Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 5 / USO DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

EXPERIENCIA DE EVALUACIÓN CON GEOGEBRA EN UN CURSO DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA PARA INGENIERÍA

EVALUATING WITH GEOGEBRA; AN EXPERIENCE IN A COURSE OF ALGEBRA AND GEOMETRY FOR ENGINEERING

Diana Pozas, Marlene Alves Dias

Universidad Nacional del Comahue (Argentina), Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)

dianapozas@hotmail.com, maralvesdias@gmail.com

Resumen

Nuestro propósito es comunicar diversas actividades con Geogebra llevadas a cabo durante el dictado de la asignatura Álgebra y Geometría I, para las carreras de Ingeniería de una universidad argentina. En este reporte focalizaremos en la instancia de evaluación, durante la cual los estudiantes disponen de dicho software. Esta modalidad de evaluación permitió reducir el énfasis en los aspectos meramente operacionales del álgebra y enfocar el trabajo de los estudiantes en tareas conceptuales; permitió evaluar tipos de tareas que no suelen incluirse en los exámenes tradicionales y fue valorada positivamente por los estudiantes. La experiencia en general abarcó el estudio de los temas: sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes. El uso de Geogebra posibilitó un trabajo tanto de carácter exploratorio como de validación, donde destacamos muy especialmente las tareas planteadas para utilizar simultáneamente la vista algebraica y la vista gráfica 3D.

Palabras clave: álgebra lineal, geogebra, evaluación, ingeniería

Abstract

This paper reports on various activities with GeoGebra carried out while teaching the subject Algebra and Geometry I, for the engineering degrees in an Argentine university. We focus on the evaluation, during which students use GeoGebra software. This evaluation mode allowed reducing the emphasis on the merely operational aspects of algebra and focusing the students' work on conceptual tasks; it allowed evaluating types of tasks that are not usually included in traditional exams and it was positively valued by students. The experience in general covered the study of the topics: systems of linear equations, matrices and determinants. The use of GeoGebra made possible both, an exploratory and validation work, where we especially highlight the tasks proposed to simultaneously use the algebraic view and the 3D graphic view.

Key words: linear algebra, GeoGebra, evaluation, engineering

Introducción

Este reporte se enmarca en un trabajo de investigación en curso, relacionado con las dificultades que enfrentan los profesores y estudiantes universitarios cuando inician el proceso de estudio del Álgebra Lineal. Para los estudiantes dichas dificultades son de índole tanto conceptual como motivacional (Carlson, 2004) y se relacionan con lo que en la literatura se conoce como el *obstáculo del formalismo* (Dorier, Sierpinska, 2001). Diversas investigaciones ponen de manifiesto la necesidad de llevar a cabo estudios que vayan más allá de la identificación de las dificultades de los estudiantes. Una de las apuestas en este sentido es la integración de las TIC en todos los niveles educativos, particularmente, el universitario.

Quienes participamos en la formación de ingenieros nos encontramos ante el reto de actualizarnos y actualizar nuestros métodos de enseñanza, para aprovechar las oportunidades que nos ofrece la tecnología actual, en beneficio de nuestra tarea y de la profesión misma de la ingeniería.

Por otro lado, asumimos que la población de estudiantes de primer año que acceden en la actualidad a nuestras aulas utiliza mayoritariamente las tecnologías digitales como herramientas de aprendizaje y las valoran positivamente como tales. Esto nos conduce a reconocer la importancia de ofrecerles materiales de estudio con este soporte para poder aprovechar los conocimientos previos de nuestros estudiantes en relación con estos nuevos modos de acercarse al conocimiento. En este sentido, a fin de delinear un conjunto de tareas mediadas con Geogebra que posibilite a los estudiantes la articulación de nociones básicas de Álgebra Lineal, se re-diseñaron algunos prácticos de Álgebra y Geometría I, asignatura que se dicta para todas las carreras de ingeniería en la Universidad del Comahue, Patagonia Argentina. La incorporación del software en las clases prácticas de la asignatura implicó cambios en la forma de evaluar. Nuestro propósito en esta oportunidad es describir y analizar esta experiencia.

A continuación, presentamos brevemente el referencial teórico que sustenta nuestro análisis.

Referencial teórico

Adoptamos como marco referencial la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard (1999, 2004, 2007) en donde se considera la matemática como producto de la actividad humana y relativa a los contextos sociales y culturales donde se desarrolla.

Dado que en el proceso de estudio de una praxeología matemática existen diferentes tipos de tareas y para cada uno hay una técnica, Chevallard (1994) se pregunta: ¿cuáles son los ingredientes que componen una técnica y en qué consiste la "puesta en obra" de una técnica? Para responder a esta cuestión, establece una distinción fundamental entre dos tipos de objetos: *los objetos ostensivos y los objetos no ostensivos*.

Los objetos ostensivos tienen una materialidad que puede percibirse a través de los sentidos: escrituras, sonidos, gestos, y por este hecho pueden ser manipulados. Los no-ostensivos son aquellos a los que se les atribuye una cierta existencia, pero no pueden verse ni mostrarse por sí mismos (ideas, conceptos, nociones), su existencia es institucional. La actividad matemática es, como toda actividad humana, actividad material. El enfoque antropológico atribuye a los objetos ostensivos, al lado de su valencia semiótica (los signos), una valencia instrumental ligada a la capacidad de los sistemas de ostensivos para integrarse en manipulaciones técnicas, tecnológicas y teóricas. Los no ostensivos no pueden existir sin los ostensivos, y recíprocamente (Chevallard, 1994).

Para comprender mejor en el contexto de esta experiencia de qué manera el uso de Geogebra puede auxiliar a los estudiantes en el proceso de estudio del Álgebra Lineal, utilizaremos las nociones de *cuadro* y *cambio de cuadro*, según Douady (1992).

Douady define que un cuadro está constituido por: objetos de una rama de las matemáticas, las relaciones entre dichos objetos, sus diversas formulaciones y las imágenes mentales posiblemente asociadas a esos objetos y a esas relaciones. Estos elementos juegan un rol esencial como herramientas dentro del funcionamiento del cuadro. Además, esta definición permite transponer el trabajo del matemático al dominio de la didáctica por medio de la noción "cambio de cuadro", esto es, obtener diferentes formulaciones de un problema que permiten la puesta en marcha de herramientas y técnicas, que no es posible realizar dentro de la primera formulación.

Para esta investigación consideramos cuatro cuadros: sistemas de ecuaciones lineales (en adelante, SEL), matrices, determinantes y geometría afín euclidiana. Podemos caracterizar cada uno de ellos en función de los ostensivos y no-ostensivos intervinientes, las definiciones y los teoremas enunciados, como así también la formulación de distintos tipos de tareas y las técnicas asociadas. En esta oportunidad, sólo describiremos muy brevemente el cuadro de los SEL, donde el ostensivo más utilizado en la introducción teórica es el que se muestra en la siguiente figura:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Figura 1: *ostensivo para SEL de m ecuaciones y n incógnitas*

La técnica más usual para resolver cualquier SEL es el método de Gauss, el cual requiere trabajar con la matriz aumentada del sistema. En este cuadro, la noción de matriz se emplea como notación (valencia semiótica) que facilita la escritura de cada paso del método de Gauss (valencia instrumental). El discurso tecnológico que justifica éste u otro método de resolución hace referencia a las nociones de sistemas equivalentes y de operaciones elementales. El siguiente ejemplo ilustra el método de Gauss-Jordan:

EJEMPLO 7 Solución de un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Solución Este sistema se escribe como una matriz aumentada y se reduce por renglones:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 19 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Figura 2: *Ostensivos matrices de sistemas equivalentes. Fuente: Grossman (1991), p. 17*

Éste es un caso típico de un tipo de tarea cuya técnica de resolución requiere de cambios de cuadro. En la figura 2 podemos observar que la tarea está enunciada en el cuadro de los SEL, el ostensivo matriz ampliada de un sistema permite el cambio al cuadro de las matrices y la resolución del sistema en este cuadro. Finalmente, se retoma el cuadro de los SEL para expresar el conjunto solución.

Para nuestra investigación es relevante considerar los ostensivos que en este cuadro se utilizan para expresar el conjunto solución de los SEL con infinitas soluciones, los cuales son en definitiva los que se estudian en Álgebra Lineal. Nos referimos concretamente a la notación paramétrica para expresar la solución general de dichos sistemas, y a la técnica para obtenerla. A modo de ejemplo, en la figura 3 podemos observar los ostensivos utilizados para expresar el conjunto solución de un SEL compatible indeterminado:

• Para $a = 0$, $[S]$ es compatible indeterminado, pues es equivalente al sistema

$$\left.\begin{aligned} x+2y+z&=1\\ 3y-z&=6\\ 0&=0\\ 0&=0 \end{aligned}\right\}\text{, que tiene las soluciones: }\left\{\begin{aligned} &z=\lambda \text{ cualquiera}\\ &y=2+\lambda/3\\ &x=-3-5\lambda/3 \end{aligned}\right.$$

Figura 3: *Ostensivo solución general de un SEL. Fuente: Burgos(1992), p. 18*

En síntesis, para analizar las praxeologías en torno a la noción de SEL son necesarios al menos cuatro cuadros, cada uno con sus características específicas. Considerar un número más reducido de cuadros no permite tener en cuenta la existencia de entornos conceptuales y técnicas similares, que en un curso introductorio de Álgebra Lineal, están lejos de integrarse en un mundo unificado y completamente articulado (Dias, 1998). Cabe aclarar que dos cuadros diferentes pueden tener los mismos objetos matemáticos pero diferentes imágenes mentales asociados a ellos, como también la problemática que generan.

Contexto de la experiencia y metodología

Álgebra y Geometría I es una asignatura de primer año que cursan todos los estudiantes que ingresan a carreras de ingeniería en la Universidad Nacional del Comahue, Patagonia Argentina. Los contenidos mínimos a desarrollar son: Números reales. Vectores en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$. Ecuaciones de la recta en el plano. Matrices y determinantes. Sistemas de ecuaciones lineales. Ecuaciones de rectas y planos en el espacio. Cónicas. Tiene una duración cuatrimestral, con 8 horas semanales distribuidas en clases teóricas y clases prácticas. Para obtener la acreditación de este curso los estudiantes deben aprobar dos exámenes parciales y un examen final.

Hemos observado que, a pesar de comenzar el curso con temas como lógica proposicional y teoría de conjuntos, la falta de preparación de los estudiantes y el uso del formalismo característico de la asignatura, hacen dificultoso el aprendizaje de los sucesivos contenidos de álgebra presentes en el programa. Se decidió entonces modificar algunos prácticos incorporando un número considerable de tareas para resolver con ayuda de Geogebra. Consideramos que de esta manera se podría enfocar el trabajo de los estudiantes en tareas conceptuales, o bien promover tanto aspectos conceptuales como técnicos de la materia.

Cabe destacar que el diseño de los prácticos no implicó un cambio demasiado abrupto en los tipos de tareas desarrolladas en años anteriores. Los nuevos prácticos respetan, en esencia, la secuencia original. Tienen tareas para realizar exclusivamente con lápiz y papel, y otras para usar además Geogebra. En este último caso fueron señaladas con el logo . Las tareas de cálculo básico para realizar en lápiz y papel se incluyen en los prácticos sin modificaciones respecto del material de años anteriores, pero en menor cantidad, entendiendo que esta práctica también es importante. Especialmente la multiplicación de matrices y la resolución de sistemas por el método de Gauss con o sin parámetros. No obstante, casi siempre se puede pensar en pequeñas modificaciones a una tarea determinada para insertar el uso del software en la resolución de esta. En este sentido, se intentó colocar la mayor cantidad de tareas posibles para usar Geogebra, de modo que el estudiante no tuvo que encender el equipo sólo para realizar una actividad puntual y aislada.

Por ejemplo, para resolver la siguiente tarea (Figura 4) se sugiere a los estudiantes que comiencen a trabajar con lápiz y papel, focalizando en las propiedades de las operaciones con matrices. Una vez que “despejaron” la matriz X pueden utilizar Geogebra para calcular las inversas y para verificar el resultado. Utilizamos frecuentemente el ostensivo A.X.B = C porque es la notación más económica para resolver ecuaciones matriciales.

Determinar, si existe, la matriz X que verifique la ecuación matricial A.X.B = C siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}10 & 3 & 14\\ 6 & -15 & 2\end{pmatrix}$$

Figura 4: *ejemplo de tarea del práctico – ecuaciones matriciales*

A continuación, se muestra otro ejemplo (Figura 5) donde se combinan técnicas de lápiz y papel con Geogebra.

a) Resolver cada SEL y escribir el conjunto solución en forma paramétrica. ¿Qué se puede decir de ambos SEL?

$$\begin{cases}3x_1 - x_2 + x_3 = -1\\ 2x_2 + x_3 = 0\\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 = 1\end{cases} \qquad \begin{cases}6x_1 + 3x_3 = -2\\ -3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 1\end{cases}$$

b) Interpretar geométricamente.

Figura 5: *ejemplo de tarea del práctico – SEL equivalentes*

La resolución de esta tarea requiere de la articulación de cuadros. En efecto, para hallar el conjunto solución el estudiante trabaja en el cuadro de los SEL y en el cuadro de las matrices manipulando ostensivos adecuados tal como se muestra en la Figura 2.

En cambio, la interpretación geométrica de los SEL con 3 incógnitas requiere conocimientos acerca de objetos geométricos en el espacio. En este tipo de tarea, el uso del software es fundamental. Ayuda al estudiante tanto a visualizar SEL equivalentes, como SEL compatibles indeterminados. La Figura 6 muestra las posiciones de todos los planos. Además, en la vista algebraica, se observa la forma paramétrica del conjunto solución obtenida con el comando *Interseca*.

También vemos en estos ejemplos una vez más, que es labor del docente enseñar a sus estudiantes que tales dispositivos son una ayuda valiosa en manos del usuario que comprende el enunciado del problema que debe resolver y las estrategias para lograrlo.

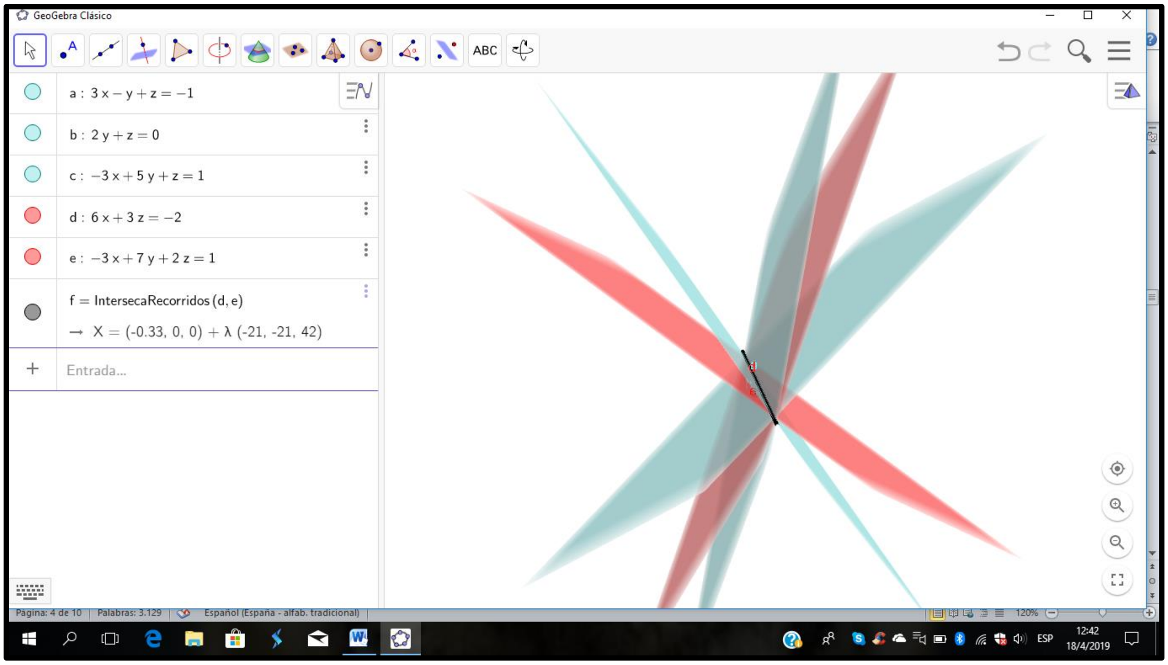

Figura 6: *interpretación geométrica de SEL equivalentes*

En general, y como se puede observar en los ejemplos anteriores, no se le dice al estudiante lo que tiene que hacer exactamente con el software, sino que se lo deja frente a la totalidad de los recursos disponibles en Geogebra, por lo cual debe decidir por sí mismo, o con sus pares, cuándo y cómo utilizarlo. Por otro lado, esta modalidad ayudó a que el estudiante practique para los exámenes presenciales, donde se podía usar la computadora.

La noción de *topos*, introducida por Chevallard y Grenier (1997) es adecuada para el análisis de procesos de estudio que proponen nuevas formas de trabajo tanto para el profesor como para el alumno, a partir del significado de la palabra latina *topos*, que significa lugar. Estos autores consideran que el topos del profesor y del alumno corresponden al momento y el lugar en el que cada uno de ellos juega, con cierta autonomía, su papel en el proceso de enseñanza y de aprendizaje. En este sentido, con la reformulación de los prácticos y otra modalidad de evaluación, se intentó cambiar el topos del estudiante para que gradualmente abandonen su dependencia con los profesores. Por otro lado, corresponde un cambio importante en el topos del profesor, ya que debe proponer tareas más abiertas y orientar al estudiante en la búsqueda de respuestas.

Análisis de resultados

Se presentaron a rendir el examen parcial 15 estudiantes, los cuales serán mencionados oportunamente como E1, E2, … El tiempo destinado para el examen fue el mismo que se utiliza habitualmente, esto es, 3 horas. Como mencionamos en el párrafo anterior, el examen fue presencial, cada estudiante podía utilizar su computadora personal en la resolución de las tareas planteadas, y al finalizar el tiempo estipulado, debía entregar dichas resoluciones por escrito.

A continuación, en la Figura 7, presentamos los enunciados de los tipos de tareas propuestos.

2º parcial Algebra y Geometria I

Nota: use Geogebra cuando lo considere necesario

1. Una matriz A_{nxn} se dice nilpotente de orden k si $A^k = O$ (matriz nula) para algún $k \geq 1$.

   a) Verificar que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es nilpotente e indicar el menor valor de k tal que $A^k = O$

   b) Demostrar: si A_{nxn} es nilpotente de orden k entonces $\det A = 0$

   c) Sea A_{4x4} nilpotente de orden 3. Calcular $det[2(Id + A + A^2)(Id - A)]$

2. Hallar una matriz X_{3x3} tal que $2X - A = BX$ donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y

   $B = \begin{pmatrix} 7 & -10 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

3. Proponer un SEL de 2x3, con coeficientes reales, cuya solución general sea:

   $$S = \{(x; y; z) = (-3; 5; 1) + \lambda(-3; 2; 2) \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$$

4. Resolver el siguiente SEL por el método de Gauss. Decir si es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible. Interpretar geométricamente:

   $$\begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ -x - y + 5z = 8 \\ -6x - 3y + 12z = 5 \end{cases}$$

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & k \\ -1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ Si $A^{-1}.\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, hallar k y A^{-1}.

Figura 7: *enunciados del examen de Álgebra y Geometría I*

Para el análisis de las producciones de los estudiantes en relación con el uso (o no uso) de Geogebra, explicitaremos algunos de los tipos de tareas que se evaluaron.

T_1 *: Aplicar una definición a un caso particular o verificar una definición*

Aplicar la definición de matriz nilpotente implica multiplicar una matriz dada por sí misma hasta obtener, si es posible, la matriz nula. En este caso, la matriz A es nilpotente de orden 3. Se observaron muchos casos donde los estudiantes no resolvieron esta tarea. Además, seguramente era la primera vez que leían la definición de matriz nilpotente. Se observó lo mismo en el examen recuperatorio, donde se planteó la definición de matriz ortogonal. Podemos considerar que los estudiantes presentan dificultades para aplicar una definición en el dominio del álgebra, una habilidad poco trabajada en la escuela secundaria. El papel de Geogebra en este tipo de tarea es complementario. Algunos estudiantes lo usaron para calcular las potencias de la matriz A.

T_2 *: Resolver ecuaciones matriciales*

La resolución más económica de esta tarea requiere conocimientos sobre las propiedades de las operaciones con matrices, sobre todo, la propiedad distributiva. La mayoría de los estudiantes optaron por la técnica de "despejar" la matriz X, concluyendo que la matriz pedida es $X = (2Id - B)^{-1}.A$
Hasta aquí se pretendía que llegara el trabajo con lápiz y papel, pero curiosamente, muchos continuaron la tarea sin utilizar Geogebra, cometiendo errores de cálculo o consumiendo tiempo innecesariamente.

T_3 : Proponer un SEL a partir de un conjunto solución dado en forma paramétrica

Cuando el conjunto solución dado representa una recta en el espacio, la técnica consiste en hallar dos planos cualesquiera cuya intersección sea dicha recta. Una técnica posible, o resolución esperable, consiste en manipular las ecuaciones paramétricas de la recta dada en el enunciado, llegando, por ejemplo, al siguiente SEL de 2x3:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 9 = 0 \\ 2x + 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

Con Geogebra es posible verificar los resultados obtenidos, como se puede observar en la siguiente figura:

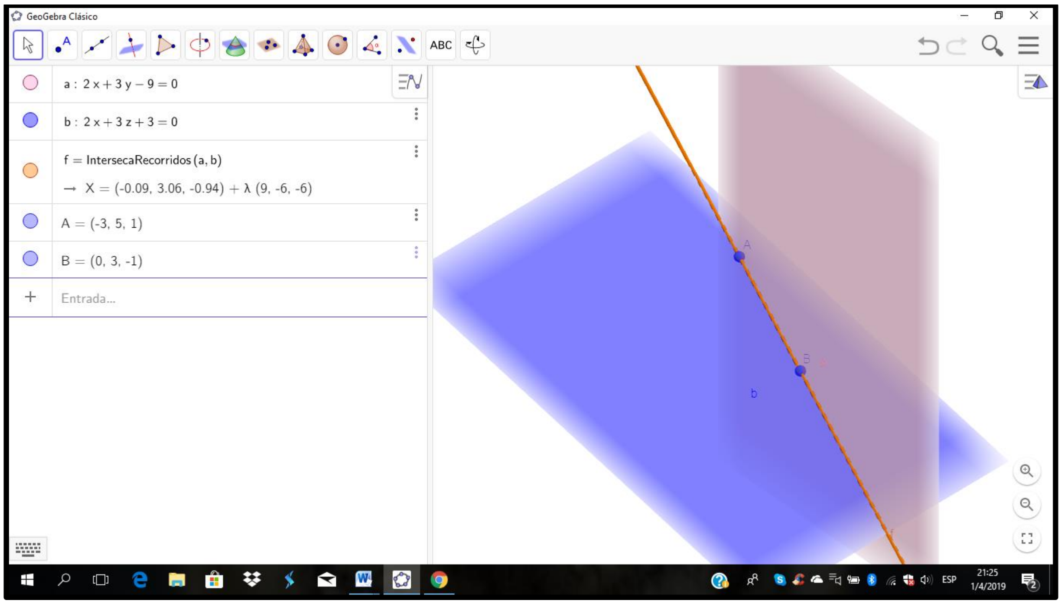

Figura 8: *representación geométrica del SEL de 2x3 y el conjunto solución*

Claramente, la respuesta a este tipo de tarea no es única y la técnica de resolución tampoco. Otra técnica posible emerge de los conocimientos que el estudiante tenga sobre rectas y planos en el espacio. En este sentido, algunos estudiantes abordaron la tarea utilizando ostensivos y elementos tecnológicos (ecuación paramétrica de la recta, vector director, vector normal, producto escalar) del cuadro de la geometría afín euclidiana.

En síntesis, este tipo de tarea podría considerarse la tarea inversa de resolver un SEL, requiere de la articulación de cuadros y la respuesta no es única. Para los estudiantes, tal "inversión" y "no unicidad de la respuesta" representan generalmente un mayor desafío.

T_4 : Interpretar geométricamente la solución de un SEL

Esta tarea, con ayuda de Geogebra, no presentó dificultad alguna. En general, las resoluciones fueron correctamente justificadas como se observa en el siguiente examen.

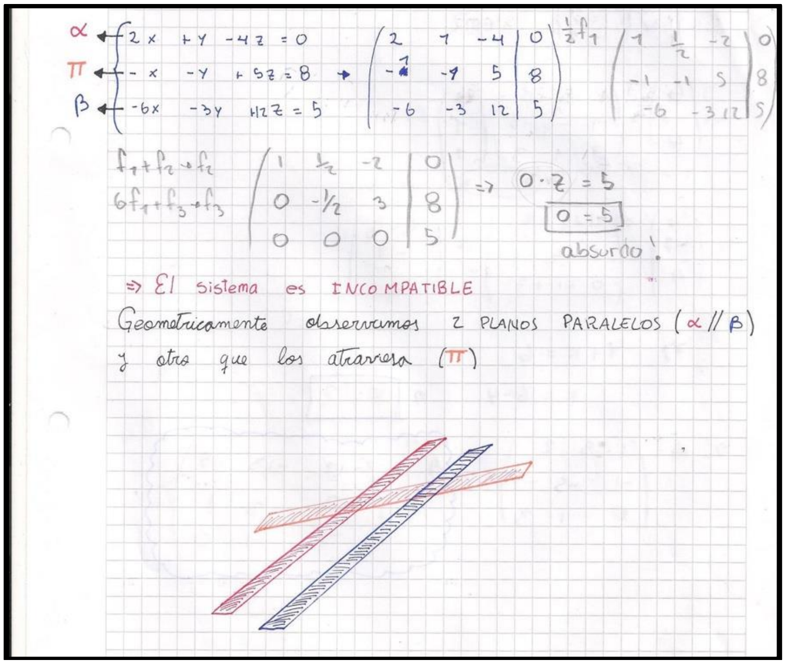

Figura 9: *Respuesta de E8. Fuente: datos de las autoras.*

Asimismo, se observó que el cambio de cuadro ayuda al estudiante a comprender mejor la razón por la cual distintos SEL incompatibles tienen distintas interpretaciones geométricas. En este caso, la imagen que se obtiene graficando con Geogebra es la siguiente:

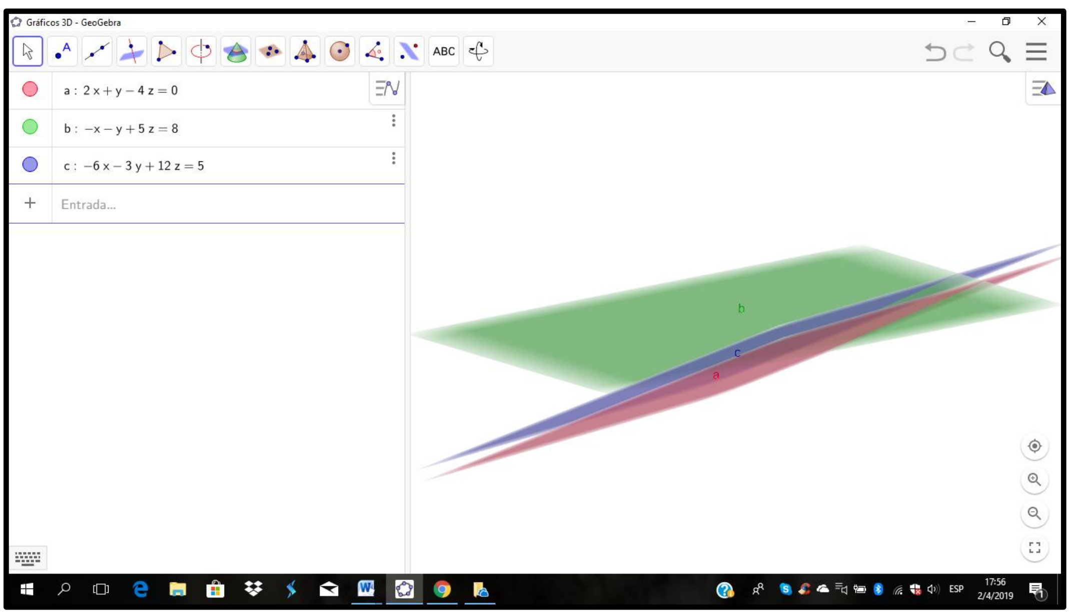

Figura 10: *representación geométrica de un SEL de 3x3 incompatible*

T_5 : Operar con matrices inversibles, con matrices de distinto orden y con matrices con algún elemento desconocido.

En la resolución de este tipo de tarea se observó que la mayor dificultad estuvo en la comprensión del enunciado, el cual involucra distintos ostensivos desconocidos: la letra k y la matriz A^{-1}.

Los estudiantes que intentan hallar la matriz inversa antes de calcular el valor de la incógnita k, abandonan la tarea ya que los cálculos se vuelven muy engorrosos. La matriz A^{-1} no se puede calcular con Geogebra porque en la hoja de cálculo no es posible crear la matriz A. En definitiva, se trata de una cuestión tecnológica, en el sentido de la TAD, que consiste en elegir el algoritmo más adecuado o económico para realizar la tarea.

Los estudiantes que, como primer paso hallaron el valor de la incógnita k, utilizaron Geogebra para hallar A^{-1}. La siguiente figura muestra la técnica empleada:

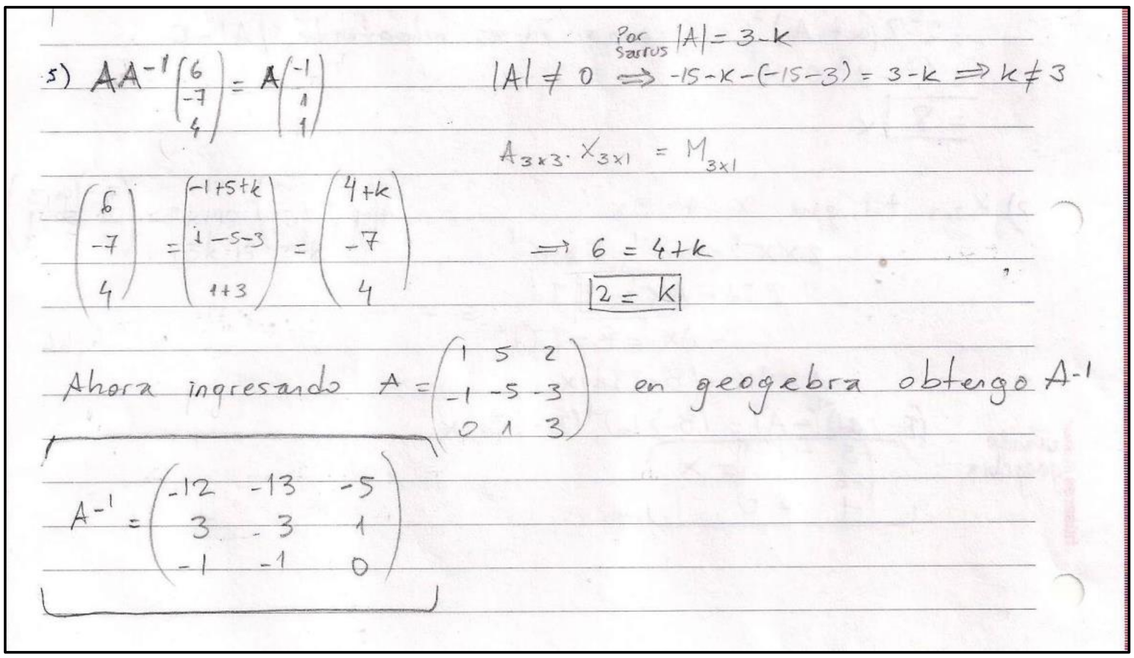

Figura 11: *Respuesta de E1. Fuente datos de las autoras.*

En consonancia con los enunciados de los prácticos de la materia, las consignas de los exámenes no indicaban en qué momento exacto debía usarse Geogebra, sino que se dejaba la decisión a cargo del estudiante. Ante esta situación algunos estudiantes tendían a resolver todo el examen sin Geogebra, ya que disponían de técnicas para hacerlo. Sin embargo, en estos casos se observaron que algunas tareas quedaron incompletas o sin resolver por falta de tiempo.

Conclusiones

Destacamos que la toma de exámenes con computadora en cursos de álgebra universitarios no es una práctica común. Los estudiantes se responsabilizaron por traer individualmente la computadora a la hora de rendir el parcial (o recuperatorio). El uso del software permitió evaluar tipos de tareas que no suelen incluirse en los exámenes tradicionales, como por ejemplo, la interpretación geométrica de SEL incompatibles. En este sentido, confirmamos que los gráficos en 3D complementan y ayudan a comprender mejor lo que se está haciendo algebraicamente, lo cual es muy valorado por los estudiantes en una situación de examen.

Si bien algunos estudiantes no desarrollaron los prácticos con la profundidad esperada, la experiencia en general resultó beneficiosa desde el punto de vista del proceso de estudio de los temas SEL, matrices y determinantes, ya que posibilitó tanto un trabajo de carácter exploratorio, como de validación. Destacamos muy especialmente las tareas planteadas para utilizar simultáneamente la vista algebraica y 3D que ofrece Geogebra, cuyo estudio favoreció la articulación de cuadros.

La implementación de tareas de lápiz y papel con el complemento de Geogebra permitió reducir el énfasis en los aspectos manipulativos del álgebra y enfocar el trabajo de los estudiantes en tareas conceptuales, o bien promover tanto aspectos conceptuales como técnicos del Álgebra Lineal. En mayor o menor medida, los estudiantes incorporaron esta herramienta tecnológica al estudio de los SEL, matriz y determinante. Asimismo, valoraron positivamente la toma de exámenes con computadora.

El uso del software permitió un tratamiento adecuado del error y ayudó a cambiar el topos del estudiante para que gradualmente abandonen su dependencia con los profesores. Este cambio en el topos de los estudiantes implicó cambios importantes en el topos del profesor, ya que fue esencial proponer tareas más abiertas, orientar al estudiante en la búsqueda de respuestas y evaluar de manera coherente con el trabajo realizado en clase.

El análisis de los resultados permite afirmar que las tareas propuestas son posibles de desarrollar con autonomía por parte de los estudiantes, quienes se preocuparon por aprender el software, aunque la gran mayoría ya lo conocía de la escuela secundaria. Lo que tuvieron que aprender fue a usar la vista 3D. En varias oportunidades preguntaron qué es exactamente lo que se iba a evaluar con la computadora. Manifestaron cierto grado de resistencia a las tareas donde no era evidente para qué usar el software. Esta actitud fue cambiando a lo largo del proceso de estudio.

Por último, consideramos importante mencionar las restricciones que condicionaron el desarrollo de esta propuesta en la institución. Por tratarse de una investigación realizada con un grupo de estudiantes de primer año fue preciso atenerse a la cronogénesis (Chevallard, 1997) establecida por el plan de estudios, siendo hechas pequeñas alteraciones a fin de no des-caracterizar el curso. Las actividades diseñadas (prácticos y evaluaciones) siguieron la propuesta institucional y están fundamentadas en las organizaciones matemáticas indicadas en el plan de estudios. Lo que ayudó al cambio fue la introducción del software, que exige una nueva forma de trabajo con los estudiantes. Esto demuestra que los cambios necesarios para la aplicación de TICs en cursos ya establecidos requieren mucha negociación y una reflexión por parte del investigador, que necesita estar atento a las condiciones y restricciones que pueden bloquear la investigación.

Referencias bibliográficas

Burgos J. (1992) Álgebra lineal. McGraw-Hill: México.

Carlson, D. (2004). The Teaching and Learning of Tertiary Algebra. En K. Stacey, H. Chick, M. Kendal, B. Barton, & J. Silva (Eds.) *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Vol. 8, pp. 293–309). Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Yves (1997). La transposición didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado. AIQUE: Buenos Aires.

Chevallard, Y. y Grenier, D. (1997) Le topos de l'éleve. En Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques de Houlgate. Francia: Houlgate.

Chevallard, Y. y Bosch, M. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(1), 77-124.

Chevallard, Y. (1999) L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266,

Chevallard, Y. (2004) Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire, Recuperado el 20 de marzo de 2019 de: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45

Chevallard, Y. (2007) La problématique anthropologique en didactique, d'hier à demain. Recuperado el 20 de marzo de 2019 de: http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones.htm

Dias, M. (1998) Les problèmes d'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire. Tesis doctoral. Université de Paris 7.

Dorier, J. y Sierpinska, A. (2001). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, A. Schoenfeld, J. y Silva (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 255-273), Springer Netherlands.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. Repères IREM 6, 132-158.

Grossman S. (1991). *Álgebra lineal*. 5ta edición. McGraw-Hill. México DF.