo de modelación matemática de Rodríguez (2010) que responde tanto a la Teoría Antropológica de lo Didáctico como a la Teoría de Transposición Didáctica. Este enfoque tiene la finalidad de detectar las praxeologías de la modelación matemática presentes en los seis libros de texto de matemáticas de la educación primaria. En los problemas de modelado de los libros de texto del nivel secundario es común que primero se presenten algunas gráficas para que el estudiante elija aquella que modela el fenómeno en cuestión y enseguida se den los datos “experimentales” para que verifique su elección.

Continuando con la experiencia mexicana, en los problemas matemáticos de los libros de texto del nivel medio superior suele desatenderse los pasos de modelado correspondientes al mundo extra-matemático. En la descripción de la situación problemática se proporciona parte del modelo matemático y se les deja a los estudiantes que lo completen, proponiendo las expresiones matemáticas convenientes y que realicen los cálculos correspondientes (Monterrosas, Ruiz, Slisko y Fuchs, 2018).

Otros autores han analizado las rutas de modelado que elaboran los estudiantes en la solución de problemas complejos de la matemática escolar, Borromeo (2010). En su artículo, esta autora enfatiza los nodos que componen el ciclo de modelado, las tareas cognitivas y trabajo matemático que llevan de uno a otro. En su propuesta es clara la participación de los conocimientos extra-matemáticos, propios de la naturaleza específica del fenómeno a modelar.

En esta comunicación breve se propone una tarea de modelado que involucra el calentamiento y posterior enfriamiento de una masa de agua que inicialmente está a la temperatura ambiente. En ella, estudiantes universitarios son interrogados acerca de la forma en que se relacionan la temperatura del agua y el tiempo del calentamiento o enfriamiento. Seguidamente, ellos llevan a cabo estos dos experimentos y toman los datos. Esta información es el punto de partida de la actividad propuesta, misma que permite observar cómo se desempeñan los estudiantes a través del ciclo de la modelación: ¿qué tipo de modelos proponen?, ¿cómo confrontan sus modelos con la situación real, o sea, con los datos experimentales?, ¿usan sus conocimiento extra-matemático durante el proceso de modelación? El trabajo de los estudiantes se observa a través del ciclo de modelación matemática de Borromeo (2010) que modificamos para la presente investigación. Además, se estudia si el grado de consolidación

de la reflexión cognitiva de los estudiantes está relacionado con sus propuestas y las justificaciones que las sustentan.

■ Marco teórico

La traducción de fenómenos de la realidad (la naturaleza, las disciplinas científicas, la sociedad, la vida cotidiana, entre otros) hacia la matemática y de regreso se denomina ciclo de modelado. Esta conceptualización entre el conocimiento matemático y elementos de naturaleza extra-matemático, fueron denominados por Pollak (1979) como: Resto del mundo y la Matemática, y son el basamento para los diferentes ciclos de modelado propuestos en la literatura.

En el ámbito, Resto del mundo, el ciclo de modelación de Borromeo (2010) considera la “Situación real”, la “Representación mental de la situación” y el “Modelo real” (vea la Figura 1). El primer nodo se refiere a una imagen, un texto o ambos, que presentan la situación problemática a resolver. El tránsito a la “Representación mental de la situación” requiere del entendimiento del problema presentado en el punto de partida; el resolvente construye en su mente la “Situación real”. Enseguida, es necesario Idealizar y simplificar esta imagen mental identificando los aspectos relevantes involucrados; es un proceso consciente e interno que conduce al “Modelo real”. En esta parte del proceso intervienen aspectos correspondientes a la naturaleza de la situación real (Conocimientos extra-matemáticos), los que pueden provenir incluso de la experiencia cotidiana del que intenta resolver el problema de modelado. La Matematización es el puente que conecta al Resto del mundo con el de las Matemáticas. En este tramo, el “Modelo real” se traduce (en términos de figura geométricas, constructos matemáticos, expresiones matemáticas entre otras) al “Modelo matemático” de la situación. El Trabajo matemático subsecuente conduce al quinto nodo del ciclo denominado “Resultados matemáticos”, con el que concluye la actividad correspondiente al ámbito matemático. El retorno al “Resto del mundo” se logra mediante el paso Interpretando; conocimientos extra-matemáticos y el razonamiento matemático conducen al nodo denominado “Resultados reales”. La validación de estos resultados puede sugerir la conveniencia de dar otra vuelta al ciclo. La validación se puede hacer considerando como punto de comparación alguno de los tres primeros nodos del ciclo de modelación.

En la presente investigación, la “Situación real” del ciclo de modelación de Borromeo (2010) es un dispositivo experimental para el calentamiento y posterior enfriamiento de una masa de agua. Estos fenómenos son acompañados de conocimientos extra-matemáticos: cuando el agua se calienta, eventualmente llega a su punto de ebullición y una vez que esto sucede, su temperatura deja de incrementarse. Cuando se permite que esta agua muy caliente se enfríe, en algún instante de tiempo, su temperatura alcanza la del medio ambiente en la que se colocó. Estos conocimientos extra-matemáticos son decisivos en la formulación de la “Representación mental de la situación” y la construcción del “Modelo real”. Ahora, dadas las características experimentales del problema de modelado que proponemos, es necesario agregar el nodo “Datos experimentales”, justo después del “Modelo real”, el cual se alcanza mediante el paso: trabajando experimentalmente. El retorno al “Resto del mundo” se realiza Interpretando los “Resultados matemáticos” en “Resultados físicos”. La Validación de estos resultados se realiza directamente con el nodo “Datos experimentales” (vea la Figura 1).

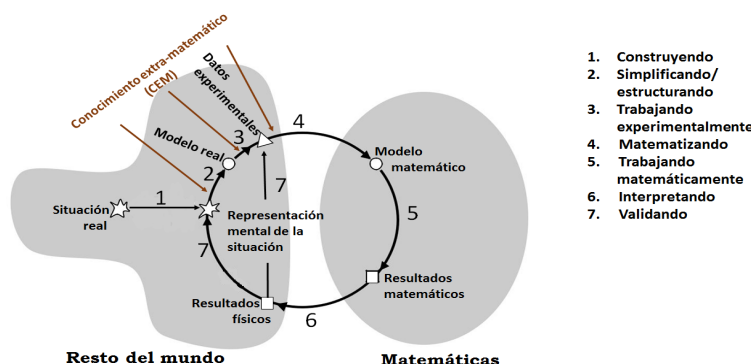


Figura 1. Traducción al español de la Figura 1 del artículo de Borromeo (2010). Los siete pasos indicados en el recuadro constituyen las barreras cognitivas que enfrentan los resolventes de problemas de modelado. Para los fines del presente trabajo, se agregó el nodo “Datos experimentales” y el paso *Trabajando experimentalmente*.

Consideramos como perfil de referencia estudiantil, la reflexión cognitiva, entendida como la capacidad o disposición que tiene una persona para resistirse a dar como respuesta, la primera que le ofrece su mente. Para identificarla se utilizó el test de reflexión cognitiva (TRC) en la versión castellana de López (2012). Es una prueba de lápiz y papel que contiene seis acertijos matemáticos. Los “pensadores rápidos” responden correctamente 1 acertijo y los “pensadores lentos” obtienen de 5 a 6 aciertos. Los que obtienen de 2 a 4 puntos son “pensadores en transición”.

El objetivo

La finalidad de este documento es presentar y analizar los modelos que elaboran estudiantes de física para el calentamiento y posterior enfriamiento de una masa de agua. Además, se estudia la posible influencia de su reflexión cognitiva en los modelos que elaboran y las explicaciones que ofrecen cuando comparan sus predicciones con los datos experimentales que ellos mismos obtienen.

Los estudiantes involucrados

En la encuesta participó un total de 35 estudiantes universitarios, 14 mujeres y 31 hombres. 19 son estudiantes de un programa de física de generaciones 2015 y anteriores (11 mujeres y 8 hombres); 12 son pensadores lentos, 6 están en estado de transición y uno es pensador rápido. A este grupo de estudiantes lo denominamos como Muestra 1 (M1).

Los 16 alumnos restantes son estudiantes de física, generación 2016: 3 mujeres y 13 hombres. 5 son pensadores en transición y 11 son pensadores lentos. A este grupo de estudiantes lo denominamos como Muestra 2 (M2).

El experimento

El experimento se realizó en un laboratorio de enseñanza localizado en la ciudad de Puebla, México, que está a 2,135 m sobre el nivel del mar y consistió del calentamiento y posterior enfriamiento de una masa de agua. La temperatura del medio ambiente registrada durante el experimento fue de 24°C, por lo que dicha temperatura, es la temperatura inicial para el proceso de calentamiento y la temperatura final a la que llega la masa de agua en el proceso de enfriamiento.

Para realizar el experimento se utilizaron los siguientes materiales: una parrilla eléctrica con placa calefactora con agitación magnética marca Corning, una balanza digital marca Ohaus Adventure, 200 ml de agua destilada, dos termómetros de alcohol con una resolución de medio grado Celsius, un cronómetro, dos soportes universales, pinzas de doble nuez, pinzas para bureta o tipo Fisher, una plataforma de elevación, un vaso de precipitados y un agitador magnético.

Con respecto a la ejecución del experimento, los estudiantes encuestados recibieron la siguiente información en forma verbal. Para censar la temperatura del aire del laboratorio, coloque un dispositivo termómetro-soporte, el cual se mantendrá alejado de la parrilla. Luego, determine la masa de 200 ml de agua destilada, viértala en el vaso de precipitados y colóquelo sobre la parrilla eléctrica. Ésta tiene la posibilidad de rotar el agitador magnético con lo que se asegura una distribución uniforme de la temperatura del agua. Coloque un termómetro en la parte central de la masa de agua y fíjelo mediante un soporte universal. Asegúrese que el termómetro quede alejado de la superficie del agua, así como de las paredes y del fondo del vaso de precipitados. Permita que la parrilla trabaje en Heat-5 y Stir-2 y conéctela a la corriente eléctrica. Desde este instante, inicie la medición de la temperatura del agua y el tiempo de calentamiento hasta que se alcance el punto de ebullición. Tome datos cada dos minutos y regístrelos en una tabla. Además, se recomendó a los estudiantes hacer anotaciones describiendo lo que sucede con el agua durante el calentamiento: ascenso de burbujas de aire, corrientes de convección, evaporación del agua, ebullición, entre otros.

Para el enfriamiento del agua, las indicaciones fueron las siguientes: Una vez que el agua haya alcanzado el punto de ebullición, deslice el dispositivo vaso de precipitados-termómetro hacia la plataforma de elevación, la cual debe estar a la misma altura que la parrilla. Entonces, apague y desconecte la parrilla y aléjela de la plataforma. Luego, regrese el cronómetro a cero e inicie la medición de la temperatura del agua conforme se enfría. Finalmente, mida el volumen y la masa final de agua.

En la Figura 2 se muestra el arreglo experimental para el calentamiento y posterior enfriamiento de la muestra de 200 ml de agua destilada.

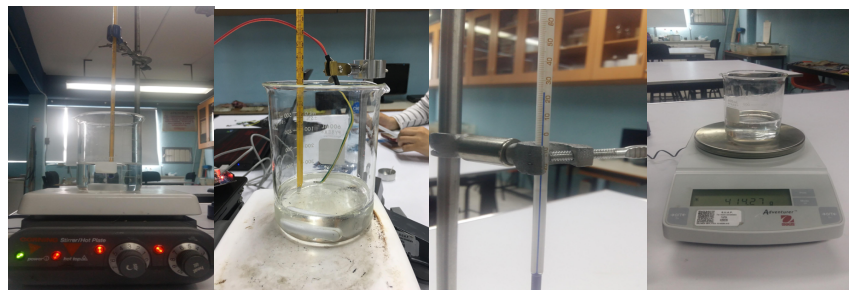


Figura 2. (a) Dispositivo experimental; parrilla, vaso de precipitados, termómetro y soporte universal durante el proceso de calentamiento, (b) Zoom: Vaso de precipitados y termómetro, (c) Dispositivo termómetro-soporte para monitorear la temperatura del medio ambiente y (d) Balanza digital y vaso de precipitados con el agua al concluir el proceso de enfriamiento.

El tiempo requerido para el proceso de calentamiento fue de 38 minutos, así que la ventana de tiempo para observar el proceso de enfriamiento fue al menos del mismo orden. Los datos experimentales obtenidos durante ambos procesos se presentan en las Tablas 1 y 2, respectivamente.

Tabla 1. Datos experimentales correspondientes al proceso de calentamiento de 200 ml de agua destilada.

t (min)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
T (°C)	24.0	27.0	34.0	42.0	50.0	57.0	63.0	69.0	73.0	76.0	79.0	81.0	82.0	83.0	84.0	84.2	84.8	85.0	85.1	85.1

Tabla 2. Datos experimentales correspondientes al proceso de enfriamiento de una masa de agua destilada en un medio ambiente a 24°C

t (min)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
T (°C)	85.0	75.0	69.0	64.0	60.0	56.5	54.0	51.2	49.0	46.0	45.0	43.5	42.0	41.0	39.5	39.0	38.0	37.0	35.5	35.0

■ Método

Previo al trabajo experimental, los estudiantes resolvieron el test de Reflexión Cognitiva. La prueba se contestó en el salón de clases y duró entre 40 y 60 minutos.

En cuanto al trabajo experimental, éste se realizó en una sesión de 150 minutos. El procedimiento experimental seguido se describió en la sección *El experimento*.

Antes de realizar los experimentos, se les pidió a los estudiantes que propusieran una representación gráfica para el calentamiento y otra para el enfriamiento, y que justificaran sus hipótesis. Con este fin, en el caso del calentamiento, se les sugirió que se hicieran las siguientes preguntas: ¿Qué le pasa al agua cuando se calienta? ¿Cómo varía la temperatura de la masa de agua conforme transcurre el tiempo, dado que el agua está inicialmente a la temperatura ambiente? Para el enfriamiento, la sugerencia fue que se preguntaran ¿Cómo será la variación de la temperatura de la masa de agua con el tiempo, dado que al inicio está hirviendo y se encuentra colocada en el medio ambiente?

Una vez elaboradas sus hipótesis, se recogieron los documentos para su posterior análisis y se procedió a realizar el experimento para la obtención de los datos

En cuanto a los datos experimentales, se les pidió a los estudiantes registrarlos en sendas tablas de datos, graficarlos, contrastar dichas gráficas con sus hipótesis y considerar la información existente en la literatura. En caso de haber diferencias se les sugirió pensar en los posibles factores involucrados. Por ejemplo: (1) Si el flujo de calor aportado a la masa de agua fue uniforme, (2) Si los datos de temperatura dependen de la masa de agua utilizada, (3) Si influye la temperatura del ambiente, y otros que ellos consideren relevantes. Finalmente, se les pidió elaborar sus conclusiones. Esta actividad fue dejada de tarea.

■ Resultados

En términos generales, los 35 estudiantes encuestados lograron simplificar y estructurar el fenómeno de calentamiento y el de enfriamiento, lo que les permitió identificar las variables que los describen y proponer, a través de gráficos, un “Modelo real” para cada uno de ellos. Para el calentamiento del agua, alrededor del 60% de los estudiantes propuso el “Modelo real” que no describe la evolución de la temperatura del agua con el tiempo, mientras que, aproximadamente, el 70% propusieron el modelo apropiado para el enfriamiento del agua caliente en presencia de su medio ambiente. Esto significa que el calentamiento de sustancias es menos intuitivo que el enfriamiento; lo que no deja de llamar la atención porque estos dos fenómenos son experiencias de la vida cotidiana.

A continuación, se discuten los “Modelos reales” presentados por las dos muestras de estudiantes universitarios y su posible correlación con el test de reflexión cognitiva (TRC).

La Muestra 1, conformada por 19 alumnos, tiene una calificación promedio de 4.4 en el TRC, que los ubica como “pensadores en transición”; son personas con algo de control sobre su reflexión cognitiva. No aceptan, de inmediato, la primera solución que les ofrece la mente, sino que se detienen a pensar en la solución, es decir, ellos son estudiantes que van camino a convertirse en “pensadores lentos”. Los 16 alumnos de la Muestra 2 alcanzaron una puntuación promedio de 4.9. Globalmente, son “pensadores lentos”, con más posibilidad de proponer los modelos más certeros para el calentamiento y el enfriamiento de una masa de agua. La Tabla 3 presenta valores promedio obtenidos por la Muestra 1 y la Muestra 2 en el test de reflexión cognitiva (TRC).

Clasificación	Número de Alumnos	
	M1	M2
Pensador rápido	1	0
Pensador en transición	6	5
Pensador lento	12	11

Tabla 3. Grupos clasificatorios de reflexión cognitiva de las dos muestras de estudiantes universitarios. Los pensadores rápidos obtienen de 0 a 1 acierto y los lentos de 5 a 6; el número de aciertos de los pensadores en transición es de 2 a 4.

Los 35 Modelos reales estudiantiles para el calentamiento de la masa de agua se agruparon en tres categorías, considerando en qué medida, contienen los siguientes rasgos característicos del calentamiento del agua: (1) una vez que se estabiliza la entrega de energía de la parrilla a la masa de agua, la temperatura del agua cambia linealmente con el tiempo y este comportamiento se mantiene hasta que el agua comienza a hervir. Una vez que alcanza su punto de ebullición la temperatura ya no cambia con el tiempo porque en este estado, todo el calor suministrado se utiliza para transformar porciones de agua en ebullición en vapor de agua. En la Tabla 4 se describen las categorías.

CATEGORÍAS		
C1	C2	C3
<u>Curva cóncava</u> para la temperatura del agua como función del tiempo de calentamiento.	<u>Curva convexa</u> para la temperatura del agua como función del tiempo de calentamiento.	<u>Línea recta con pendiente positiva</u> para la temperatura del agua como función del tiempo de calentamiento.

Tabla 4. Categorías para los Modelos reales propuestos por los estudiantes universitarios de las muestras M1 y M2 para el calentamiento de la masa de agua. La curva involucrada en la Categoría C3 describe apropiadamente el calentamiento y la que menos lo hace es la curva de la Categoría C2.

Los Modelos reales propuestos para el enfriamiento del agua en ebullición se agruparon en otras tres categorías. Éstas se presentan en la Tabla 5.

CATEGORÍAS		
K1	K2	K3
<u>Exponencial decreciente</u> para la temperatura del agua como función del tiempo de enfriamiento.	<u>Curva cóncava</u> para la temperatura del agua como función del tiempo de enfriamiento.	<u>Línea recta con pendiente negativa</u> para la temperatura del agua como función del tiempo de enfriamiento.

Tabla 5. Como en la Tabla 4 solo que ahora, para el enfriamiento de la masa de agua. La función involucrada en la Categoría K1 es la que describe el enfriamiento del agua en ebullición en contacto térmico con su medio ambiente.

La Tabla 6 muestra la distribución (por categorías) de los 35 Modelos reales estudiantiles para el calentamiento y el enfriamiento de una masa de agua.

CLASIFICACIÓN	C1	C2	C3	K1	K2	K3
MUESTRA 1	12/19	7/19	0/19	11/19	8/19	0/19
MUESTRA 2	9/16	5/16	2/16	10/16	3/16	3/16

Tabla 6. Distribución por categorías de los modelos matemáticos propuestos por los 35 estudiantes de física encuestados. Calentamiento (letra C), enfriamiento del agua (letra K).

La respuesta correcta para el calentamiento está en la categoría C3 y la del enfriamiento en la categoría K1.

En relación al proceso de calentamiento, de la Tabla 6 se observa que 21 de los 35 estudiantes propusieron una curva cóncava (Categoría C1). 14 de ellos piensan que el agua incrementará su temperatura con el tiempo de manera indefinida y 7 tienen la idea que, en algún instante de tiempo, el agua alcanzará una temperatura constante (vea las figuras Figura 3a y Figura 3b). De esta misma tabla se desprende que 2 de los 35 estudiantes proporcionaron el “Modelo real” apropiado, aunque solo uno de ellos sabe que el agua en ebullición no cambia su temperatura, aunque se le siga proporcionando calor (vea la Figura 3c). Algunos de estos estudiantes mencionaron el término “temperatura de ebullición”, aunque no la usaron apropiadamente en sus predicciones (“Modelo real”).

Ahora, hablando del enfriamiento y considerando la Tabla 6, se tiene que 21 de 35 alumnos propusieron el modelo correcto (Categoría K1). En la Figura 4a se muestra uno de estos modelos; observe que el estudiante sabe que, en algún instante de tiempo, el agua alcanzará la temperatura del medio ambiente y permanecerá fija en ese valor. De esta tabla también se desprende que 11 alumnos propusieron una curva cóncava (categoría K2); 4 de ellos consideran que la temperatura del agua desciende conforme transcurre el tiempo; incluso, que puede ser cero Celsius (vea las Figuras 4b y 4c). Se observa que el Estudiante E4 no se percató que se podría seguir midiendo la temperatura del agua para tiempos mayores que el instante en que alcanzó 0°C. El estudiante E2 piensa que, en algún instante de tiempo, el agua alcanzará 0°C y que no cambiará más. Llama la atención que hayan realizado estas predicciones porque ellos constataron que la temperatura del medio ambiente no era cero grados Celsius. No relacionan la “Situación real” con lo que la mente les ofrece como solución. Este comportamiento es inesperado porque ellos son pensadores lentos.

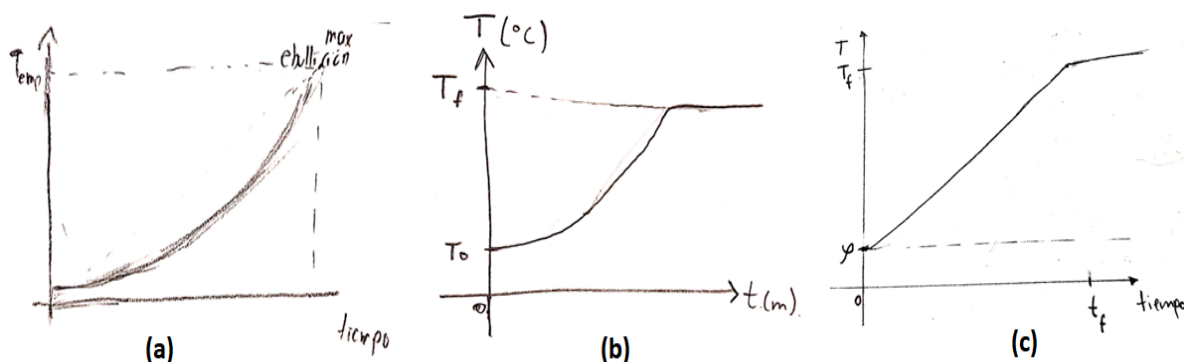


Figura 3. Calentamiento de 200 ml de agua. “Modelos reales” de la Categoría C1: (a) estudiante E1 (TRC=4) y (b) estudiante E2 (TRC=5). “Modelo real” de la Categoría C3: (c) estudiante E3 (TRC=4).

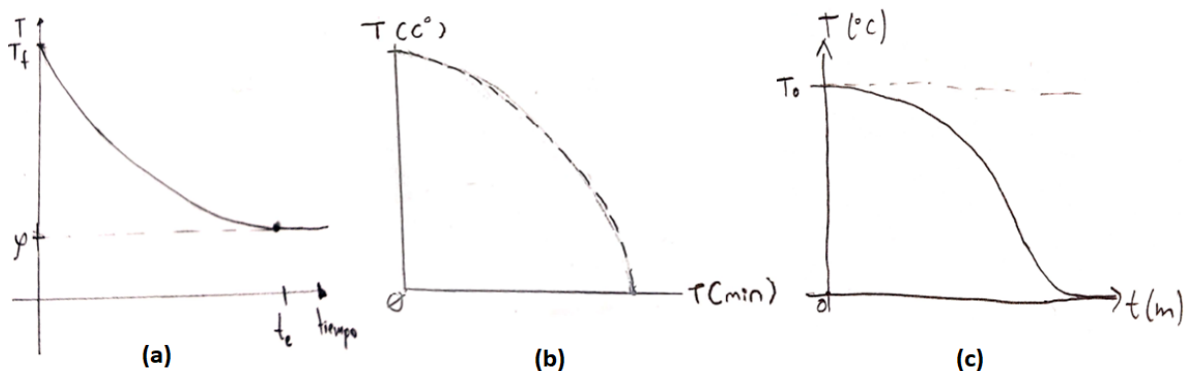


Figura 4. Enfriamiento de 200 ml de agua. (a) “Modelo real” de la Categoría K1 propuesto del estudiante E3 (TRC=4). Dos Modelos de la Categoría K2: (b) estudiante E4 (TRC=5) y (c) estudiante E2 (TRC=5).

Es menester comentar que no observamos una correlación evidente entre los puntajes promedio del TRC y las categorías, tanto del calentamiento como del enfriamiento. Por ejemplo, en el caso del enfriamiento y considerando la Muestra 2, las categorías K1 (modelo correcto) y K2 comparten un puntaje TRC de 4.93, que no está apreciablemente alejado del puntaje 4.80 de la categoría K3, que es el modelo lineal propuesto por los estudiantes encuestados. Algo similar ocurre con el calentamiento del agua. La Categoría C3 (modelo correcto) tiene un puntaje TRC de 4.33 y la C2 de 5.00. Un desempeño similar se observa en la Muestra 1, aunque con puntajes promedio menores.

Ahora, en relación con los reportes de los alumnos y considerando los datos experimentales del enfriamiento. Aunque algunos estudiantes mencionan la ley de enfriamiento de Newton, no la usaron como “Modelo matemático” para obtener los “Resultados matemáticos” que les permitieran completar el ciclo de modelación al comparar los “Resultados físicos” con los “Datos experimentales”. Se esperaba que en su reporte, ellos incluyeran y discutieran la Figura 5 que más adelante se presenta.

La ley de enfriamiento de Newton establece que el cambio de la temperatura de una sustancia en un medio ambiente a la temperatura T_a está dada por la expresión:

$$\Delta T(t) = T(t) - T_a = c \exp\{-t/\tau\}$$

Para el enfriamiento de la muestra de agua, $T_a = 24^\circ\text{C}$, es la temperatura del aire del salón de clase, $\tau = 11.2 \text{ min}$ es el tiempo característico del enfriamiento y $c = 61^\circ\text{C}$ es la diferencia inicial de temperatura entre el agua y el aire circundante. Para identificar los valores de los parámetros c y τ se usaron los dos primeros pares de datos de la Tabla 2. Observe que el tiempo de medición de la temperatura del agua hirviendo en su proceso de enfriamiento es suficiente, porque es más del triple del tiempo característico de este fenómeno. En la Figura 5 se presentan los datos del enfriamiento y su comparación con el modelo de Newton. La línea recta con pendiente cero representa la temperatura del aire del laboratorio mientras transcurría el experimento, $T(t) = 24^\circ\text{C}$.

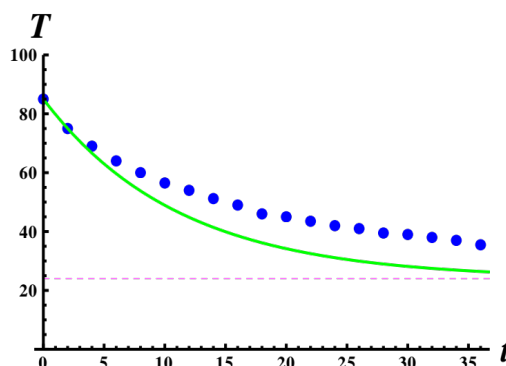


Figura 5. Curva de enfriamiento de una masa de agua destilada desde el punto de ebullición hasta una temperatura cercana a la del medio ambiente, 24°C . El registro de los datos inició cuando el agua estaba a 85°C . El tiempo se da en minutos y la temperatura en grados Celsius.

Ahora, en relación con el calentamiento de 200 ml de agua. En sus reportes finales, los estudiantes no le prestaron atención a la evidente contradicción entre sus Modelos reales y los datos experimentales que ellos mismos obtuvieron. Aunque en este caso, el “Modelo matemático” era más simple de identificar y proponer, ningún estudiante lo obtuvo. Ellos debieron de considerar un gráfico como el dado en la Figura 6. La línea recta con pendiente $\lambda = 3.6^\circ\text{C}/\text{min}$ representa el calentamiento lineal del agua una vez que la superficie de la parrilla y la del vaso de precipitados (con el agua) alcanzan el estado estacionario. En este caso, la temperatura varía con el tiempo como, $T(t) = \lambda t + b$, con $b = 19.5^\circ\text{C}$. Para obtener los valores de λ y b se consideraron el tercer y séptimo par de datos de la Tabla 1. La línea recta con pendiente cero da cuenta de la forma que varía la temperatura del agua en estado de ebullición, $T(t) = 85.1^\circ\text{C}$.

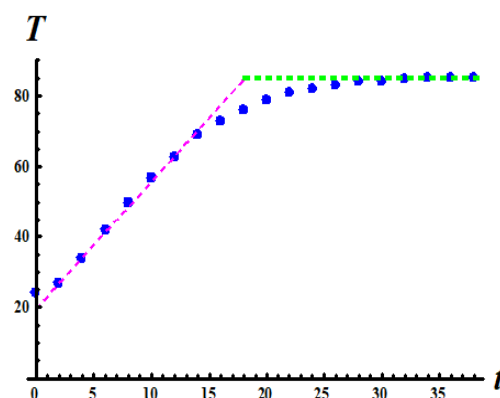


Figura 6. (a) Curva de calentamiento de 200 ml de agua destilada desde la temperatura ambiente (24°C) hasta su punto de ebullición (85.1°C). El tiempo se da en minutos y la temperatura en grados Celsius.

■ Conclusiones

Del presente estudio se concluye que el fenómeno de calentamiento de una masa de agua es poco familiar, incluso en estudiantes de física; solo 2 de 35 propusieron una línea recta con pendiente positiva como “Modelo real” para la variación de la temperatura con el tiempo. Este resultado llama la atención porque en los problemas de los libros de texto de matemáticas de la CONALITEG del nivel secundario, se usa el calentamiento de sustancias como contexto para la enseñanza y el aprendizaje de la línea recta, SEP (2017). A pesar de ello, pareciera que los estudiantes no relacionan estos problemas matemáticos con su realidad, por lo que sería conveniente que realicen actividades experimentales de modelado como la que proponemos. Esto les permitiría entender cómo funciona el mundo real y les ofrecería más posibilidades de enfrentar exitosamente, los problemas de modelación que tienen como punto de partida, situaciones reales provenientes de las ciencias naturales, exactas y la ingeniería.

No es claro que el puntaje obtenido por los estudiantes en el test de Reflexión Cognitiva esté relacionado con su propuesta de “Modelo real”, tanto en el calentamiento como el enfriamiento, ya sea a nivel individual o en términos de las categorías propuestas para estos modelos. Este resultado puede deberse al papel relevante que juegan los conocimientos extra-matemáticos en la elaboración de estas predicciones. Monterrosas y colaboradores (2018) encontraron que tal relación si llega a presentarse cuando se observa el desempeño de los estudiantes únicamente al ámbito matemático del ciclo de modelación.

De los reportes elaborados por los estudiantes encuestados se desprende que, ellos trabajaron únicamente en la porción del ciclo de modelación que involucra al Resto del mundo (Borromeo, 2010). Aunque, en el caso del enfriamiento de la masa de agua, algunos mencionaron a la ley de enfriamiento de Newton, no vieron la necesidad de buscar una expresión matemática para la temperatura como función del tiempo y de esta manera contestarse la pregunta: ¿cuánto tiempo es necesario esperar para que el agua que inicialmente está 85.1°C , alcance la temperatura del medio ambiente, 24°C ? En relación al calentamiento, algunos estudiantes aceptaron que su “Modelo real” no se correspondía con la “Situación real”. Ninguno calculó la expresión matemática para la recta con pendiente positiva que modela el calentamiento de los 200 ml de agua destilada considerada en el experimento.

Llama la atención que los estudiantes encuestados no hayan usado los dos “Modelos matemáticos” antes citados porque son de su conocimiento a través de materias de matemáticas que ya han cursado. Aunque la presente investigación involucra únicamente a 35 estudiantes de física, los resultados discutidos sugieren que es conveniente trabajar conjuntamente, autores de libros de texto de matemáticas y maestros de las diferentes áreas del conocimiento, en la elaboración de problemas de modelado que tengan como punto de partida, situaciones del mundo real que involucra la experimentación.

■ Referencias bibliográficas

- Blum, W., Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?, *Journal of Mathematical Modelling and Application* 1, 45-58.
- Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behavior, *Journal fur Mathematik didaktik* 31, 99-118.
- López, J. (1979). Evolución de la reflexión cognitiva en la universidad, *Revista Divulgación Matemática* 5, 17-18.
- Pollak, H. (2016). The interaction between mathematics and other school subjects, in UNESCO, *New Trends in Mathematics Teaching IV* (pp. 232-248), Paris: UNESCO.
- Monterrosas, Y., Ruiz, H., Slisko, J., Fuchs, L. (2018). Soluciones estudiantiles de un problema de movimiento propuesto en un libro de texto de geometría analítica: influencias del razonamiento lógico y de reflexión cognitiva, *Latin-American Journal of Physics Education* 12, 2303-1-2303-11.

- Quiroz, S., Rodríguez, R. (2015). Análisis de praxeologías de modelación matemática en libros de texto de educación primaria, *Educación Matemática* 27, 45-77.
- Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: un caso de las ecuaciones diferenciales, *Relime* 13 (4-I), 191-210.
- Secretaría de Educación Pública (2017). *Aprendizajes claves para la educación integral, plan y programas para la educación básica*, Ciudad de México, México, Autor.