

¿QUÉ SIGNIFICADO ATRIBUYEN A LA MEDIA ARITMÉTICA PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN EJERCICIO?

WHAT MEANING DO MATHEMATICS IN-SERVICE TEACHERS ATTRIBUTE TO THE ARITHMETIC MEAN?

Eulalia Calle, Adriana Breda, Vicenç Font

Universidad de Cuenca (Ecuador), Universitat de Barcelona (España)
eulalia.calle@ucuenca.edu.ec, adriana.breda@gmail.com, vfont@ub.edu

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo identificar qué significado atribuyen a la media aritmética profesores de matemáticas en ejercicio. Para ello, se analizaron las respuestas de 95 docentes a una tarea que consistía en relacionar los distintos significados de este objeto matemático con una lista de problemas propuestos. Se concluye que la mayoría de los docentes no logran relacionar de forma correcta el significado de la media con el enunciado del problema correspondiente y, los que logran relacionar, justifican dicha relación de forma incorrecta.

Palabras clave: formación de profesores; media aritmética; enfoque ontosemiótico

Abstract

This work is aimed at identifying the meaning that mathematics in-service teachers give to arithmetic mean. So, we analyzed the answers of 95 teachers to a task that consisted in relating the different meanings of this mathematical object with a list of proposed problems. It is concluded that most of the teachers fail to correctly relate the meaning of the mean with the statement of the corresponding problem and, those who manage to relate, justify this relationship incorrectly.

Key words: teacher training; arithmetic mean; onto-semiotic approach

■ Introducción

En la actualidad se han propuestos diferentes modelos de categorías de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. Uno de dichos modelos, es el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico Matemáticas (CCDM) del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2019; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017; Pino-Fan, Godino y Font, 2018). En particular, en el marco de este modelo, se considera que, para que un alumno pueda ser competente en la aplicación de las nociones matemáticas, es necesario que en el proceso de instrucción se le enseñe una muestra representativa de los diferentes significados de estas nociones. En consecuencia, se considera necesario que los profesores de matemáticas tengan en cuenta la complejidad del objeto matemático que se pretende enseñar (entendida ésta como pluralidad de significados) en el diseño, implementación, valoración y rediseño de procesos de instrucción.

En el campo de la Didáctica de las Matemáticas, distintas investigaciones hacen énfasis en la importancia de abordar la complejidad del objeto matemático en la formación de profesores. Burgos, Beltrán-Pellicer, Giacomone y Godino (2018), por ejemplo, cuando trabajan en el reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria, focalizan la atención, en la faceta epistémica del modelo CCDM, dando importancia al conocimiento de la pluralidad de los significados de los objetos matemáticos en diferentes contextos, llegando a determinar incluso que los docentes en su intento de lograr un nivel de algebrización, sacrifican la significación del enunciado del problema. Otro estudio relacionado con la igualdad de los números reales (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007), plantea la necesidad de establecer los distintos significados asociados a los objetos matemáticos en diferentes momentos, enfatizando que ninguna definición, puede ser privilegiada. Por último, en una reflexión sobre la articulación de la complejidad matemática de la media aritmética, Rondero y Font (2015), usan la configuración epistémica (representaciones, definiciones, propiedades, problemas, etc.) como una herramienta importante para describir la complejidad de esta noción, además, profundizan en los mecanismos de articulación de dicha complejidad.

Siguiendo esta línea de investigación, el presente trabajo propone como objetivo estudiar si los profesores de matemáticas en ejercicio (estudiantes de un máster profesional para formación de profesores) pueden identificar el significado del objeto matemático media aritmética que permite resolver un determinado problema, para lo cual plantea la siguiente pregunta: ¿Pueden relacionar los profesores de matemáticas en ejercicio los diferentes significados parciales de la media aritmética con diversas tipologías de problemas?

■ Marco teórico

En el marco teórico explicamos, de manera breve, el modelo CCDM del EOS, detallamos el componente *Representatividad* de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar del criterio de idoneidad epistémica y explicamos la complejidad del objeto matemático media aritmética presentada por Rondero y Font (2015), que es el tema central de este artículo.

El modelo CCDM y la Idoneidad Didáctica

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción matemática (EOS) es un sistema teórico inclusivo en la Educación Matemática que articula diversas categorías de conocimientos y competencias (CCDM), de los profesores de matemáticas consideradas necesarias para una enseñanza idónea de las matemáticas (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Batanero y Font, 2019). Este modelo teórico hace hincapié en el análisis de idoneidad didáctica, como una competencia para la reflexión global sobre la práctica docente, su valoración y mejora progresiva (Giacomone, Godino y Beltrán, 2018); por lo tanto, responde a qué criterios seguir en el diseño de secuencias de tareas, cómo desarrollar y evaluar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios hacer

para conseguir metas de aprendizaje superiores. Esta noción se descompone en los siguientes criterios parciales de idoneidad didáctica (Font, Planas y Godino, 2010):

- *Idoneidad epistémica*: se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia. Las tareas o situaciones-problemas son un componente fundamental en esta dimensión, y deben involucrar diversos objetos y procesos matemáticos.
- *Idoneidad ecológica*: grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.
- *Idoneidad cognitiva*: grado en que los significados pretendidos e implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.
- *Idoneidad afectiva*: grado de implicación (intereses, emociones, actitudes y creencias) del alumnado en el proceso de estudio.
- *Idoneidad interaccional*: grado en que las configuraciones didácticas y el discurso en la clase permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional*: grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

En Breda y Lima (2016) y Breda, Pino-Fan y Font (2017) se aporta un sistema de componentes e indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa.

La idoneidad epistémica y la complejidad de los objetos matemáticos

Tanto los componentes como los indicadores de los criterios de idoneidad didáctica se han confeccionado teniendo en cuenta las tendencias, los principios y los resultados de la investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas. En particular, para la idoneidad epistémica se ha tenido en cuenta un principio fundamental del EOS que, con los matices propios de cada enfoque, es (o puede ser) asumido por otros enfoques teóricos del área. Nos referimos al principio que se puede formular de la siguiente manera: los objetos matemáticos emergen de las prácticas, lo cual conlleva su complejidad (Font, Godino y Gallardo, 2013; Rondero y Font, 2015). De este principio se deriva un componente (representatividad) cuyo objetivo es que se tenga en cuenta, dentro de lo posible, dicha complejidad en el diseño y rediseño de las secuencias didácticas (Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013).

El componente *Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos* (entendida como pluralidad de significados parciales), se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia (Godino, Giacomone y Beltrán-Pelliecer, 2018). Cada uno de estos significados permite resolver tipos de problemas diferentes, por lo cual, si se quiere enseñar una muestra representativa de significados parciales es necesario presentar una muestra variada de problemas (Font, Breda y Seckel, 2017).

La siguiente tabla (Font, Breda y Seckel, 2017), explica detalladamente, los indicadores del componente *Representatividad* del criterio de idoneidad epistémica.

Tabla 1 - El componente de Representatividad y sus indicadores.

Componente de la Idoneidad Epistémica	Indicadores
Representatividad	<ul style="list-style-type: none"> • Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar • Los significados parciales definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad contemplada en el currículo de la noción matemática que se quiere enseñar. • Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla una muestra representativa de problemas? • Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), tratamientos y conversiones entre los mismos?

Fuente: Font, Breda y Seckel (2017).

Investigaciones sobre la complejidad de diferentes objetos matemáticos

Se han realizado diferentes investigaciones para profundizar en la complejidad de diferentes objetos matemáticos: números naturales (Godino, Font, Wilhelmi y Arrieche, 2009), media aritmética (Rondero y Font, 2015), medida (Alpízar-Vargas y Morales-López, 2019), límite (Contreras, García y Font, 2012), optimización (Balcaza, Contreras y Font, 2017), Teorema de Tales (Font, Breda y Seckel, 2017), derivada y antiderivada, así como la comprensión que tienen los estudiantes de dicha complejidad (Pino-Fan, Godino y Font, 2011; Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013; Pino-Fan, Font, Gordillo, Larios y Breda, 2018; Pino-Fan, Godino y Font, 2018), inecuación (Monje, Seckel y Breda, 2018).

Para el objeto matemático *derivada*, Pino, Godino y Font (2011) caracterizan su complejidad mediante nueve configuraciones de objetos primarios : 1) tangente en la matemática griega; 2) variación en la edad media; 3) métodos algebraicos para hallar tangentes; 4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; 5) ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; 6) métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; 7) cálculo de fluxiones; 8) cálculo de diferencias y, 9) derivada como límite. En Pino, Castro, Godino y Font (2013) se utilizan estas nueve configuraciones para la reconstrucción del significado global de la derivada, el cual es utilizado para valorar la representatividad del significado pretendido en el currículo de Bachillerato de México (a partir de las configuraciones de objetos primarios activadas en las prácticas matemáticas propuestas tanto en el Plan de Estudios como en los libros de texto de dicho nivel).

La caracterización de la complejidad de la derivada realizada en Pino-Fan, Godino y Font (2011) facilita tener elementos para diseñar cuestionarios que permiten caracterizar la comprensión de los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio sobre la derivada. En Pino-Fan, Godino y Font y (2018) se diseñó un cuestionario para determinar la comprensión de futuros profesores sobre la derivada en el que se incluyeron tareas que activan los diversos significados parciales de la derivada caracterizados en Pino-Fan, Godino y Font (2011).

En Gordillo y Pino-Fan (2016) la complejidad de la antiderivada se caracteriza mediante cuatro configuraciones de objetos primarios relacionadas con cuatro problemas fundamentales: a) el problema geométrico de las tangentes de una curva y la cuadratura de la misma; b) el problema de la relación fluxiones - fluentes; c) el problema sobre la relación de los diferenciales y las sumatorias; y d) el problema de la identificación de funciones elementales. La caracterización de dicha complejidad permite tener elementos para diseñar cuestionarios que permiten caracterizar la comprensión de los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio sobre la antiderivada. En Gordillo, Pino-Fan, Font y Ponce (2018) y en Pino-Fan, Font, Gordillo, Larios y Breda (2018) se diseñó un cuestionario para determinar la comprensión de los estudiantes universitarios sobre la antiderivada en el que se incluyeron tareas que activan los diversos significados parciales de la antiderivada caracterizados en Gordillo y Pino (2016).

Monje, Seckel y Breda (2018), por medio de un análisis comparativo entre la complejidad del objeto matemático inecuación con el currículo nacional y los textos escolares otorgados por el Ministerio de Educación de Chile, concluyeron que el tratamiento que se le otorga al objeto matemático en estudio (inecuaciones) no considera todos los componentes necesarios para la enseñanza de la inecuación a partir de su complejidad, en particular, se observó que tanto el currículo como los textos escolares dejan fuera, en particular, las inecuaciones cuadráticas y las inecuaciones con valor absoluto.

En estas investigaciones se llegó a la conclusión de que los profesores debían tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos que enseñaban para conseguir una enseñanza más eficaz, lo cual llevó a los autores de este artículo a interesarse por la manera de incorporar la problemática de la complejidad de los objetos matemáticos en la formación de profesores.

La complejidad del objeto matemático media aritmética

Rondero y Font (2015) profundizan sobre los mecanismos de articulación de la complejidad asociada al objeto matemático media aritmética. Para ello, describen dicha complejidad en términos de diferentes significados: suma de todos los valores dividida por el número de valores; estimación de una medida de una magnitud; valor representativo de un conjunto de datos; operador que asocia a un conjunto de datos un único valor; promedio de promedios y media ponderada. Enseñando una muestra representativa de estos significados, podemos decir que el maestro estaría trabajando, a través de la resolución de problemas, la representatividad del objeto matemático media aritmética y permitiendo que el estudiante articule o conecte los diferentes significados. En esta investigación hemos utilizado tres significados distintos: La media como valor representativo de un conjunto de datos; La media como la estimación de una medida; La media como valor que compensa los excesos con los defectos.

■ Metodología

En ese apartado, presentamos el contexto del estudio (participantes de la investigación, tipo de máster), explicamos el tipo de tarea que se les propuso y, aclaramos como se han analizado las respuestas de los docentes.

Contexto del estudio

Han participado de esta investigación, 95 profesores que ejercen la docencia de matemáticas en instituciones educativas públicas y privadas en diferentes provincias y ciudades de Ecuador, en particular, profesores que trabajan en los niveles de Educación General Básica Superior (EGBS) y Bachillerato General Unificado (BGU). La mayor parte de los profesores acreditan formación inicial en Licenciatura en Matemáticas, pero, algunos presentan formación inicial en Educación General Básica, Sociología u otras áreas del conocimiento. Además de ejercer la

actividad de docencia en matemáticas, los profesores estaban realizando un máster profesional de formación de profesores de matemáticas de secundaria.

Dicho máster tiene como enfoque la formación continua y profesionalización docente. Dado su aspecto profesional, el máster se constituye de un curso de dos años, divididos en tres bloques: a) el bloque general (15 créditos ECTS) que incluye asignaturas de la psicología, sociología, orientación y sistema educativo ecuatoriano; b) el bloque específico (21 créditos ECTS) que contempla las asignaturas de la disciplina (matemática) y su didáctica y; c) el bloque de *prácticum* y trabajo de fin de máster (TFM) (24 créditos ECTS) que se orienta al ejercicio de articulación entre la teoría y la práctica.

Una de las asignaturas del currículo de este máster, titulada *Innovación e Investigación sobre la Propia Práctica*, impartida en el último semestre del curso, tenía como principal objetivo presentar propuestas de innovación y herramientas de valoración de la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que permitan al profesor la mejora de su propia práctica. Además, la asignatura pretendía hacer una iniciación a la investigación en Didáctica de las Matemáticas y a la difusión de sus resultados.

Al final de la asignatura *Innovación e Investigación sobre la Propia Práctica* se realizó una evaluación para verificar los aprendizajes logrados por los profesores. Una de las tareas de evaluación consistía en identificar la comprensión que tienen los profesores acerca de los distintos significados de la media aritmética, haciéndoles relacionar el tipo de significado con distintos tipos de problemas planteados.

Tarea planteada a los profesores

La tarea, basada en Batanero (2000), trataba de que los profesores relacionasen los significados parciales de la media aritmética: 1) la media como valor representativo de un conjunto de datos; 2) la media como la estimación de una medida; y 3) valor que compensa los excesos con los defectos (equilibrio, equidad, etc.) con los siguientes problemas:

Problema A: Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?

Problema B: Los siguientes valores se obtuvieron al medir la altura (cm.) alcanzada al saltar por un grupo de alumnos antes y después del entrenamiento. ¿Cree que el entrenamiento es efectivo?

Altura alcanzada en cm.

Alumnos	Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Laia	Hilda	Inés	Juana
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

Problema C: Ocho alumnos de la misma clase miden el peso de un objeto pequeño usando el mismo instrumento, obteniendo los siguientes valores en gramos: 6,2; 6,0; 6,0; 6,3; 6,1; 6,23; 6,15; 6,2. ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?

La tarea correcta que responde a esta identificación significado-problema, es:

- La media como valor representativo de un conjunto de datos, se corresponde con el problema B; (1- B)
- La media como la estimación de una medida, se corresponde con el problema C; (2- C)
- La media como valor que compensa los excesos con los defectos (equilibrio, equidad, etc.) se corresponde con el problema A. (3 - A)

Análisis de los datos

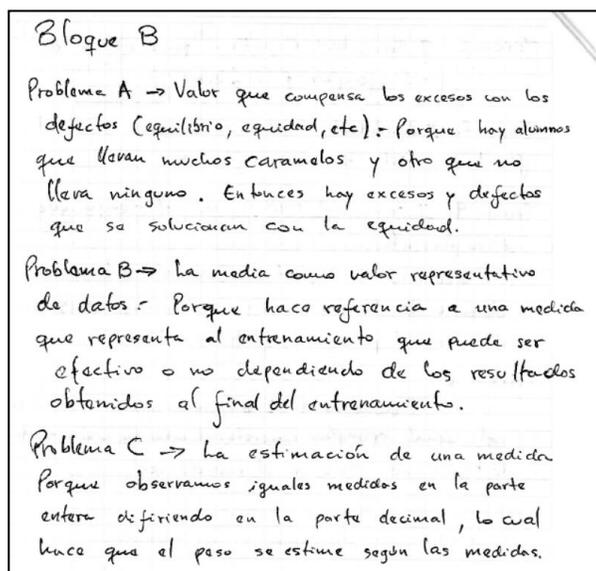
Para analizar cualitativamente las respuestas de los profesores, primero se estudió la correspondencia (o no) entre los tres significados parciales de la media aritmética contemplados en el diseño de la tarea y el problema, donde este significado es necesario para su resolución. Luego, se analizó la respuesta que los profesores daban para relacionar los distintos significados (La media como valor representativo de un conjunto de datos; La media como la estimación de una medida; La media como valor que compensa los excesos con los defectos) con los problemas propuestos.

■ Resultados

Al analizar las respuestas de los 95 profesores participantes, se concluye que un número importante (56) al relacionar los tres significados con los problemas propuestos, lo hacen de forma confusa y errónea. Por otra parte, el 21 de los participantes, dan una respuesta correcta, pero su justificación no es válida (Figura 1); mientras que 18, señalan las respuestas correctas, sin ningún tipo de justificación.

En la Figura 1, aunque el profesor hace la relación tipo de significado parcial con la tarea correspondiente de forma correcta, su justificación es confusa y poco clara. Por ejemplo, al justificar que el problema C se relaciona con el significado de la media como estimación de una medida, su justificativa para tal respuesta focaliza en que los valores, aunque sean iguales en la parte entera, se diferencian en la parte decimal, considerando a esta parte, como base para la estimación del peso real del objeto. Ese tipo de justificación, no tiene claridad ni rigurosidad desde el punto de vista matemático.

Entre los errores más frecuentes que presentan los profesores está lo de relacionar el problema B con el significado de media como estimación de una medida. En ese caso, es plausible suponer que solamente por tener muchos datos de una determinada situación, los profesores ya creen que el problema se refiere a una estimación de una medida (Figura 2):



Bloque B

Problema A → Valor que compensa los excesos con los defectos (equilibrio, equidad, etc) - Porque hay alumnos que llevan muchos caramelos y otro que no lleva ninguno. Entonces hay excesos y defectos que se solucionan con la equidad.

Problema B → la media como valor representativo de datos - Porque hace referencia a una medida que representa al entrenamiento que puede ser efectivo o no dependiendo de los resultados obtenidos al final del entrenamiento.

Problema C → la estimación de una medida porque observamos iguales medidas en la parte entera diferenciando en la parte decimal, lo cual hace que el peso se estime según las medidas.

Figura 1. Respuesta correcta de uno de los profesores. Fuente: los autores.

3) Media Aritmética: A continuación tienes diferentes significados de la media aritmética y diferentes problemas. Asocia cada significado con el problema que pone en juego este significado para su resolución

Significados:

- La media como valor representativo de un conjunto de datos
- La media como la estimación de una medida
- Valor que compensa los excesos con los defectos (equilibrio, equidad, etc.)

Problemas:

Problema A. Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?

A=5, N=5, Media=20/5. Se asocia con la media como valor representativo de un conjunto de datos.

Problema B: Los siguientes valores se obtuvieron al medir la altura (cm.) alcanzada al saltar por un grupo de alumnos antes y después del entrenamiento. ¿Crees que el entrenamiento es efectivo?

Altura alcanzada en cm.

Alumnos	Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Laia	Hilda	Inés	Juana
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

Se asocia con la media como la estimación de una medida.

Problema C. Ocho alumnos de la misma clase miden el peso de un objeto pequeño usando el mismo instrumento, obteniendo los siguientes valores en gramos: 6,2; 6,0; 6,0; 6,3; 6,1; 6,23; 6,15; 6,2. ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?

Se asocia con la media como estimación de una medida.

Figura 2. Respuesta incorrecta de uno de los profesores. Fuente: los autores.

También cometieron errores al relacionar el significado de la media como un valor representativo de un conjunto de datos, con el problema que trataba de la media como estimación de una medida, conforme la Figura 3.

Problema A. Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?

2. La media como la estimación de una medida.

Problema B: Los siguientes valores se obtuvieron al medir la altura (cm.) alcanzada al saltar por un grupo de alumnos antes y después del entrenamiento. ¿Crees que el entrenamiento es efectivo?

Altura alcanzada en cm.

Alumnos	Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Laia	Hilda	Inés	Juana
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

3. Valor que compensa los excesos con los defectos (equilibrio, equidad)

Problema C. Ocho alumnos de la misma clase miden el peso de un objeto pequeño usando el mismo instrumento, obteniendo los siguientes valores en gramos: 6,2; 6,0; 6,0; 6,3; 6,1; 6,23; 6,15; 6,2. ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?

1. La media como un valor representativo de un conjunto de datos

Figura 3. Respuesta incorrecta de uno de los profesores. Fuente: los autores.

Este tipo de resultado nos lleva a inferir que el conocimiento que tienen los profesores en ejercicio sobre la media aritmética, no les permite identificar el tipo de significado que es necesario poner en juego para la resolución de un problema (donde la noción de media aritmética es necesaria para su resolución).

■ Consideraciones finales

Una vez que se han revisado y analizado las respuestas que los 95 profesores dan a la relación entre significado y problema del objeto matemático media aritmética, se puede inferir que más de la mitad de éstos no tienen claro cuáles son los significados de la media aritmética, lo que dificulta significativamente, aplicarlos en la resolución de problemas. Este resultado, evidencia la necesidad de trabajar, con los profesores, una muestra representativa de los diferentes significados del objeto matemático que se quiere enseñar. Se trata de un resultado coherente con lo que se propone en Rondero y Font (2015) cuando abordan la complejidad de la media aritmética y sus mecanismos de articulación, o Burgos, et al (2018), cuando hace referencia a la importancia de la pluralidad de los significados de la proporcionalidad.

El abordaje del componente *Representatividad* de la idoneidad epistémica, es elemento importante para una formación docente direccionada a formar profesores en conocimientos y competencias didáctico matemáticas, pues el profesor, al conocer una muestra representativa de significados de un determinado objeto matemático, puede trabajar con una muestra representativa de problemas, generando así, una mejor idoneidad epistémica; facilitando que los alumnos construyan una red de significados parciales, conectados entre sí, que les permita desarrollar la competencia matemática que les posibilita resolver diferentes tipos de problemas (en los que es necesario poner en funcionamiento alguno de los significados parciales del objeto matemático que se está enseñando).

Agradecimientos: Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y REDICE18-2000 (ICE-UB).

■ Referencias

- Alpizar-Vargas, M. & Morales-López, Y. (2019). Teaching the Topic of Money in Mathematics Classes in Primary School. *Acta Scientiae*, 21(5), 102-127. doi: <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5262>
- Balcaza, T., Contreras, A., y Font, V. (2017). Análisis de Libros de Texto sobre la Optimización en el Bachillerato, *Bolema*, 31(59), 1061-1081.
- Breda, A., y Lima, V. M. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, 5(1), 74-10. Doi: 10.4471/redimat.2016.1955
- Breda, A., Pino-Fan, L. R., y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13, 1893-1918. Doi: 10.12973/eurasia.2017.01207a
- Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 25, 41-58.
- Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa*, 44, 1-22.
- Contreras, A., García, M. y Font, V. (2012) Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. *Bolema*, 26(42B), 667-690.
- Font, V., Breda, A., y Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 10(2), 1-23. Doi: 10.3895/rbect.v10n2.5981
- Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97-124.
- Font, V., Planas, N., y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.

- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 37-42.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Arrieche, M. (2009) ¿Alguien sabe qué es el número? *Unión*, 19, 34-46.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113.
- Giacomone, B., Godino, J. D., y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. *Educação e Pesquisa*, 44, e172011.
- Gordillo, W., & Pino-Fan, L. (2016). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. *Bolema*, 30(55), 535-558.
- Gordillo, Pino-Fan, Font y Ponce (2018). Algunas tareas para evaluar la comprensión sobre el objeto matemático antiderivada. *Academia y virtualidad*, 11(2).
- Monje, Y., Seckel, M. J., Breda, A. (2018). Tratamiento de la Inecuación en el Currículum y Textos Escolares Chilenos, *Bolema*, 32(61), 480-502.
- Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D., y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, 34(2), 123 – 150.
- Pino-Fan, L. R., Font, V., Gordillo, W., Larios, V., y Breda, A. (2018). Analysis of the meanings of the antiderivative used by students of the first engineering courses. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(6), 1091-1113. Doi: 10.1007/s10763-017-9826-2
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21(1), 63-94.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178.
- Rondero, C., y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 29-49.
- Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27(1), 77 - 120.