

# UNA MIRADA DESDE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA SOBRE LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA FÍSICO: EL CASO DEL MOVIMIENTO PARABÓLICO

## A LOOK FROM MATHEMATICS EDUCATION ON A PHYSICAL PROBLEM SOLVING: THE CASE OF THE PARABOLIC MOVEMENT

Nehemías Moreno Martínez, Luis Hernández Zavala

Universidad Autónoma de San Luis Potosí (México)

nehemias\_moreno@live.com, ki\_luis96@hotmail.com

### Resumen

Se describe un avance de investigación donde se analiza el caso de una docente universitaria que lleva a cabo una práctica de resolución de un problema físico de movimiento parabólico. La práctica es reconstruida a partir de la producción de la docente al resolver el problema, luego es representada gráficamente mediante la técnica del Mapa Conceptual Híbrido y posteriormente interpretada mediante algunos elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico extendidos a la física escolar. La representación gráfica de la práctica permite advertir los objetos físico-matemáticos y sus conexiones, así como la realización de algunos procesos cognitivos. Se encontró que ciertos procesos cognitivos le permiten a la docente relacionar su conocimiento previo con el nuevo conocimiento proveniente de la descripción textual del problema, permitiendo así la emergencia de nuevo conocimiento.

**Palabras clave:** física, resolución de problemas, mapa conceptual híbrido, representación

### Abstract

This paper describes the progress of a research aimed at analyzing the case of a university professor who carries out a practice of solving a physical problem of parabolic movement. The practice is reconstructed from the production of the teacher when solving the problem, then it is represented graphically by means of the Hybrid Conceptual Map technique, and subsequently, it is interpreted by some theoretical elements of the Onto-semiotic Approach extended to school physics. The graphic representation of the practice allows noticing the physical-mathematical objects and their connections, as well as the fulfillment of some cognitive processes. It was found that certain cognitive processes allow the teacher to relate her previous knowledge to the new knowledge that comes from the textual description of the problem, thus allowing the emergence of new knowledge.

**Key words:** physics, problem solving, hybrid conceptual map, representation

## ■ Introducción

En las investigaciones sobre el aprendizaje de la física mediante la resolución de problemas, desde la psicología cognitiva, se ha señalado que existe un conjunto de habilidades y procedimientos que caracterizan el comportamiento de los expertos y de los estudiantes novatos, mientras que los expertos docentes consideran la estructura profunda del problema los novatos atienden aspectos superfluos (Buteler, Gangoso, Brincones y González, 2001). Al respecto, Larkin (1983) señala que en sus *representaciones internas* los “novatos incorporan entidades explícitamente mencionadas en el problema... y los expertos añaden entidades abstractas no necesariamente contenidas en el enunciado del problema y que tienen significado solo en el contexto de la física” (Citado en Buteler, Gangoso, Brincones y González, 2001, p. 286).

En otros trabajos, apoyados en la noción de representación interna y externa, se ha analizado la producción de conocimiento físico mediante la resolución de problemas empleando la técnica de la “V” de Gowin interpretada desde la teoría del Aprendizaje Significativo (Ausubel, 1976). Según Novak y Gowin (1988), la “V” ayuda a los estudiantes y profesores a interpretar la estructura y el significado del conocimiento que se pretende alcanzar al representar externamente sobre la “V” ocho elementos que participan en la actividad matemática y físico-matemática: preguntas clave, acontecimientos, conceptos, principios, teorías, registros, transformaciones y afirmaciones, ver la figura 1(a).

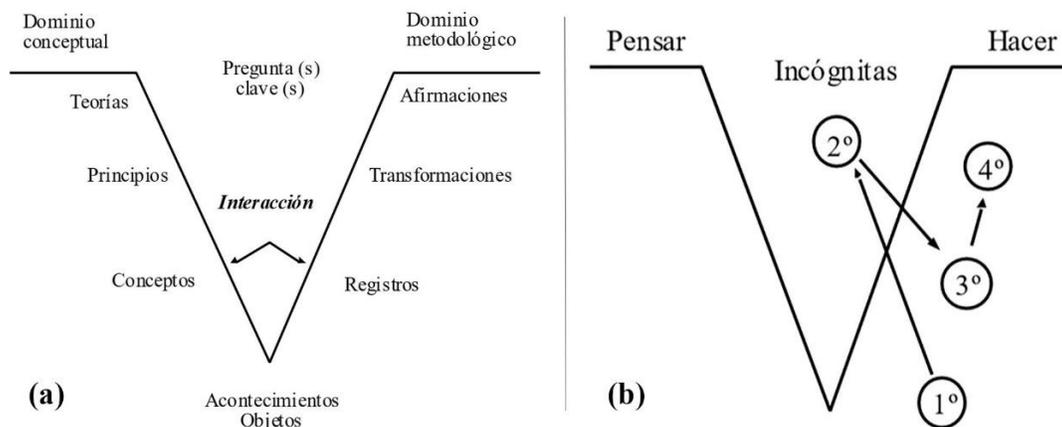


Figura 1. (a) La V de Gowin y sus elementos, (b) operativismo ciego en la resolución de problemas.

Empleando la “V”, Escudero y Moreira (1999) han representado esquemáticamente, mediante flechas, la ruta que siguen frecuentemente los estudiantes inexpertos cuando se enfrentan a la tarea de resolver un problema de física, para lo cual realizan el llamado operativismo ciego, figura 1(b). El esquema muestra la ruta del operativismo ciego que inicia con los datos que proporciona el problema, la sustitución de éstos en las fórmulas, las operaciones o transformaciones y la enunciación de resultados o afirmaciones, el cual, según los investigadores, refleja un escaso análisis y una deficiente significación.

Por otra parte, desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS), Font, Godino y D'Amore (2007) han recalado que el término representación interna o mental, empleado para describir la cognición de las personas, y el término representación externa, interpretado como instrumentos con los que se exteriorizan las representaciones internas, son considerados ambiguos y no operativos para la descripción de la actividad matemática. Esta ambigüedad se deja ver en el esquema de la figura 1(b), pues el esquema podría no representar de manera unívoca el operativismo ciego de un estudiante inexperto, ya que el mismo esquema también podría representar la resolución del problema por parte de algún docente experto.

Por ejemplo, en el contexto de la física escolar, el libro de Gutierrez y Zarzosa (2017), empleado en algunas escuelas públicas de nivel secundaria en México en los cursos de física, presenta como ejemplo el proceso de resolución de un problema de cinemática, figura 2, que puede ser modelado mediante el esquema de la figura 1(b).

Los autores del libro presentan algunas representaciones externas mediante los símbolos  $v_0$ ,  $a$ ,  $d$  y  $v$ , la expresión algebraica  $v_f^2 = v_0^2 + 2ad$ , entre otras, figura 2, correspondientes a ciertas representaciones internas, por ejemplo, el concepto de aceleración representado de manera externa mediante una línea horizontal (sin embargo, otras representaciones mentales importantes para la comprensión del problema tales como el concepto de aceleración debida a la gravedad, componente de la aceleración, argumentos justificativos y propiedades no tienen un duplicado externo y tampoco representan de manera clara las conexiones entre dichos elementos. De hecho, los autores llevan un operativismo ciego flagrante al señalar explícitamente “datos”, “fórmula”, “sustitución” y “resultado”, figura 2.

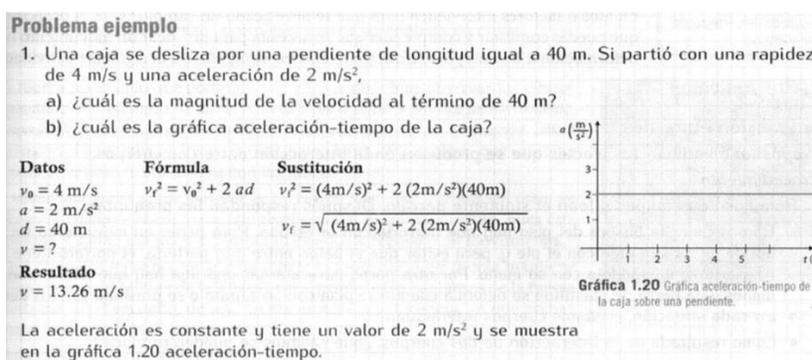


Figura 2. Problema resuelto de cinemática que se presenta como ejemplo en el libro de Gutierrez y Zarzosa (2017) y que exhibe operativismo ciego.

Con base en lo anterior, en la presente investigación se aborda el problema de la ambigüedad y la no operatividad que resulta de emplear las nociones de representación interna/externa en el análisis de la actividad físico-matemática. Para lo cual, se planteó el objetivo de extender a la física escolar la postura de una teoría de Matemática Educativa, el EOS, que sugiere cambiar el uso de la dualidad interno/externo por dos perspectivas duales, ostensivo/no-ostensivo y cognitivo/epistémico (Font, Godino y D'Amore, 2007) para describir la actividad físico-matemática.

Las dualidades ostensivo/no-ostensivo y cognitiva/epistémica son consideradas en esta investigación a través de la interpretación de la técnica del Mapa Conceptual Híbrido (MCH) desde el EOS. Mediante el objetivo anterior se pretende verificar la hipótesis de que la interpretación ontosemiótica del MCH (Moreno, 2017; Moreno, Angulo y Reducindo, 2018; Moreno, Zúñiga y Tovar, 2018; Moreno, Reducindo, Aguilar y Angulo, 2018), permite considerar al MCH como una representación ostensiva del sistema de prácticas, no ostensivo, implicado en la resolución de un problema físico-matemático ya sea por parte un experto docente, perspectiva epistémica, o por parte un estudiante inexperto, perspectiva cognitiva.

### ■ Marco teórico

Este trabajo se apoya en una interpretación de la técnica del MCH desde algunos elementos teóricos del EOS extendidos al contexto de la física escolar (Moreno, Angulo y Reducindo, 2018). A continuación, se presenta en un primer momento los elementos teóricos del EOS que fueron extendidos a la física escolar y cómo se llevó a cabo dicha extensión, luego se describe la interpretación del MCH desde los elementos extendidos del EOS y, finalmente, se describe cómo la interpretación ontosemiótica del MCH toma en cuenta las dualidades ostensivo/no-ostensivo y cognitivo/epistémico.

Los elementos teóricos del EOS extendidos a la física escolar fueron los constructos objeto matemático primario y función semiótica. La extensión a la física escolar se apoyó en la noción de *objeto* proveniente del Interaccionismo Simbólico, IS. Cabe señalar que ésta misma noción de objeto también fue considerada en por el EOS para desarrollar el constructo de objeto matemático primario y significado en términos de prácticas.

Según el IS, “An object is anything that can be indicated, anything that is pointed to or referred to...The nature of an object consists of the meaning that it has for the person for whom it is an object” [Un objeto es cualquier cosa que puede ser indicada, cualquier cosa que puede ser señalada o referida...La naturaleza de un objeto consiste del significado que éste tiene para la persona para quien éste es un objeto] (Blumer, 1969, p. 10-11), lo cual nos permite agregar a los objetos matemáticos señalados por el EOS una nueva tipología de objetos, los objetos físicos.

De esta manera, en el presente trabajo argumentamos que en la resolución de un problema en la física escolar, un sujeto (experto o estudiante novato) puede hacer referencia tanto a objetos físicos como a objetos físico-matemáticos. Los primeros son aquellos objetos de la física que no tienen que ver directamente con las matemáticas (por ejemplo, conceptos de naturaleza concreta a los que se hace referencia en los problemas físicos tales como pelotas, vehículos, resorte, imán, bobina, placas metálicas, etc.), mientras que los objetos físico-matemáticos pueden ser pensados como objetos que surgen a través del establecimiento de relaciones de significación o de funciones semióticas entre los objetos matemáticos primarios (aquellos señalados por el EOS) y algunos objetos físicos. Como ejemplos de objetos físico-matemáticos tenemos los conceptos de fuerza, velocidad o aceleración que pueden ser interpretados como vectores.

Con base en lo anterior, se define entonces la siguiente tipología de objetos físico-matemáticos: *situación física problematizada*, se refiere a la tarea o ejercicio de calcular la magnitud de cierta variable en situaciones como la de caída libre, movimiento parabólico, colisiones, entre otras; *lenguaje*, tales como símbolos físicos, expresiones algebraicas, gráficas, entre otras; *conceptos*, como el de velocidad, energía, aceleración o centro de masa; *propiedades*, enunciados sobre conceptos tales como el enunciado de la conservación de momento lineal acerca del momento lineal, la conservación de la energía, entre otros; *procedimiento*, se trata del tratamiento algorítmico o técnica de cálculo empleado al resolver el problema; *argumentos físico-matemáticos*, que vienen a justificar el procedimiento empleado en la resolución del problema (Moreno, Font y Angulo, 2018).

Proponemos entonces que en la resolución de una situación física problematizada, figura 3(b), el problema mayor se desmenuza en subproblemas (problemas 1, 2, 3 y 4 en la figura 3(b)) cuya resolución requiere la realización de prácticas específicas (prácticas 1, 2, 3 y 4 en la figura 3(b)) en las que se organizan y se conectan los objetos físico-matemáticos (figura 3(a) y pentágonos en la figura 3(b)) dando lugar a la emergencia de otros objetos físico-matemáticos que son empleados en la coordinación y conexión de las prácticas para configurar el llamado sistema de prácticas. El sistema de prácticas físico-matemático así realizado permite dar cuenta de los significados que se ponen en juego en la resolución de la situación física problematizada mayor.

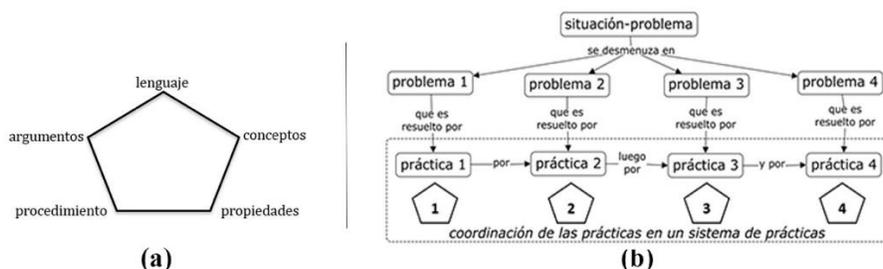


Figura 3. (a) objetos físico-matemáticos y (b) esquema que representa una situación-problema que se desmenuza en cuatro subproblemas y que es resuelto mediante la coordinación de un sistema prácticas.

Los objetos físico-matemáticos, sus conexiones y su organización mediante el sistema de prácticas pueden ser representados gráficamente mediante el MCH. En el MCH, mediante el lenguaje (palabras, símbolos, expresiones algebraicas), se representan de manera ostensiva los objetos: conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos físico-matemáticos. La unión entre los conceptos (encerrados en recuadros en el MCH) mediante “palabras enlace” permite expresar propiedades y argumentos justificativos. El objeto procedimiento se presenta a través de la componente del diagrama de flujo del MCH.

El MCH considera la dualidad personal/institucional ya que el sistema de prácticas, realizado por un experto o inexperto, puede ser representado mediante un MCH de tipo epistémico o cognitivo respectivamente. También permite considerar la dualidad ostensivo/no-ostensivo ya que permite representar de manera ostensiva (mediante el objeto lenguaje) aquellos objetos no ostensivos (conceptos, propiedades, procedimiento y argumentos) a través de la representación gráfica del sistema de prácticas que se lleva a cabo en la resolución de un problema físico-matemático.

Algunos procesos cognitivos también pueden advertirse a través del MCH. Asumimos que algunos procesos cognitivos señalados por el EOS también ocurren cuando el sujeto resuelve una situación física-problematizada. El EOS señala que en la realización de las prácticas el sujeto lleva a cabo procesos cognitivos que se pueden asociar a ciertas perspectivas de los objetos, algunos de éstos son: (i) *idealización*, permite ir de un objeto observable como podría ser un signo, expresión algebraica o gráfica (perspectiva ostensiva del objeto) a un objeto pensado; (ii) *materialización*, inverso a la idealización y permite materializar o hacer público un objeto pensado (perspectiva no-ostensiva del objeto); (iii) *visualización*, relacionada con prácticas visuales donde participan objetos lingüísticos y artefactos que ponen en juego la percepción visual tales como diagramas, esquemas, entre otros; (iv) *particularización*, un objeto general, por ejemplo, cuando la expresión general  $v = v_0 + at$  (perspectiva intensiva) es empleada de manera específica como en el caso  $v = 8 - 9.81t$  (perspectiva extensiva); (v) *argumentación*, permite justificar o validar los procedimientos matemáticos; (vi) *representación*, permite asignar un significante a un significado correspondiente (perspectiva de expresión); (vii) *significación*, a un significante se le atribuye un significado (perspectiva de contenido); (viii) *personalización*, el sistema de prácticas, los objetos y procesos corresponden a una persona (perspectiva cognitiva); (ix) *institucionalización*, los objetos son compartidos por expertos, dialogados y regulados en una comunidad o institución (perspectiva epistémica).

## ■ Metodología

Se llevó a cabo un estudio de caso en el que se planteó a una docente de ingeniería la resolución y explicación del problema: “Se lanza una pelota desde la ventana del piso más alto de un edificio. Se da a la pelota una velocidad inicial de 8.00 m/s a un ángulo de 20.0° sobre la horizontal. La Pelota golpea el suelo 3.00 s después. Determine (a) ¿A qué distancia horizontal, a partir de la base del edificio, la pelota golpea el suelo? y (b) Encuentre la altura desde la cual se lanzó la pelota.” (Serway, 2005, p. 89).

A la docente se le proporcionó una pluma electrónica, *Smartpen Live Scribe*, con la cual resolvió el problema sobre el papel mientras explicaba a detalle y en voz alta el proceso de solución. El instrumento de la pluma electrónica permitió, por un lado, la grabación de la producción oral y escrita de la docente y, por otro lado, generó un archivo electrónico llamado *pencast*, que puede ser reproducido en la computadora (similar a la reproducción de una grabación de video).

A partir del *pencast* se llevó a cabo la transcripción de la producción de la docente, la cual aportó elementos para la construcción del MCH. En el trabajo de Moreno, Angulo y Reducindo (2018) se plantea la reconstrucción de un

MCH a partir de un ejemplo que describe la resolución de un problema físico, en nuestro caso, empleamos la misma técnica solo que en este caso se considera la producción de la docente.

En el presente trabajo, el análisis gráfico mediante el MCH solo toma en cuenta la perspectiva dual ostensivo/no-ostensivo y la perspectiva epistémica (obtenida de la dualidad cognitiva/epistémica) del MCH, esto último es debido a que en la etapa en la que se encuentra la investigación únicamente se ha considerado la resolución del problema por parte de una experta docente, perspectiva epistémica. La perspectiva cognitiva del MCH, que es objeto de investigación actual por parte de los autores, se pretende obtener a partir de la producción de algún estudiante que se enfrente a la tarea de resolver el mismo problema físico que fue resuelto por la docente. Por último, consideramos que la comparación entre el MCH epistémico, obtenido de la producción de la docente, con el MCH de tipo cognitivo, correspondiente a la producción de algún estudiante inexperto, podría dar luz acerca de los objetos físico-matemáticos, sus conexiones y los significados puestos en juego a lo largo del proceso de resolución de la situación física problematizada.

### Resultados y análisis

La transcripción de la producción oral y escrita de la docente se presenta en la figura 4. La figura muestra un conjunto numerado recuadros con texto, los cuales corresponden a la transcripción del discurso oral y los números del (1) al (11) indican la secuencia de argumentos enunciada por la docente. El texto en el centro, entre los recuadros, corresponde a la producción escrita de la docente.

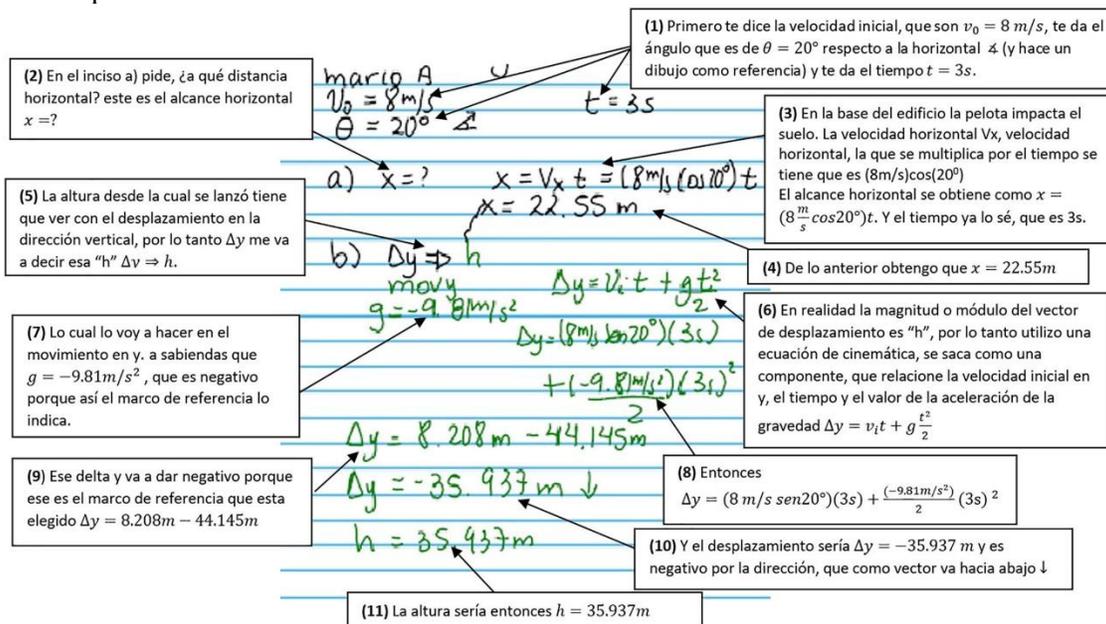


Figura 4. Transcripción de la producción oral y escrita de la docente al resolver el problema físico planteado.

Las flechas de la figura 4 ilustran la correspondencia entre el discurso oral de la docente y la producción escrita, por ejemplo, en (2) la docente argumenta verbalmente que “En el inciso a), ¿a qué distancia horizontal? Este es el alcance horizontal ¿ $x = ?$ ”, mientras escribe simultáneamente sobre el papel el símbolo  $x = ?$  (lo cual está indicado por la flecha).

A grandes rasgos, la docente lee el texto e interpreta el problema, posteriormente se fija en los datos que suministra el texto y posteriormente propone abordar el problema al descomponer el movimiento parabólico de la pelota en dos movimientos, uno horizontal y otro vertical. En el análisis del movimiento horizontal se apoya en la expresión

“ $x = v_x t$ ” la cual le permite calcular el alcance “ $x = 22.5m$ ” en el tiempo de “ $3s$ ”. Al abordar el movimiento vertical considera la expresión cinemática “ $\Delta y = v_i t + \frac{gt^2}{2}$ ” del movimiento de una partícula con aceleración constante y mediante la sustitución de la componente vertical de la velocidad inicial “ $v_i$ ”, el valor de la aceleración debida a la gravedad “ $g$ ”, el tiempo “ $t = 3s$ ” y la convención de signos relacionado con el marco de referencia empleado con eje vertical positivo hacia arriba, la docente fue capaz de calcular la altura desde la cual fue lanzada la pelota del edificio, es decir, “ $h = 35.937m$ ”.

Como regla general para la construcción del MCH se tiene que toda la producción en la figura 4 tiene que estar presente en el MCH. El MCH correspondiente a la producción de la docente se ilustra en la figura 5, a este MCH diremos que es de tipo epistémico pues corresponde a un sistema de prácticas realizado por una experta. Así mismo, diremos que se tiene un MCH de tipo cognitivo si éste corresponde a la producción de algún estudiante inexperto.

Para facilitar la descripción del mapa se agregaron etiquetas numéricas al MCH para ubicar los objetos físico-matemáticos, sin embargo, la secuencia numérica de las etiquetas no está relacionada con el orden temporal del discurso de la docente. Por ejemplo, mediante B3 se hace referencia al objeto 3 en B “ $x = 22.55m$ ”, y por otro lado, los argumentos son representados mediante la conexión de conceptos localizados en recuadros conformando así rutas de lectura, por ejemplo, A5-A6 representa “Tiempo de  $t = 3s$ ”.

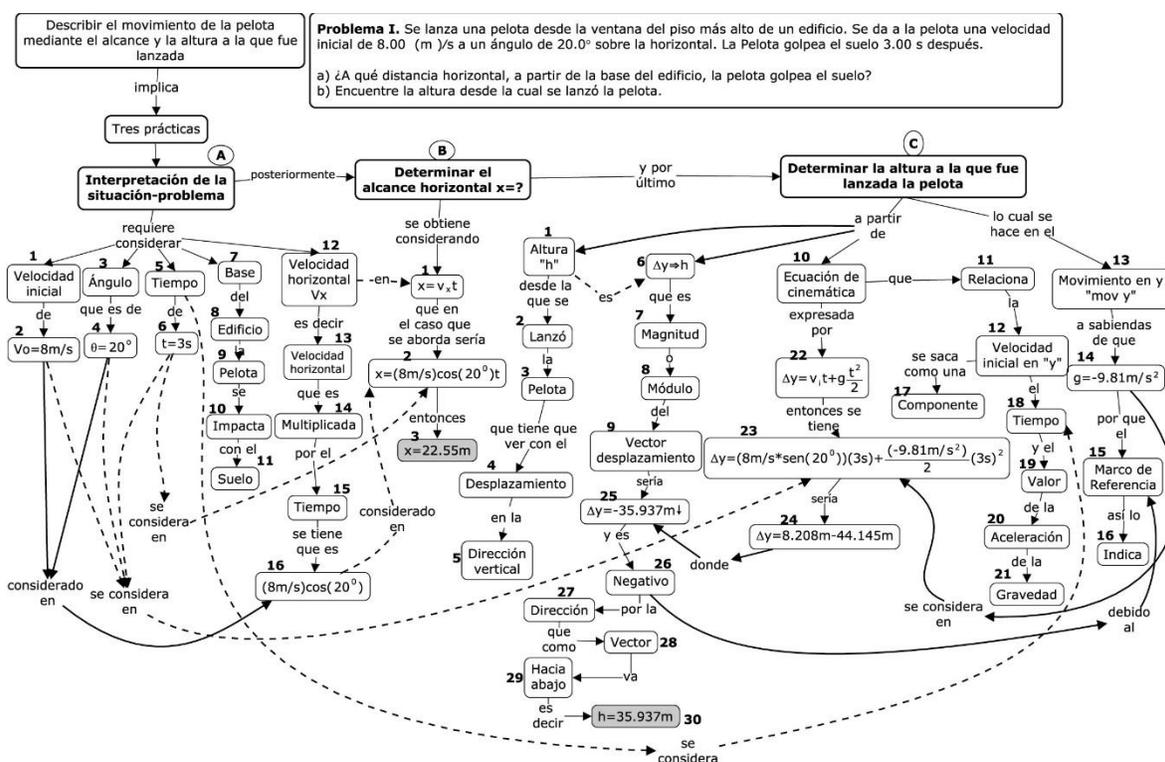


Figura 5. MCH que representa de manera gráfica el sistema de prácticas implicado en la resolución de un problema de física por parte de una docente. Elaboración propia.

Para resolver el problema la docente tuvo que realizar un sistema de tres prácticas denotadas mediante A, B y C las cuales aparecen conectadas mediante líneas segmentadas en la figura 5. La conexión entre los objetos de una misma práctica aparece mediante líneas continuas. El MCH de la figura 5 representa esquemáticamente un sistema de tres prácticas, conectadas y coordinadas, que la docente tuvo que realizar para poder resolver el problema planteado. Mediante la primera práctica A, la docente lleva a cabo una práctica interpretativa del texto que describe la situación-problema en términos de su conocimiento previo. Cuando la docente escribe sobre el papel lo que ha interpretado

de la lectura también representa de manera ostensiva símbolos nuevos (que no se encuentran en el texto) que ella ha aprendido a asociar a dichos conceptos interpretados, tal es el caso de A2 ( $v_0$ ), A4 ( $\theta$ ) y A6 ( $t$ ). En este sentido, la docente establece funciones semióticas entre los conceptos que señala el texto (y que ha interpretado) con los símbolos nuevos mediante A1-A2, A3-A4 y A5-A6. Por otro lado, establece funciones semióticas o relaciones de significación entre los símbolos y los valores numéricos asociados a los conceptos mediante A2, A4 y A6.

Algunos conceptos son considerados de manera implícita durante el proceso de interpretación, por ejemplo, los conceptos de *marco de referencia* y *alcance* que forman parte del conocimiento previo de la docente. Se puede advertir la utilización del concepto de marco de referencia a través de las rutas A7-A8-A9-A10-A11 y la ruta A12-A13-A14-A15-A16, las cuales le permiten señalar una componente horizontal para la velocidad en A12, cómo calcularla mediante A16 y así poder anticipar la realización de la segunda práctica B para determinar el alcance. Las rutas anteriores reflejan la realización del *proceso de significación* al relacionar implícitamente mediante una función semiótica el conocimiento previo de marco de referencia con la componente horizontal de la velocidad obtenida mediante el *proceso de particularización* de la propiedad general de descomposición en componentes de la velocidad en un movimiento parabólico (conocimiento previo).

Potro lado, otras funciones semióticas permiten relacionar los datos de la velocidad inicial y el ángulo con la expresión *particularizada* de la velocidad horizontal, A2-A16 y A4-A16. La consideración implícita del conocimiento previo acerca del marco de referencia está acompañada de un proceso de visualización (Godino, Gonzato, Cajaraville y Fernández, 2012) que le permite a la docente ubicar al marco referencia en la base del edificio, hecho que es relevante para la ejecución de la segunda y tercera práctica. Cabe destacar que como objetos emergentes de la práctica interpretativa A se tiene a los objetos A2, A4, A6 y A16, los cuales son empleados como datos de entrada para la realización de la práctica B.

En la práctica B, el uso del marco de referencia se observa mediante la ruta B1-B2-B3, que da cuenta de la función semiótica entre el uso implícito del marco de referencia y la particularización de la propiedad de la descomposición en componentes del desplazamiento. A partir de la expresión general  $x = x_0 + v_x t + \frac{1}{2} a_x t^2$ , que proviene del conocimiento previo, la docente particularizó mediante B1 al considerar  $x_0 = 0$ , es decir, consideró al marco de referencia situado en la base del edificio para describir el movimiento de la pelota. Mediante las conexiones entre los objetos interpretados y particularizados, A16-B2, A6-B2 y A12-B1 la docente coordina las prácticas A y B. Cabe destacar que, en ningún momento de la producción la docente hace referencia a que la aceleración horizontal es nula " $a_x = 0$ ", figura 4, sin embargo, sí la toma en cuenta en la particularización en B1.

Se obtiene a B3 como objeto emergente de la realización de la práctica B, la cual constituye la solución del primer inciso del problema. Cabe señalar que dicho objeto emergente no forma parte de los datos de entrada de la tercera práctica C, sin embargo, los objetos emergentes de la primera práctica interpretativa A, A2, A4 y A6, si forman parte de los datos de entrada de la práctica C. Esto quiere decir que la realización adecuada de la primera práctica es de gran importancia para la resolución correcta del problema.

En la práctica C, el argumento C1-C2-C3 obtenido de la lectura e interpretación del texto se relaciona mediante una función semiótica con el conocimiento previo de la profesora representado mediante C4-C5 que refleja la consideración de la propiedad general de la descomposición en componentes del movimiento.

La docente particulariza su conocimiento previo sobre el movimiento vertical de la pelota al pasar de la expresión cinemática general en C10-C22 a C23. La docente asocia un significado a la expresión C22 a través de los argumentos C11-C12-C18-C19-C20-C21 y C12-C17. También establece un conjunto de funciones semióticas a través de diferentes conexiones, entre los objetos emergentes de la práctica A (A2, A4, A6) y C23, así como también entre su conocimiento previo C14 y C23. Lo anterior le permite llevar a cabo un procedimiento o tratamiento físico-matemático a lo largo de la ruta C23-C24-C25 para obtener C25.

Por otro lado, la docente considera su conocimiento previo sobre el marco de referencia, esta vez lo realiza de manera explícita mediante C15, y mediante el uso del convenio de signos. Esto le permite argumentar mediante C26-C27-C28-C29-C30 para cambiar el signo al valor del desplazamiento en C25 y posteriormente obtener como objeto emergente de la práctica C el objeto C30. Cabe señalar que el conocimiento previo de la docente acerca de la convención de signos, que atiende las características del marco de referencia elegido, también fue tomado en cuenta mediante el argumento C13-C14-C15-C16 para atribuir el signo negativo a la magnitud de la aceleración debida a la gravedad.

Otro indicio de la aplicación del conocimiento previo de la docente en la realización de la práctica C puede observarse en la ruta C6-C7-C8-C9 donde habla acerca de los conceptos de vector desplazamiento y magnitud o módulo del vector.

Con base en el análisis del MCH es posible advertir la realización de algunos procesos cognitivos que tienen un rol importante en la producción del conocimiento físico-matemático. Dichos procesos cognitivos permiten la interacción entre el nuevo conocimiento, presentado a través del texto que describe la situación-problema, y el conocimiento previo de la docente.

En la práctica A, a partir de la descripción que se realiza en el texto, la docente realiza el proceso de idealización de la situación-problema. Mediante la idealización la docente desmaterializa la pelota en una partícula que tiene un movimiento de traslación a lo largo de una trayectoria parabólica en un plano, prescindiendo del movimiento de rotación alrededor de algún eje de la pelota. Mediante la idealización también desmaterializa el edificio y el suelo, y en su lugar considera implícitamente un marco de referencia con origen situado en la base del edificio y sus ejes “ $x$ ” e “ $y$ ” con la misma dirección del piso y el edificio respectivamente.

La profesora también realiza el proceso de significación a través del establecimiento de una trama de funciones semióticas que se establecen entre el conocimiento nuevo que aporta el texto y el conocimiento previo de la docente. También se establecen funciones semióticas que son representadas en el MCH a través de las conexiones entre objetos físico-matemáticos de una misma práctica (líneas continuas) y mediante conexiones entre objetos de distintas prácticas (líneas segmentadas).

También realiza el proceso de particularización, la cual permite particularizar el conocimiento previo general de la docente mediante la consideración de las condiciones particulares que se describen en el texto de la situación-problema. Tal es el caso de la particularización en A12, B1 y C22, la particularización realizada en cada una de las tres prácticas condujo a la realización del procedimiento o tratamiento físico-matemático, a saber, A13-A14-A15-A16, B1-B2-B3 y C22-C23-C24-C25.

Por último, la docente también llevó a cabo el proceso de materialización a lo largo del sistema de prácticas a través del discurso oral y escrito. Mediante el discurso oral la docente materializó distintos argumentos que le permitieron justificar el procedimiento empleado en cada práctica, también materializó a través del discurso escrito mediante símbolos, asociados a conceptos pertenecientes a su conocimiento previo (A2, A4 y A6), y propiedades generales, que fueron particularizadas (B1-B2 y C22-C23).

A diferencia de la interacción entre el dominio conceptual y el dominio metodológico que se propone en la V de Gowin, figura 1(a), mediante el MCH se propone describir la actividad físico-matemático (y matemática) a través del establecimiento de una trama de conexiones, entre los objetos físico-matemáticos primarios, lograda a través de la realización de un conjunto de procesos cognitivos, a saber, la interpretación, la idealización, la significación, la particularización y la materialización. Dichos procesos son fundamentales para la producción o emergencia de nuevos objetos físico-matemáticos.

Hasta aquí se ha considerado la dualidad ostensivo/no-ostensivo y la perspectiva institucional proveniente de la dualidad institucional/personal, sin embargo, la consideración de la perspectiva personal a través del análisis gráfico del MCH ha quedado fuera del alcance del presente trabajo, de hecho, se trata de una investigación en proceso por parte de los autores.

## ■ Conclusiones

La docente llevó a cabo un sistema de tres prácticas donde organizó un conjunto de objetos físico-matemáticos al interpretar el conocimiento nuevo, proveniente del texto que describe la situación-problema, en términos de su conocimiento previo apoyado en una red de funciones semióticas y la realización de un conjunto de procesos cognitivos como el de idealización, interpretación, significación, particularización y materialización. Se trata de procesos que son esenciales para la emergencia de nuevos objetos y la construcción de conocimiento físico-matemático.

En relación con una misma tarea de resolución de un problema físico-matemático, la comparación entre un MCH de tipo epistémico, que proviene de la producción de un experto, y un MCH de tipo personal o cognitivo, que proviene de la producción de un estudiante inexperto o novato, podría dar luz acerca del fracaso de los estudiantes en la resolución de problemas de la física escolar y podría ayudar a comprender cuáles son los factores que llevan a los estudiantes a la memorización de los procedimientos y resoluciones que explican los profesores, en ausencia de una significación adecuada.

El MCH presenta de manera estática el discurso oral y escrito de la docente al resolver el problema. Por lo anterior, se puede decir que la interpretación del MCH constituye una herramienta de investigación adecuada que permite analizar la actividad físico-matemática a través del análisis gráfico que considera las conexiones que se establecen entre los objetos físico-matemáticos y algunos procesos importantes en la producción del conocimiento realizados a lo largo del sistema de prácticas.

El aporte de la Matemática Educativa, a través de la consideración de algunos elementos teóricos provenientes del EOS, al estudio de los fenómenos educativos en el contexto de la física escolar, en este caso la comprensión de una docente puesta en juego en la resolución de un problema físico de movimiento parabólico es de gran importancia y refleja el poder explicativo del EOS en otros contextos, ya en el terreno de la didáctica de la física. Las dualidades ostensivo/no-ostensivo y institucional/personal (propuestas por el EOS) cristalizadas a través de la interpretación MCH ayudan a superar el problema de la ambigüedad que aparece en el empleo de la V de Gowin al describir el fenómeno del operativismo ciego, como consecuencia de la consideración teórica de las representaciones interna y externa.

Si bien, en el presente trabajo se ha planteado el análisis de la actividad físico-matemática en la resolución de un problema físico (contexto extramatemático), es indudable que el mismo análisis MCH puede realizarse para analizar la actividad matemática en un contexto intramatemático, en cuyo caso se tendría que considerar solamente el conjunto objetos matemáticos primarios propuestos por el EOS y prescindir de la tipología de objetos físicos descrita en el apartado del marco teórico.

## ■ Referencias bibliográficas

- Ausubel, D. P. (1976). *Psicología educativa*. México: Editorial Trillas.
- Blumer, H. (1969). *Symbolic Interactionism, Perspective and Method*. New Jersey, U. S. A.: Prentice Hall, Inc.
- Buteler, L., Gangoso, Z. Brincones, C. I. y González, M. M. (2001). La resolución de problemas en física y su representación: Un estudio en la escuela media. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(2), 285-295.

- Escudero, C y Moreira, M. A. (1999). La V epistemológica aplicada a algunos enfoques en resolución de problemas. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(1), 61-68.
- Font, V., Godino, J. D., y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the learning of mathematics*, 27(2), 2-14.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, M. V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A., y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 30(2), 109-130.
- Moreno, N. (2017). Una representación gráfica de la práctica de resolución de problemas en cálculo diferencial. *Investigación en la Escuela*, 92, 60-75.
- Moreno, N., Zúñiga, S., y Tovar, A. (2018). Una herramienta gráfica para la enseñanza de la cinemática mediante la resolución de problemas. *Latin American Journal of Physics Education*, 12(4), 4307.
- Moreno, M. N., Angulo, V. R. G. y Reducindo, R. I. (2018). Mapas conceptuales híbridos para la enseñanza de la física y la matemática en el aula. *Revista de investigación e innovación en Matemática Educativa*, 3(1), 113-130.
- Moreno, N., Reducindo, I., Aguilar, R., y Angulo, R. (2018). Enseñanza de la física mediante Fislets que incorporan Mapas Conceptuales. *Apertura*, 10(2), 20-35.
- Moreno, M. N., Font, M. V. y Angulo, V. R. G. (2018). Un estudio sobre la comprensión de las nociones físicas de la mecánica newtoniana: el caso del centro de masa. *Revista de enseñanza de la física*, 30(2), 7-22.
- Novak, J. D. y Gowin, D. B. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona: Martínez Roca.
- Perales, P. F. J. (1993). La resolución de problemas: una revisión estructurada. *Enseñanza de las Ciencias*, 11(2), 170-178.
- Serway, R., y Jewett, J. (2005). *Física para Ciencias e Ingeniería (Vol. 1)*. Editorial Thomson.