VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS Y DIDÁCTICOS DEL VALOR ABSOLUTO

EPISTEMOLOGICAL AND DIDACTIC OBSTACLES OF ABSOLUTE VALUE

Sahara Doria Rodríguez, Francisco Ugarte Guerra
Instituto de investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (IREM-PUCP)
sahara.doria@edu.pe, fugarte@pucp.edu.pe

Resumen

En este artículo presentamos los resultados del análisis preliminar de una investigación cuyo objetivo es diseñar una *situación problema* para la enseñanza del valor absoluto, tomando como marco teórico la teoría de situaciones didácticas. La metodología está basada en la ingeniería didáctica, en este trabajo detallamos el análisis realizado en la dimensión epistémica y cognitiva. En la dimensión epistémica, se analiza el origen intramatemático del valor absoluto, así como la evolución de las concepciones asociadas, mientras que en la dimensión cognitiva se describen los obstáculos epistemológicos y didácticos, asociados a esta noción. Establecer los obstáculos asociados a esta noción son claves para el diseño de la *situación problema*.

Palabras clave: valor absoluto, obstáculos didácticos y epistemológicos

Abstract

This article reports on the results of the preliminary analysis of an investigation aimed at designing a problem situation for the teaching of absolute value, taking the theory of didactic situations as theoretical framework. The methodology is based on the didactic engineering. The analysis of the epistemic and cognitive dimension is given in details. The epistemic dimension analyzes the intra-mathematical origin of the absolute value, as well as the evolution of the associated conceptions, while in the cognitive dimension the epistemological and didactic obstacles associated with this notion are described. Establishing the obstacles associated with this notion is essential to the design of the problem situation.

Key words: absolute value, didactic and epistemic obstacles

Introducción

La importancia de la enseñanza del valor absoluto en la escuela básica regular está asociada a su papel en la construcción y comprensión de conceptos matemáticos más complejos como, por ejemplo, el de límite de una función. Entre las investigaciones que describen las dificultades que tienen los estudiantes en relación al valor absoluto están las de Chiarugi, Fracazina y Furinghetti, (1990) quienes luego de realizar un análisis longitudinal con estudiantes de primer, cuarto año de secundaria y primer año universitario concluyeron que los estudiantes tienen dificultades para identificar el dominio de la función valor absoluto y su imagen correspondiente, y que esas dificultades no se superan con el grado de instrucción, también señalan que definir al valor absoluto de un número como el valor numérico positivo genera errores en los estudiantes, lo que se evidencia al resolver tareas que involucran ecuaciones con valor absoluto. Por otro lado, Gagatsis y Thomaidis (1995); realizaron una investigación donde describen el origen matemático del valor absoluto y también muestran el desarrollo conceptual de esta noción a lo largo del tiempo.

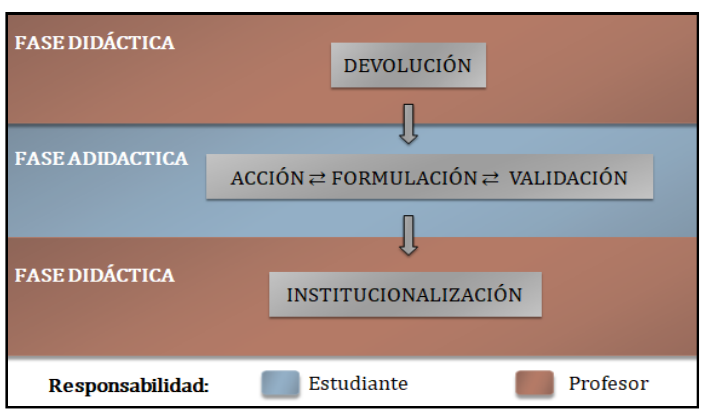
Desde la Teoría Ontosemiótica de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), Wilhelmi, Godino, y Lacasta (2007); realizaron el análisis de la eficacia didáctica de las técnicas asociadas a los distintos significados del valor absoluto, entre los significados analizados están el aritmético, métrico, vectorial, función máximo y función por partes, estos investigadores concluyeron que estos significados no son equivalentes desde el punto de vista epistémico debido a que su uso no involucra los mismos objetos matemáticos y por ende el empleo de estos distintos significados afectará las prácticas operatorias y discursivas del estudiante en la resolución de problemas. Por otro lado, Gagatsis y Panaoura (2014) estudiaron la relación causa-efecto que hay entre el concepto que tienen los estudiantes acerca del valor absoluto de un número y su rendimiento al resolver ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto, los resultados muestran que los estudiantes tienden a aplicar procedimientos algorítmicos para resolver ecuaciones que claramente no tienen solución, procedimientos que evidencian obstáculos epistemológicos relacionados al valor absoluto.

A continuación, presentamos los resultados del análisis preliminar que realizamos como una etapa previa al diseño de la situación didáctica, guiados por los resultados de las investigaciones ya citadas, enfatizamos en la dimensión epistémica, cognitiva y didáctica, que luego servirá de insumo para el diseño de una situación problema para la enseñanza del valor absoluto.

Marco teórico

El marco teoría de referencia en esta investigación es la teoría de situaciones didácticas Brousseau (2007), que sustenta que todo conocimiento matemático tiene al menos una situación fundamental que permite su construcción a través de situaciones didácticas diseñadas de manera que un conjunto de variables didácticas actué sobre las acciones y estrategias que realizará el estudiante de forma autónoma.

Figura 1. *Teoría de situaciones didácticas*



Fuente: *Propio*

La figura 1 explica el supuesto principal de la teoría de situaciones didácticas, en referencia a que es el estudiante quien a partir de la "devolución" hecha por el profesor, se vuelve responsable de su propio aprendizaje, siendo el profesor, quien al final del proceso, retoma esa responsabilidad para hacer la institucionalización de los saberes construidos. La devolución es el proceso mediante el cual el profesor “devuelve” la responsabilidad de un problema al alumno, de manera que el alumno entre nuevamente a la fase adidáctica.

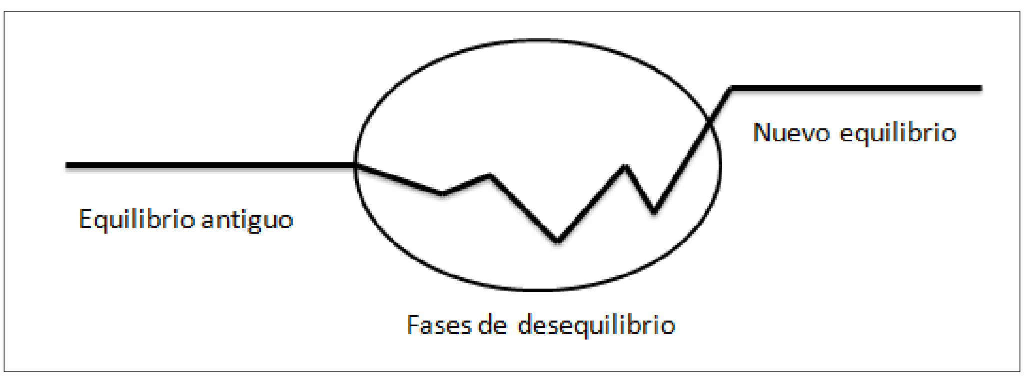
Brousseau (1983) considera que los conocimientos construidos por los estudiantes son locales y pueden eventualmente convertirse en fuente de errores o dificultar la adquisición de un nuevo aprendizaje. De acuerdo con Almouloud (2007), uno de los factores que más influencia en el proceso de aprendizaje de los estudiantes es el tratamiento del error, esto debido a que el error puede ser evidencia de que el estudiante tiene un insuficiente conocimiento de un concepto matemático o que éste no está completamente construido. Por lo tanto, Almouloud (2007) sostiene que el profesor debe realizar un proceso de “eludir” que no busca corregir la raíz del error sino mostrar al estudiante la “manera correcta” enfatizando la construcción del conocimiento, este proceso es importante, para que el error no sea grabado en la mente del estudiante tornándose persistente.

¿Qué es un obstáculo?

Brousseau (1983) define un obstáculo como un conocimiento que en un determinado ámbito de aplicación es válido y cierto, pero que en un ámbito más amplio se torna falso o inadaptable. Un obstáculo se manifiesta a través de errores los cuales reflejan una concepción coherente pero no correcta.

Al respecto Almouloud (2007) señala la importancia de una interacción constante del estudiante con situaciones problemáticas que le permitan actualizar los ya existentes, esto está muy relacionado a la noción de desequilibrio. La figura 2 ejemplifica esta visión, en la cual los conocimientos que están es un estado de equilibrio deben pasar por fases transitorias, en las cuales los conocimientos anteriores no funcionan bien y resultarán ineficaces en la resolución del problema propuesto, la superación de ese momento de desequilibrio pasa a un nuevo estado de equilibrio, lo que significa que hubo una reorganización de los conocimientos en que nuevas conocimientos se han incorporado al saber antiguo.

Figura 2. *Fases de Desequilibrio*



Fuente: *Almouloud (2007, p.130)*

Brousseau (1983) clasifica los obstáculos de acuerdo a su origen de la siguiente manera:

- Obstáculo ontogénico. Son aquellos que se originan por las limitaciones propias del sujeto en algún momento de su desarrollo, y que por lo general son de naturaleza neurofisiológica.

- Obstáculo didáctico. Son los que se originan por las por la elección de enseñanza de un determinado conocimiento por parte de un proyecto o institución educativa y son provocados por una transposición didáctica que el profesor difícilmente puede renegociar en el cuadro estricto de la clase.
- Obstáculo epistemológico. Son los que se originan por el mismo conocimiento, y están relacionados a su desarrollo histórico. Almouloud (2007) señala que los obstáculos epistemológicos son inherentes al saber y pueden ser identificados en las dificultades que los matemáticos encontrarán en la historia para la comprensión y utilización de ciertos conceptos.

Método de investigación

La metodología que sigue este trabajo de investigación sigue principios de la ingeniería didáctica. De acuerdo con Artigue (1996) la ingeniería didáctica es una metodología de investigación que se caracteriza por un esquema experimental basado en "realizaciones didácticas" en el aula, es decir en la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Se diferencia de otros métodos de investigación que realizan experimentos en el aula en que su proceso de validación es interno fundamentado en la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori.

Los objetivos de una investigación de ingeniería didáctica son diversos, uno de los principales mencionados por Artigue (1995) es que la ingeniería didáctica es un instrumento que permite visualizar los procesos de aprendizaje de un concepto determinado, en particular, la elaboración de génesis artificial para un concepto dado.

Este análisis consta de 4 etapas: Análisis preliminar, Concepción y Análisis a Priori; Experimentación, Análisis a posteriori y Validación. Artigue (1996) señala que el análisis preliminar consiste en el estudio en tres dimensiones: Epistémica, Didáctico y Cognitivo. La dimensión epistémica hace referencia a un análisis epistemológico asociado a las características del saber en juego. La dimensión cognitiva hace referencia a un análisis o estudio de las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza, sus concepciones, dificultades y obstáculos asociados al concepto que se abordará y la dimensión didáctica hace referencia a las características de funcionamiento del sistema de enseñanza. A continuación, presentamos los resultados del análisis de estas tres dimensiones.

Resultados

En la *dimensión epistémica* recogemos parte de los resultados obtenidos por Gagatsis y Thomaides (1995), ellos muestran el desarrollo conceptual del valor absoluto y sus propiedades a lo largo de la historia. Estos investigadores, realizaron un estudio histórico distinguiendo *cuatro etapas* principales:

En la *primera etapa* se muestra el origen del valor absoluto, surgió por la necesidad de advertir el realizar una operación que pudiera dar como resultado un número negativo. En esta etapa se muestra el origen del valor absoluto. Vieté en 1591 en su obra *In Arten Analyticem Isagoge* introdujo una notación especial denominada "*unsichere minus*" (incierto menos) representado con el símbolo "=" para expresar la substracción de dos magnitudes no conocidas. Por ejemplo, al no saber cuál magnitud es mayor, expresaba la diferencia entre A^2 y B como $A^2 = B$ ó $B = A^2$, esto con la finalidad de evitar una operación que en ese tiempo era imposible, ya que aún no se habían definido a los números negativos.

En la *segunda etapa* el desarrollo conceptual del valor absoluto está muy vinculado al origen de los números negativos. Los números negativos aparecen a inicios del siglo XVII como una ampliación de los números positivos, conocidos en ese tiempo como objetos nuevos "imaginarios", los cuales se diferencian de los positivos por la agregación de signos. Wallis, en 1673 es uno de los primeros que intenta dar una interpretación geométrica a los números negativos, tomando como ejemplo a una persona que se mueve a lo largo de una recta, de manera que +3 significa tres yardas adelante *y*-3 significa 3 yardas para atrás, todo esto en la misma línea, es decir para Wallis, el "número sin signo" funciona como distancia del origen (el punto observado como el inicio del movimiento). La interpretación del valor absoluto como "el número sin signo" o como la "distancia de cero" predominó hasta inicios del siglo XIX. Sin embargo, a inicios del siglo XVIII, Leibniz hizo una distinción del término valor absoluto con la palabra "mol", define tal término al estudiar el simbolismo algebraico para la sustracción como lo hizo Vieté en 1591:

> "Pero $a - b$ representa la diferencia entre a y b, cuando a es mayor, y $b - a$, cuando b es mayor"; y a este mol se le puede denominar $a - b$, cuando se parte de la base que el valor absoluto de por ejemplo +2 y -2 es lo mismo, o sea +2. Aplicado análogamente: si se describe a - b como c, entonces el mol c o el valor absoluto de c es +2, lo que presenta un valor determinado, independientemente de si c es positivo o negativo; es decir, c es igual a +2 o -2. Dos cantidades diferentes con el mismo valor absoluto tienen siempre el mismo cuadrado". (Cajori, 1928-1929, tomo. 1, p. 223 – 224 citado por Gagatsis y Thomaidis, 1995, p.8).

En la cita mencionada en el párrafo anterior se tiene una referencia más clara del término valor absoluto donde se utiliza la palabra "moles", que fue traducido por Cajori como valor absoluto. En la segunda mitad del siglo XVIII, se empieza a hacer referencia al uso sistemático de este término en relación con los problemas que exigían un tratamiento de las inecuaciones. Una de estas referencias se encuentra en una conferencia de Lagrange sobre la solución de la ecuación diofántica $A = u^2 - Bt^2$, donde establece que, si esta ecuación es resoluble, entonces el coeficiente A es un divisor de un número de la forma $a^2 - B$, donde a es un número natural menor a $A/2$. Con respecto a esta demostración, Lagrange menciona lo siguiente:

> "Por lo demás, hay que resaltar, para evitar todo error, que cuando decimos que a debe ser menor a $A/2$, entendemos que a y A son tomados positivamente, aunque puedan ser por cierto positivos o negativos; de modo que solo se debe tomar en cuenta, en esta comparación de los números a y A, su valor absoluto." (Lagrange, 1768, p. 390 citado por Gagatsis y Thomaidis, 1995, p.8)

En la segunda etapa la frase "haciendo abstracción del signo" hace referencia a la noción de valor absoluto, y se convierte en una herramienta importante en el desarrollo la teoría de números y en la solución de inecuaciones.

En la *tercera etapa* el valor absoluto, aparece por primera vez como un concepto independiente en el año 1821 en el trabajo de Cauchy denominado "*Curs d' analyse*". Cauchy define al valor absoluto como el valor numérico de una cantidad:

> "…llamaremos valor numérico de una cantidad al número base, que hace que cantidades iguales que tienen el mismo signo tengan el mismo valor numérico y que cantidades opuestas que están afectados con signos contrarios, tengan el mismo valor numérico." (Cauchy, 1821, p. 18 citado por Gagatsis y Thomaidis, 1995, p.13).

Este término de valor absoluto, que es definido para una cantidad real, será utilizado por Cauchy más adelante en el área de números complejos. Cauchy demuestra que $\frac{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\cdots}}{\sqrt{n}}$ es la expresión del valor medio para los valores numéricos de n cantidades a, a', a''

Sobre el denominador de la fracción, escribe lo siguiente:

> "Esta expresión que sobrepasa el mayor de los valores numéricos se le puede llamar el módulo del sistema de cantidades $a\ \ ,\ a',\ a''$,…El módulo del sistema de dos cantidades a y b será el módulo de la expresión imaginaria $a + b\sqrt{-1}$, sea como fuere, las expresiones reales de la forma $\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \cdots}$ tienen propiedades notables (Cauchy, 1821, citado por Gagatsis y Thomaidis, 1995, p.13).

En relación con estos problemas y para lograr una representación de la relación de inecuación, Cauchy utilizó por primera vez una abreviación para el término de los valores numéricos, en el cual él escribe:

$$val.num.(a + a' + a'' + \cdots) < \sqrt{n}\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \cdots}$$

Además de $\sqrt{a^2}$, Cauchy usa una variedad de expresiones para hacer referencia al valor absoluto de una cantidad a lo largo del documento "*Curs d' analyse*", a veces incluso el tradicional "haciendo abstracción de signos". En el capítulo III con el título "sobre la resolución numérica de ecuaciones" se utiliza sistemáticamente el término de los valores numéricos de una cantidad y la abreviación "val.num" en todas las inecuaciones que tengan que ver con los valores de raíces y la solución aproximada de ecuaciones polinómicas. Sin embargo, la novedad fundamental que Cauchy introdujo, con relación al valor absoluto, está en el uso de este término en definiciones y teoremas de convergencia y continuidad.

Un ejemplo, es la prueba de fracciones sobre la convergencia absoluta de una recta numérica donde Cauchy utiliza implícitamente la desigualdad triangular.

$$|u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}| < |u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{n-1}|$$

Durante la tercera etapa el valor absoluto carece de una notación única para representarlo, por lo que no se formalizan sus propiedades.

Finalmente, en la *cuarta etapa*, el valor absoluto es visto como un instrumento de desarrollo del análisis complejo. El símbolo actual de valor absoluto (| |), fue introducido por Weierstrass en 1841, en su trabajo de la desigualdad de Cauchy, con la finalidad de expresar el modulo de una variable compleja y ciertos conceptos topológicos, pero este simbolismo no fue aceptado en la comunidad matemática sino hasta finales del siglo XIX. La formalización de sus propiedades y su definición formal como "función por partes" desempeñó un rol importante en el siglo XX en estudios de distancia en espacios métricos y estimación en la teoría de los cuerpos.

Este desarrollo conceptual histórico explica la complejidad del concepto valor absoluto, su origen matemático relacionado a la necesidad de comprender los números negativos, algunas de las nociones del valor absoluto que se han descrito están relacionadas a obstáculos epistemológicos que se describirán más adelante.

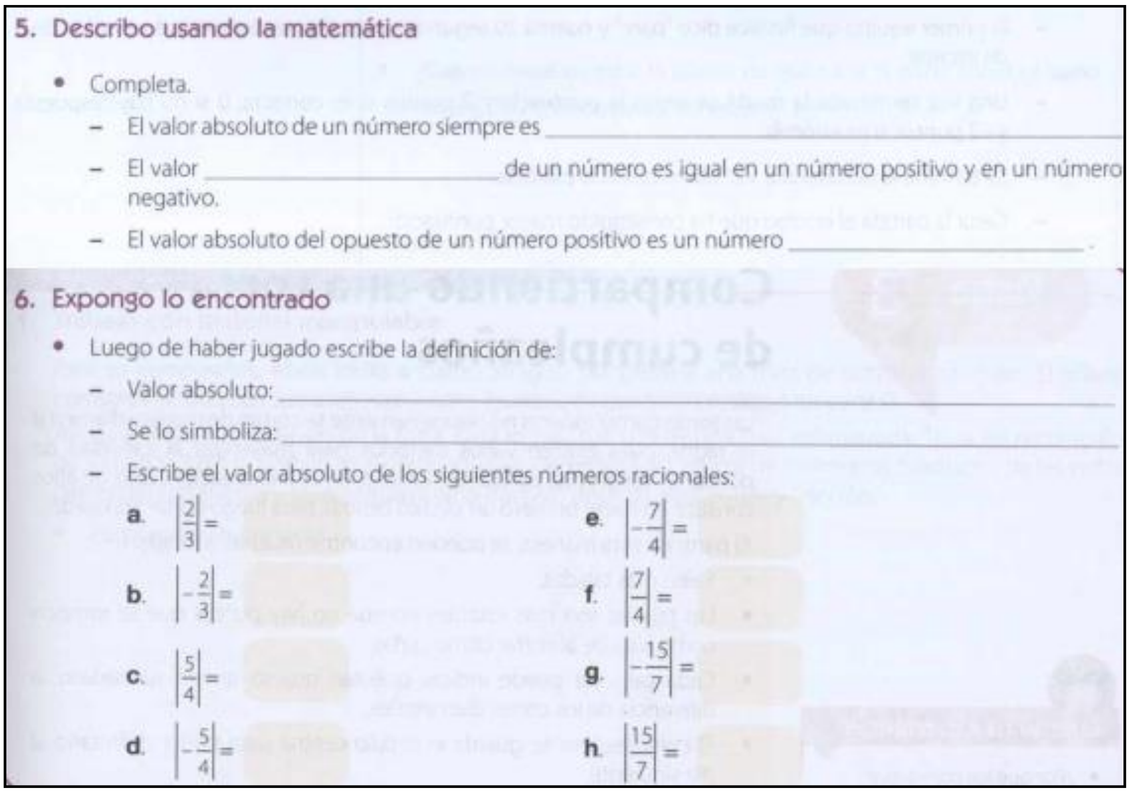
En la *dimensión didáctica* se ha realizado la revisión de la propuesta curricular del ministerio de educación para la enseñanza del valor absoluto en la educación secundaria, incluyendo una revisión de los textos y cuadernos de trabajo que utilizan los estudiantes, con la finalidad de identificar los conceptos de valor absoluto y los tipos de preguntas que resuelven los estudiantes en relación a esta noción.

Respecto a la forma en la que es enseñado el valor absoluto, se observa que en el Texto Escolar Matemática 2, correspondiente al segundo grado de secundaria el valor absoluto se introduce dentro del capítulo de números racionales y se define de la siguiente manera:

> "El valor absoluto de un número racional es la distancia a cero de este número. Si el número racional es positivo, su valor absoluto es igual al número, pero si es negativo, entonces su valor absoluto es igual al opuesto aditivo de él" (Ministerio de Educación, 2016a, p.20).

La primera parte de esta definición introduce al valor absoluto en el contexto métrico, sin embargo, la segunda parte de esta define al valor absoluto desde el contexto aritmético. Por otro lado, los ejercicios propuestos también se presentan en un contexto aritmético, tal como se muestra en la Figura 3. Estos ejercicios están asociados a la noción de que el valor absoluto de un número es el número sin signo, convirtiéndose finalmente en una regla aprendida "el valor absoluto de un número es el número sin signo"

Figura 31. *Preguntas de reforzamiento del valor absoluto en Cuaderno de Trabajo Matemática 2*



5. Describo usando la matemática

- Completa.
  - El valor absoluto de un número siempre es ________
  - El valor ________ de un número es igual en un número positivo y en un número negativo.
  - El valor absoluto del opuesto de un número positivo es un número ________.

6. Expongo lo encontrado

- Luego de haber jugado escribe la definición de:
  - Valor absoluto: ________
  - Se lo simboliza: ________
  - Escribe el valor absoluto de los siguientes números racionales:

a. $\left|\frac{2}{3}\right| =$

b. $\left|-\frac{2}{3}\right| =$

c. $\left|\frac{5}{4}\right| =$

d. $\left|-\frac{5}{4}\right| =$

e. $\left|-\frac{7}{4}\right| =$

f. $\left|\frac{7}{4}\right| =$

g. $\left|-\frac{15}{7}\right| =$

h. $\left|\frac{15}{7}\right| =$

Fuente: *Ministerio de Educación (2016b, p.18)*

También, se realiza una actividad para que el alumno reflexione acerca de algunas propiedades acerca del valor absoluto como se observa en la Figura 4, sin embargo los ejercicios de la pregunta 6 pueden inducir al estudiante a responder verdadero a la primera afirmación que se muestra en la Figura 4, siendo esto un ejemplo de un error del tipo epistemológico reportado por Gagatsis y Panaoura (2014), los estudiantes por tanto entenderán que $|-a/b|$ es a/b, atribuyendo el signo negativo como el signo de la variable.

Figura 2. *Preguntas de reforzamiento del valor absoluto en el Cuaderno de Trabajo Matemática 2.*

Reflexiona y escribe verdadero (v) o falso (f) con respecto a las siguientes afirmaciones.

• El valor absoluto de un número racional |a/b| es a/b y, el valor absoluto de un número racional |-a/b| es a/b.	
• En la recta numérica, la distancia del valor absoluto de los números racionales |a/b| y |−a/b| al origen es la misma.	
• En la recta numérica, cuando la distancia al origen entre dos números racionales de igual medida pero con diferente signo es igual, ¿existe una simetría?	

Fuente: *Ministerio de Educación (2016b, p.19)*

Luego en el libro Texto Escolar Matemática 3 (Ministerio de Educación, 2016c), que corresponde a tercer grado de secundaria, se vuelve a trabajar con valor absoluto, dentro del capítulo de números racionales y se define de la siguiente manera “El valor absoluto de un número racional en la recta numérica es la distancia del número al origen”, la definición que se maneja en este nivel está dada en un contexto únicamente métrico, sin embargo luego adicionan “Si el número racional es mayor o igual a cero, su valor absoluto es el mismo número, si el número racional es menor que cero, su valor absoluto es el mismo número, pero con signo opuesto” (Ministerio de Educación, 2016c, p.20). Con esta adición, se define al valor absoluto desde el contexto aritmético.

Además, en el libro Texto Escolar Matemática 3, se presentan las propiedades del valor absoluto (Figura 5). Sin embargo, no se observa actividades en la que los alumnos reflexionen acerca del porqué de estas propiedades o ejemplos que expliquen cómo se deducen. Además, no se explica el significado de los operadores “∨” e “∧” en el uso de las propiedades. Chiarugi, Fracazina y Furinghetti (1990), señalaron que una de las dificultades en la comprensión del valor absoluto, es la falta de interpretación de los operadores lógicos ∨ e ∧, que por lo general pasa desapercibido para los estudiantes, y eso conlleva a los estudiantes a errores en la resolución de problemas con valor absoluto.

Figura 5. *Propiedades del valor absoluto en el libro Texto Escolar Matemática 3*

Propiedades del valor absoluto

- $|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$
- $|a| = |-a|$
- Si $|a| = b$, entonces: $\begin{cases} b \geq 0 \wedge \\ (a = b \vee a = -b) \end{cases}$
- Si $|a| = |b|$, entonces: $a = b \vee a = -b$
- Si $|a| \leq b$, entonces: $b \geq 0 \wedge -b \leq a \leq b$
- Si $|a| \geq b$, entonces: $a \geq b \vee a \leq -b$

Fuente: *Ministerio de Educación (2016c, p.22)*

Por otro lado, los ejercicios que se muestran como ejemplos, consisten en ecuaciones del tipo $|x+a|=b$ e inecuaciones del tipo $|x+a|\leq b$, las soluciones que se proponen son en base a la aplicación de algunas propiedades del valor absoluto. En la siguiente figura, se ve un ejemplo de valor absoluto en ecuaciones.

Figura 6. *Ecuación con valor absoluto en el libro Texto Escolar Matemática 3*

CÓMO HACER

Calcula el valor de x si $|x + 3| = 6$.

- Aplicamos la propiedad: $|a| = b \rightarrow b \geq 0 \wedge a = b \vee a = -b$

$|x + 3| = 6 \rightarrow x + 3 = 6 \vee x + 3 = -6 \rightarrow x = 3 \vee x = -9$

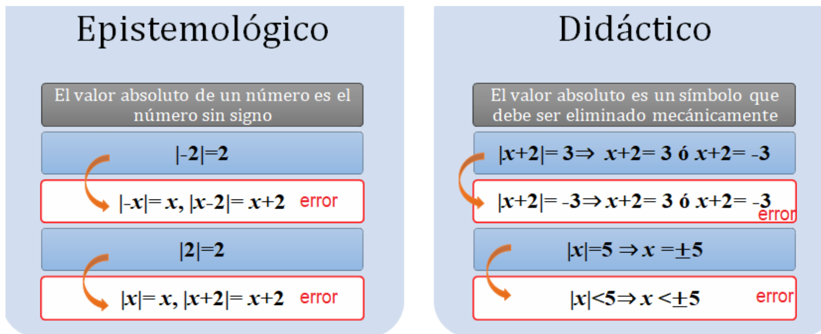
C.S. $= \{-9; 3\}$

Fuente: *Ministerio de Educación (2016c, p.22)*

Al estudiar la *dimensión cognitiva,* se investigó acerca de los obstáculos asociados a la noción de valor absoluto. El primer obstáculo está relacionado a la interpretar la noción de valor absoluto de un número como "el número sin signo", obstáculo que se evidencia cuando los estudiantes responden que $|x|$ es x o también que $|-x|$ es x, errores reportados por Wilhelmi et al. (2007). Al respecto Chiaguri, et al. (1990), menciona que la imagen conceptual del valor absoluto de un número como el "número sin signo" es tan fuerte que los alumnos rechazan la idea de que $-x$ pueden ser el resultado de un valor absoluto.

Wilhelmi et al. (2007), sostienen que la enseñanza del valor absoluto centrada en un contexto aritmético, como regla de quitar el signo menos, se ha instaurado como parte del contrato didáctico, lo que da como resultado, que cuando los estudiantes se enfrentan a ecuaciones o inecuaciones con valor absoluto, actúen de manera mecánica. Este error se presenta comúnmente en preguntas con "ecuaciones imposibles". Por ejemplo $||x-5|-12|=-5$, en ellas la mayoría de estudiantes resuelve mecánicamente la ecuación sin verificar la solución, también se observa al trabajar con inecuaciones, por ejemplo al resolver la inecuación |x|<5 los estudiantes responden x<5 o x<-5, estos errores son reportados por Gagatsis y Panaoura (2014). La figura 7 resume los obstáculos epistemológicos y didácticos del valor absoluto y los errores que se generan en otros ámbitos de aplicación se muestran en los recuadros en rojo

Figura 7. *Obstáculos epistemológicos y didácticos del valor absoluto*



Fuente: *Propio*

Conclusiones

El análisis preliminar realizado, en relación con el diseño de una *situación problema* para la enseñanza del valor absoluto, nos permite concluir:

Dado que el valor absoluto surgió dentro de la misma matemática, con la finalidad de evitar una operación aditiva que diera como resultado un número negativo, establece que la situación problema debe partir de un contexto intramatemático donde se requiera evitar el uso de número negativos, por ejemplo, al trabajar con el concepto de distancia.

La relación entre los resultados de la dimensión cognitiva y didáctica nos permite concluir que partir de un contexto métrico lleva en la práctica a usar la definición aritmética del valor absoluto, el mismo que está asociado a un obstáculo, por lo tanto, debemos partir de un contexto diferente, por ejemplo, el funcional.

En base a los hallazgos la situación problema que se va a diseñar abordará al valor absoluto desde el contexto funcional y se establecerá como una de las variables didácticas al argumento de la función, es decir se trabajará con el valor absoluto de números enteros, variables y variable con parámetros de forma gradual, esto con la finalidad de enfrentar a los estudiantes a situaciones donde las nociones relacionadas a los obstáculos didácticos y epistemológicos relacionados al contexto aritmético sean confrontadas provocando fases de desequilibrio.

Referencias bibliográficas

Almouloud, S. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. Curitiba. Editora UFPR.
Artigue, M. (1996). Ingeniería Didáctica. En: Brun, J. (Ed.), *Didática das Matemáticas* (pp.35-111). Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget.
Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En: Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gomez, P. (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* (pp.33-59). Grupo Editorial Iberoamerica: México

Chiarugi, I., Fracazina, G. & Furinghetti, F. (1990). Learning difficulties behind the notion of absolute value. *Proceeding Fourteenth PME Conference*, *3*(28), 231-238. Recuperado de http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED411137.pdf

Brousseau, G. (1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. *Recherches en Didactique des mathématiques*, *7*(2). 165-198. Traducción de Hernandez y Villalva.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas, [Traducción de Dilma Fregona]. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Gagatsis, A. & Panaoruma, A. (2014). A multidimensional approach to explore the understanding of the notion of absolute value. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45*(2), 159-173.

Gagatsis, A. & Thomaidis J. (1995). Eine Studie zur historischen Entwicklung und didaktischen Transposition des Begriffs absoluter Betrag. *Journal fur Mathematik Didaktik,16*(1-2), 3-46.

Perú, Ministerio de Educación (2016a). *Matemática 1. Secundaria.* Texto Escolar. Editorial Norma: Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2016b). *Matemática 2 Secundaria*. Cuaderno de Trabajo. Editorial Norma: Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2016c). *Matemática 3 Secundaria.* Texto Escolar. Editorial Norma: Lima.

Wilhelmi, M., Godino, J. & Lacasta, E. (2007). Didactic effectiveness of mathematical definitions the case of the absolute value. *Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(2), 73-90. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/didactic_effectiveness.pdf