

# RESIGNIFICACIÓN DE LA DERIVADA EN UNA SITUACIÓN ESCOLAR CON PERSPECTIVA DE DIALÉCTICA EXCLUSIÓN - INCLUSIÓN: UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO

## RESIGNIFICATION OF THE DERIVATIVE IN A SCHOOL SITUATION WITH A PERSPECTIVE OF EXCLUSION - INCLUSION DIALECTICS: A SOCIO-EPISTEMOLOGICAL STUDY

José Luis Morales Reyes, Francisco Cordero Osorio  
Cinvestav-IPN (México)  
luis.morales@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx

### Resumen

En este artículo se discuten aspectos teóricos metodológicos, como parte de una investigación en ciernes, del diseño de una situación escolar que se socializará entre profesores de matemática en ejercicio. La base del diseño consiste en resignificar la derivada a través de sus usos en comunidades de conocimiento matemático de la gente: en la escuela, en el trabajo o la profesión, y en las vidas cotidianas. La socialización, con perspectiva de dialéctica exclusión-inclusión, proveerá datos de los procesos de valoración de los usos de la derivada entre los profesores: aproximación, variación y transformación. La investigación se sustenta con la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.

**Palabras clave:** derivada, resignificación, diseños, usos

### Abstract

This article, as part of an ongoing research, discusses theoretical-methodological aspects of the design of a school situation that will be socialized among practising mathematics teachers. The design is based on the resignification of the derivative through its uses in communities of people with mathematical knowledge: at school, at work or in a profession, and in our daily life. Socialization, with an exclusion-inclusion dialectical perspective, will provide data from the processes of the assessment of the derivative uses among teachers: approximation, variation and transformation. The research is based on the Socio-Epistemological Theory of Mathematics Education.

**Key words:** derivative, resignification, designs, uses

## ■ Introducción

Este escrito corresponde a la génesis de una investigación que pretende resignificar la derivada a través de sus usos en comunidades de conocimiento matemático. Para esto, se diseñarán situaciones escolares, las cuales se socializarán con profesores universitarios de matemática que se encuentran en ejercicio.

La intención de esta investigación es contribuir al rediseño del discurso matemático escolar; el cual corresponde a un constructo de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, la cual se asume como fundamento teórico de este trabajo. Desde esta perspectiva teórica se reconoce como problemática de la enseñanza y aprendizaje de la matemática al discurso matemático escolar (dME) (Cantoral, Moreno-Durazo & Caballero-Pérez, 2018); el cual, por sus características, soslaya al docente de la construcción del conocimiento matemático, imponiendo significados, procedimientos y argumentaciones que delimitan lo que está bien o mal dentro de la enseñanza y aprendizaje de la matemática (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015).

Parte de la relevancia de la investigación planteada radica en rescatar las situaciones específicas donde emerge el conocimiento matemático y que el dME ha olvidado (Cordero et al, 2015). En este caso específico, se asumirá lo establecido por Cordero (2001), quien menciona que el concepto de derivada puede ser reconstruido a través de tres situaciones distintas: *aproximación, variación y transformación*.

En este escrito se aborda una revisión bibliográfica de estudios relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la derivada, además se explicitan los fundamentos teóricos de la investigación, y se mencionan algunos elementos metodológicos en relación al diseño de las situaciones escolares, así como las primeras posibles tareas que compondrán el diseño.

## Revisión bibliográfica

La derivada es uno de los conceptos fundamentales del cálculo (Rosado y Cordero, 2006; Sánchez, García y Llinares, 2008), sin embargo, como señala Cordero (2001), un fenómeno didáctico con relación a la derivada consiste en que el estudiante no incorpora significados a la misma, aunque sabe que la derivada es la pendiente de una recta. En muchos de los casos, se considera solo como una herramienta que los provee de algoritmos eficientes, a los cuales hay que buscarles aplicación (Rosado y Cordero, 2006).

Sánchez et. al (2008) sostienen que el fondo de la cuestión radica en que los alumnos no han construido un significado adecuado de la derivada, y esa construcción parcial que se realiza durante los primeros años puede generarles dificultades en los cursos de cálculo. Aunque, es importante destacar, que estos autores mencionan que los significados que se deseen desarrollar sobre la derivada dependerán de las perspectivas teóricas que asuman los investigadores que se propongan estas tareas.

En ese sentido, en la literatura de la disciplina Matemática Educativa se pueden encontrar diversas investigaciones relacionadas con la derivada. Entre ellas, podemos identificar algunas enfocadas en errores y dificultades que tienen los estudiantes en su aprendizaje, Sánchez et al. (2008) afirman que ese fue el objetivo de las primeras investigaciones realizadas en este tema. Entre ellas, se pueden mencionar las siguientes:

Badillo (2003) identifica algunas limitaciones de aprendizaje en la comprensión gráfica de  $f(x)$ ,  $f'(a)$  y  $f'(x)$  como: a) confusión entre la derivada en un punto y la función derivada, b) la reducción de la expresión de  $f'(x)$  a la ecuación de la recta tangente y c) la gráfica de  $f'(x)$  a la de la recta tangente. Además, destaca que comprender la idea de función derivada en un punto no necesariamente repercute en comprender la idea de función derivada,

aunque menciona que aquellos sujetos que comprendían la idea de función derivada parecía que entendían la de derivada de la función en un punto.

Otro estudio en esa misma línea es el de Orton (1983), mencionado por Sánchez et. al (2008), quien detectó los errores que comenten los estudiantes en tareas de diferenciación, y los clasificó en:

- Estructurales: relativo a los conceptos involucrados.
- Arbitrarios: cuando el estudiante se comporta arbitrariamente sin tomar en cuenta los datos del problema.
- Manipulación: si bien los conceptos implicados pueden ser comprendidos.

Adicionalmente, también se encuentran estudios relacionados con el conocimiento matemático que tiene los profesores sobre la derivada. Entre ellos Garrido (2014), quien exploró la comprensión acerca del concepto de derivada de una función, con once profesores de cálculo de nivel medio superior. Su intención era determinar la articulación entre la parte conceptual (comprensión de la definición, de la interpretación geométrica, de la derivada como razón de cambio) y algorítmica (reglas de derivación y regla de la cadena) por parte de los profesores en la resolución de problemas.

Garrido (2014) concluye destacando que los profesores “conciben el proceso de derivación como la obtención de una fórmula a partir de otra mediante la aplicación formal de las reglas de derivación y no como el proceso para obtener la función derivada apoyado en un análisis previo sobre la derivabilidad” (p. 93).

Otro tipo de estudios que se pueden encontrar sobre la derivada son aquellos relacionados con las concepciones que tienen acerca de esta. Entre ellos, se puede mencionar el realizado por Bingolbali, Monaghan & Roper (2007) quienes muestran que las concepciones de los estudiantes de Ingeniería Mecánica y sus preferencias por la derivada se desarrollan en dirección de los aspectos de la tasa de cambio mientras que las de los estudiantes de Matemáticas se desarrollan en dirección de los aspectos de la tangente, además, señalan que los estudiantes de Ingeniería Mecánica ven las matemáticas como una herramienta y requieren los aspectos de aplicación en su curso.

Se puede notar que las investigaciones mencionadas destacan la poca significación que tienen sobre la derivada tanto docentes como estudiantes. Entendiendo significación, en estos casos, como el manejo de una expresión analítica, del límite del cociente incremental, o de la interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente. Por ello, dichas investigaciones señalan la necesidad de articular entre las distintas definiciones de derivada, sus sistemas de representación y entre la derivada de una función en un punto y la función derivada.

Por otro lado, investigaciones como la de Cantoral, Molina y Sánchez (2005) señalan la predicción como una práctica social para ahondar en la derivada, entiendo predicción como una actividad racional que permite determinar el estado futuro de un sistema, de un objeto o de un fenómeno con base en el estudio sistemático de las causas que lo generan y los efectos que lo producen. Desde la perspectiva de estos autores destaca el papel que fungen el pensamiento y el lenguaje variacional para estudiar la derivada.

Montiel (2005) destaca que los trabajos enmarcados en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa abandonan el acercamiento a la derivada a “partir de la definición de límite del cociente incremental y la explicación de la secante que deviene tangente”.

En este sentido, Cordero (2008) menciona que en cálculo podemos distinguir dos escenarios, a saber: el Cálculo como un saber de la Obra Matemática y Cálculo Escolar (ver figura 1). Y afirma que de no apreciarse la diferencia entre esos saberes se pueden concebir planteamientos ingenuos de la problemática de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

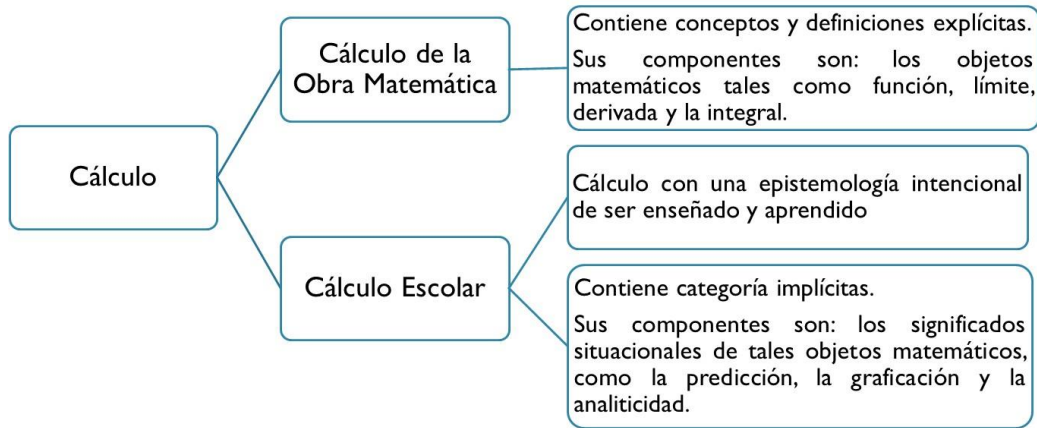


Figura 1. Escenarios en Cálculo. Elaboración propia, basado en Cordero (2008).

Debido a lo anterior, en esta investigación se planteará la resignificación de la derivada a través de tres situaciones: *aproximación, variación y transformación*.

Cabe destacar que, como menciona Cordero (2008), resignificación no es establecer un significado en un contexto, para que posteriormente se busque otro en otro contexto, y de esta manera se resignifique lo ya significado, sino es la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano.

### ■ Fundamento teórico

Este trabajo se enmarca en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Cantoral (2013) menciona que esta asume la legitimidad de toda forma de saber; sea este popular, técnico o culto, pues considera que ellas, en su conjunto, constituyen la sabiduría humana. Además, Cordero et. al (2015) mencionan que dicha teoría reconoce una epistemología diferente a la del conocimiento matemático centrado en el objeto: la construcción social del conocimiento matemático (CSCM), lo que ha permitido criticar al dME que ha fundamentado la matemática escolar.

Además, Soto (2014) menciona que Bourdieu en la década de los setenta caracterizó un tipo de exclusión a partir de la imposición de significados arbitrarios legítimos socialmente, que denominó violencia simbólica. En la matemática que se enseña en las instituciones educativas existe un fenómeno que se comparte de manera similar; en el intento por una matemática para todos, es decir una inclusión, se ha considerado una epistemología dominante del conocimiento que ha impuesto argumentaciones, significados y procedimientos (Cordero, et. al, 2015); fenómeno que dentro del posicionamiento teórico asumido se denomina discurso matemático escolar.

Desde esta perspectiva se requiere el rediseño del dME; es decir, es necesario conocer, revelar y valorar el uso del conocimiento matemático de la obra, de la escuela, del trabajo y de la gente, todo ello en una relación horizontal y recíproca. De acuerdo a Cordero (2017) “eso será el marco de referencia del rediseño del dME, o sea, el cambio educativo de la matemática, acompañado siempre del Programa Académico Permanente, el cual valorará los procesos de transformación del dME”.

Adicionalmente Cordero (2016) menciona que dichos procesos serán concretamente lo que se denominará diseños de situación escolar de socialización, donde sucederán los aprendizajes de las resignificaciones de la matemática, plasmadas en procesos permanentes (usos y significados) en contraparte de objetos terminales (conceptos y definiciones).

Para ello, Cordero (2017) propone el programa socioepistemológico denominado *Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA)*, el cual trabaja en dos líneas simultáneas, a saber: resignificación del conocimiento matemático e impacto educativo (ver figura 2). En la primera, se busca determinar cuáles son los usos del conocimiento matemático en distintas comunidades; y en la segunda se busca intervenir en el proceso educativo a través del diseño de situaciones en las que se resignifique el conocimiento matemático. Es en esta última línea de trabajo en la que se desarrolla la investigación que se presenta en este escrito.

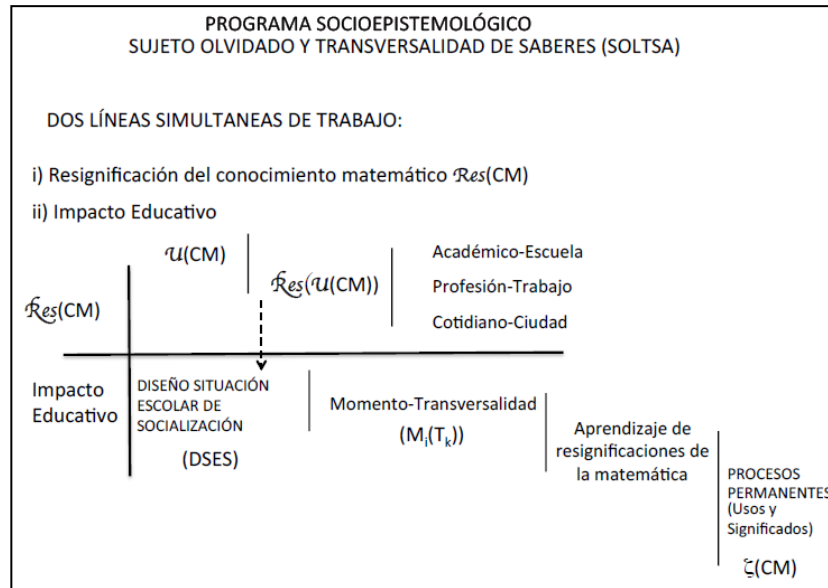


Figura 2. Programa socioepistemológico SOLTSA (Cordero, 2017).

Por otro lado, para dar cuenta de las valoraciones que realicen los docentes sobre la resignificación de la derivada, se recurrirá a la dialéctica exclusión – inclusión (ver figura 3) (Soto, 2014; Medina, 2019). Así, al entender los procesos de exclusión e inclusión como dialécticos, se señala que uno no vive sin el otro, además que la exclusión será caracterizada por los elementos del dME y la inclusión por la CSCM (Soto, 2014).

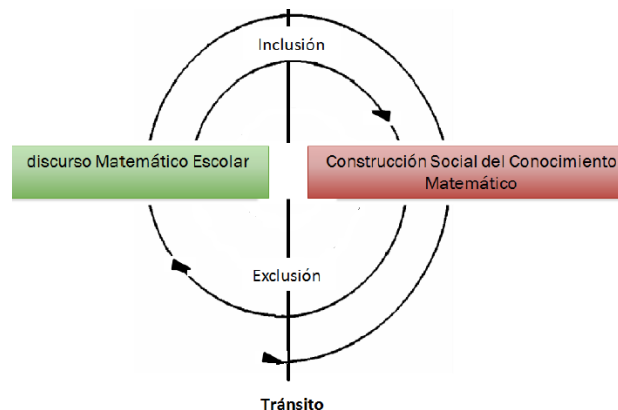


Figura 3. Modelo de la dialéctica Exclusión – Inclusión (Soto, 2014).

Soto (2014) afirma que, para lograr el tránsito dialéctico anterior, se requiere de tres condiciones del discurso matemático escolar y de la construcción social del conocimiento matemático, lo que permitirá la transformación. A continuación se describen cada uno de ellos:

1. Confrontación de argumentaciones de la situación específica y la matemática escolar: permite observar la continua confrontación entre los argumentos de los fenómenos estudiados y los argumentos que provienen del dME. Donde en general se vuelve al dME, demostrando la hegemonía en el discurso y la consideración de la pluralidad epistemológica sólo en momentos que coincidan con los argumentos, significaciones y procedimiento impuestos por el sistema de razón dominante.
2. Interacción de argumentaciones significaciones y procedimientos: Se señala que se debe cuidar de estas tres componentes ya que si una se aloja en el dME, probablemente no desarrollaran una CSCM.
3. La institucionalización como mecanismo de la dialéctica: es un mecanismo que se debe controlar, en el sentido que puede o no estar centrado en un objeto o en una práctica. Desde esta perspectiva nos direccionaríamos hacia las prácticas. De esta forma podríamos manipular el tránsito de la exclusión a la inclusión a la CSCM.

Estos tres ejes se conjugan para hacer funcionar la dialéctica entorno al conocimiento matemático, es decir el tránsito dialéctico anteriormente expuesto (Medina, Cordero y Soto, 2018; Medina, 2019).

### ■ Diseño de situación escolar de socialización

Se denominan diseños de situación escolar de socialización (DSES) a aquellos diseños que se basan en una epistemología que favorece los usos del conocimiento matemático, en contraparte de aquellos que promueven la emulación de un concepto; además, estos diseños requieren de una perspectiva teórica, que por una parte oriente el planteamiento del diseño y por otra permita analizar cómo fue el proceso de resignificación de los participantes; en el caso de esta investigación dicha perspectiva es la dialéctica exclusión-inclusión. De manera específica, la epistemología que se toma en este tipo de diseños es lo que se ha denominado Socioepistemología del Cálculo: construcción de lo matemático (ver figura 4), cabe mencionar que para efectos de la resignificación de la derivada se tomarán las situaciones: variación, transformación y aproximación.

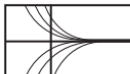

Construcción de lo matemático	Situaciones			
	Variación	Transformación	Aproximación	Selección
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos	Límite Derivación Integración Convergencia	Patrón de adaptación
Procedimientos	Comparación de dos estados $f(x+h) - f(x) = ah$ $a = f'(x)$	Variación de parámetros $y = Af(Bx + C) + D$	Operaciones lógicas formales (cociente) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$	Distinción de cualidades $\nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = 0$
Instrumentos	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Formas analíticas	Lo estable
Argumentación / Resignificación	Predicción $E0 + \text{variación} = Ef$	Comportamiento tendencial 	Analiticidad de las funciones $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \dots$	Optimización 

Figura 4. Socioepistemología del Cálculo y Análisis (Cordero, Del Valle y Morales, 2019)

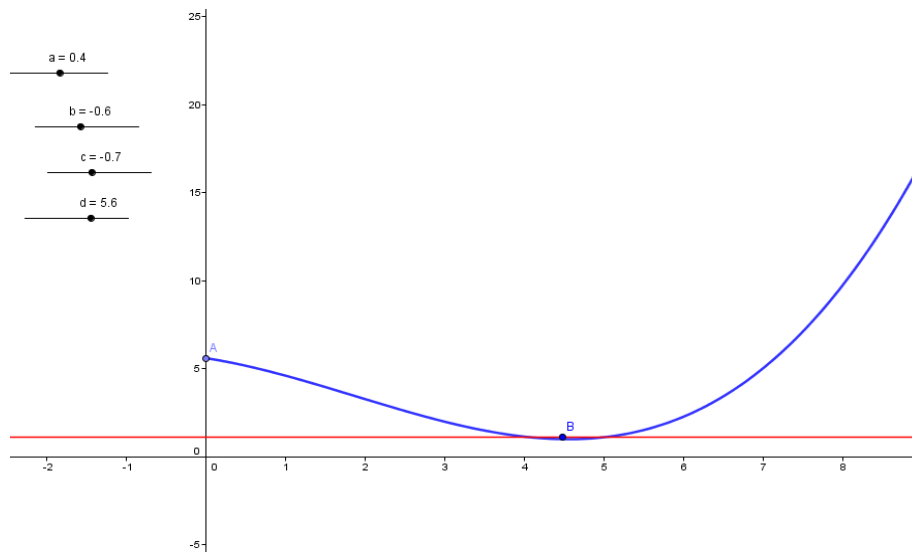
La cuestión es diseñar situaciones basadas en una epistemología que favorezca los usos y significados de la derivada. En ese sentido, Cordero (2001) menciona que el concepto de derivada consiste de varios significados: el límite de una función, la variación continua de cierta cantidad que fluye y la variación de parámetros de una función para organizar comportamientos. Y las resignificaciones de la derivada suceden cuando se ponen en juego los instrumentos que subyacen en las significaciones de la derivada, donde los funcionamientos y las formas de los instrumentos se confrontan para generar nuevos usos y resignificaciones de la derivada: cantidades de variación continua, instrucción que organiza comportamientos y función analítica (función de clase C infinito).

Para la articulación de esos instrumentos se retomará lo reportado por Pérez-Oxté y Cordero (2019) como elemento inicial para la construcción del diseño. Estos autores reportan la resignificación de usos del conocimiento matemático que emergen en una comunidad de Ingenieros Químicos Industriales que anticipan fallas en los transformadores eléctricos a través del análisis de comportamientos gráficos. Para ello construyen gráficas con el historial de las concentraciones de ocho elementos químicos registrados a lo largo del tiempo. De manera que, estos ingenieros deben buscar generar cierto comportamiento ideal para garantizar que el transformador se encuentra en buen estado. Un comportamiento ideal sería cuando no se presentan fluctuaciones extremas.

Específicamente en esta investigación se enfoca la atención en la resignificación de la derivada en esa comunidad de ingenieros para después socializarla con la perspectiva de la dialéctica exclusión-inclusión.

Cabe mencionar que la etapa en la que se encuentra la investigación es la elaboración de las situaciones que compondrán el diseño, y hasta el momento se ha trabajado en la situación de transformación, la cual se presenta a continuación:

Suponga que la siguiente gráfica representa dicha situación y que para que el transformador esté en buen estado la gráfica debe estar muy cerca de la recta dada. La curva es modelada por  $y = 0.03x^3 - 0.63x^2 + 3.82x + 0.96$  y la recta dada es tangente a la curva en el punto B. ¿Qué modificaciones debe experimentar la gráfica para que el transformador no se dañe? Bajo las condiciones dadas: ¿Cuál sería la ecuación de la curva que representa el transformador ideal? ¿Cuál sería la ecuación que representa el transformador que requiere de mayor intervención?



De manera particular esta situación confronta lo usual del discurso matemático escolar, en el cual se da la ecuación de una curva, se señala un punto y se busca la ecuación de la recta tangente en ese punto. Adicionalmente, se pretende que las situaciones que compondrán el diseño, permitan que el límite de un cociente se resignifique a través de la predicción, la graficación y la analiticidad: la derivada y la recta tangente debaten contra la comparación de dos estados y la sucesión simultánea de las derivadas, pero también debaten contra la variación de parámetros y el comportamiento tendencial. Lo cual no compone, en la actualidad, ningún eje didáctico ni para los textos escolares ni para el currículo escolar.

## ■ Reflexiones finales

Los docentes que socializarán la situación escolar de resignificación de la derivada obligadamente procesarán una dialéctica exclusión-inclusión (Soto, 2014) para valorar la resignificación de la derivada. Posiblemente los momentos de exclusión se manifestarán cuando los docentes se enfrenten a las tareas planteadas, debido a que dudarán que estén asociadas a la derivada, y pensarán que son situaciones que no tienen solución.

Además, la exclusión a la que los ha llevado el discurso matemático escolar dificultará que consideren que a través de las situaciones planteadas se generen conocimientos sobre la derivada. Sin embargo, cuando emerjan argumentos distintos a los que les ha impuesto el discurso matemático escolar, el docente se encontrará en un momento de inclusión. Esta acción le permitirá al docente trastocar y transformar el conocimiento matemático escolar.

## ■ Referencias bibliográficas

- Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia*. (Tesis de Doctorado). Universitat Autònoma de Barcelona.
- Bingolbali, E., Monaghan, J. & Roper, T. (2007). Engineering students' conceptions of the derivative and some implications for their mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38 (6), 763–777. doi: 10.1080/00207390701453579
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.
- Cantoral, R.; Molina, J. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, 463-468. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cantoral, R., Moreno-Durazo, A. & Caballero-Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: An empirical approach to teaching and learning. *ZDM Mathematics Education*, 50, 77-89. doi:10.1007/s11858-018-0922-8
- Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4 (2), 103-128.
- Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R.M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Ed.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México, Díaz de Santos – Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cordero, F. (2016). La función social del docente de matemáticas: pluralidad, transversalidad y reciprocidad. En S. Estrella, M. Goizueta, C. Guerrero, A. Mena-Lorca, J. Mena-Lorca, E. Montoya, A. Morales, M. Parraguez, E. Ramos, P. Vásquez, P., y D. Zakaryan, (Eds.), *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 23-30), ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM, Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Recuperado de <http://ima.ucv.cl/congreso/xxjnm/>



- Cordero, F. (2017). *La matemática y lo matemático. Transversalidad y modelación: un programa socioepistemológico*. Manuscrito en preparación.
- Cordero, F., Del Valle, T. y Morales, A. (2019). Usos de la optimización de ingenieros en formación: el rol de la ingeniería mecatrónica y de la obra de Lagrange. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 22 (2), 185-212. <https://doi.org/10.12802/relime.19.2223>
- Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Barcelona, España: Gedisa.
- Garrido, V. (2014). *La derivada: de lo conceptual a lo algorítmico. Un estudio de caso con profesores de bachillerato*. (Tesis de Maestría). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.
- Medina, D., Cordero, F. y Soto, D. (2018). Función del docente de matemáticas y la inclusión en la construcción social del conocimiento. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31 (1), 662-670.
- Medina, D. (2019). *Transformación educativa del docente de matemáticas. Un episodio: El uso de la compensación como una resignificación de la media aritmética*. (Tesis de Doctorado). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.
- Montiel, G. (2005). Una caracterización del contrato didáctico en un escenario virtual. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, 667-672. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Pérez - Oxté, I. y Cordero, F. (2019). *Modeling and anticipation of graphical behaviors in Industrial Chemical Engineering. The role of transversality of knowledge in learning mathematics*. Manuscript in preparation.
- Rosado, M. y Cordero, F. (2006). Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica. En G. Martínez Sierra (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 19, 793-799. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Sánchez, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11 (2), 267-296.
- Soto, D. (2014). *La dialéctica Exclusión-Inclusión entre el discurso Matemático Escolar y la Construcción Social del Conocimiento Matemático*. (Tesis de Doctorado). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.