VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

# EL GEOGEBRA COMO RECURSO DIDACTICO PARA LA COMPRENSION DE LAS FORMAS INDETERMINADAS DEL LÍMITE

# GEOGEBRA AS A DIDACTIC RESOURCE FOR UNDERSTANDING THE INDETERMINATE FORMS OF LIMIT

**Lissette Rodríguez, Jorge Luis Bravo, Andel Pérez, Neisy Caridad Rodríguez**
Universidad de Sancti Spíritus "José Martí Pérez" (Cuba)
lrrivero@uniss.edu.cu, jlbravo@uniss.edu.cu, apgonzalez@uniss.edu.cu, ncrodriguez@uniss.edu.cu

**Resumen**
Este estudio propone el tratamiento de las formas indeterminadas del límite a partir de la utilización del GeoGebra con fines heurísticos y de experimentación, en la asignatura Matemática I de la carrera Ingeniería Industrial. La experiencia, aplicable al resto de las carreras de ingeniería, ofrece una solución a las dificultades en el aprendizaje de esta temática. Problemas con el tratamiento de las formas indeterminadas del límite fueron visibles en los resultados de la prueba de diagnóstico y de la encuesta aplicada a los estudiantes; sumado a ello los libros de texto a utilizar sólo centran la atención en el cálculo y no en la comprensión de su significado. Después de aplicada la propuesta mejoraron los resultados docentes y la disposición de los estudiantes a resolver tareas relacionadas con el cálculo de límites. El resultado de la presente investigación pertenece al grupo de trabajo "Relación Universidad-Sociedad" del proyecto "La informatización de los procesos universitarios" adscripto a la Universidad de Sancti Spíritus "José Martí Pérez".

**Palabras clave**: formas indeterminadas del límite, GeoGebra, heurística

**Abstract**
This study proposes the treatment of the indeterminate forms of limit by using GeoGebra with heuristic and experimentation objectives in the subject Mathematics I of the Industrial Engineering degree. The experience, which can be applied to other engineering degrees, gives solution to the difficulties in learning this topic. The results of the diagnostic test and the survey applied to the students have shown problems with the treatment of the indeterminate forms of limit; besides, the textbooks to be used focus only on the calculation of limit, not on the understanding of its meaning. After having applied the proposal, the students' academic results as well as their motivation to solve tasks related to the calculation of limits improved. The result of this research belongs to the work group "University-Society Relationship" of the project "Computerization of university processes" that belongs to University of Sancti Spíritus "José Martí Pérez."

**Key words**: indeterminate forms of limit, GeoGebra, heuristics

## Introducción

Múltiples factores dificultan la obtención de resultados destacados en la educación científica, entre ellos el poco interés hacia estas disciplinas (Ruiz, 2008), motivado a nuestro juicio por la escasa comprensión de sus complejidades. Dentro de las mimas la *Matemática* es de las que menos entusiasma a los estudiantes al ser tildada de abstracta y este rechazo produce un efecto negativo al afectar a su vez el buen desarrollo de su proceso de enseñanza-aprendizaje.

Precisamente de ese carácter complejo, entre otras cuestiones, se ocupa el *pensamiento matemático avanzado* (en lo adelante PMA), descrito por primera vez por Dreyfus (1990, 1991) y Tall (1991). Los procesos cognitivos que intervienen en la resolución de problemas que involucran conceptos matemáticos propios de la etapa avanzada, son procesos como el de representación, translación, abstracción, entre otros.

No hay una frontera exacta entre el pensamiento matemático elemental y el avanzado, autores reconocidos en la materia lo ubican dependiendo de la introducción de los conceptos de límite, derivada e integral y otros relacionados con las matemáticas superiores. Las mismas, en algunos sistemas educativos, se introducen desde la Secundaria Básica, en otros desde el bachillerato y en todos forman parte del currículo de carreras universitarias relacionadas con las ciencias básicas, técnicas y gran parte de las humanísticas.

El Análisis Matemático es una disciplina relacionada directamente con los procesos infinitos, en ella el límite es su principal concepto y en el proceso de enseñanza-aprendizaje del mismo los conflictos en la comprensión se hacen presentes desde su definición.

En la literatura se describen dificultades en la comprensión del concepto de límite que van desde la relación entre infinito potencial con el infinito actual, hasta dificultades propias de su proceso de enseñanza-aprendizaje, recogidas en clásicos de la literatura científica como Cornu (1981, 1994); Sierpinska (1985, 1987); Tall y Schwarzenberger (1978), entre otros.

Dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje lograr una adecuada comprensión de las *"formas indeterminadas del límite"* (FIL en lo adelante) contribuye al alcance de niveles superiores de desempeño relacionados con su cálculo y es el resultado final que se pretende al aplicar la propuesta. Se tiene referencia de investigaciones relacionadas con la comprensión de los límites desde posiciones algebraicas o con el uso de tablas (Espíritu y Navarro, 2015) y otras relacionadas con las FIL que se limitan a caracterizar los problemas de comprensión relacionados con éstos (Cortés y Londoño, 2015); todas ellas difieren del presente trabajo, pero constituyen un referente importante para el mismo.

Por otra parte, en virtud de una enseñanza acorde a nuestros tiempos, es necesario el uso de los *asistentes matemáticos* en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática; están presentes en todos los niveles y especialmente en la didáctica relacionada con el PMA.

De la Torre y Martín (2000), Fernández (2000), Estrada (2005), Herrera (2010), Debárbora (2012) y Del Pino (2013) reportan el uso de asistentes en la didáctica relacionada con el PMA, algunos específicamente en el estudio de los límites. Las aplicaciones fundamentales de los asistentes matemáticos al proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática son: formando parte de procesos heurísticos, como herramientas de comprobación de resultados y asistentes en la resolución de problemas de gran complejidad de cálculo; destacando que en esta última categoría se consideran ya imprescindibles como es en el caso de los procesamientos estadísticos.

El uso de *GeoGebra* como recurso heurístico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las FIL se sustenta en la representación gráfica de funciones y las operaciones (aritméticas y exponenciales) que entre éstas generan las llamadas formas indeterminadas. Graficar funciones en la mayoría de los casos ocupa tiempo, espacio y complejiza el proceso de análisis relacionado con funciones en algunos casos, no siendo así con el uso de asistentes matemáticos.

GeoGebra produce inmediatez en las representaciones gráficas, al mismo tiempo que se pueden realizar operaciones entre las representaciones algebraicas de dichas funciones; existen versiones de este asistente para sistema operativo Androide (por lo que es portable en dispositivos móviles) y esas ventajas son utilizadas por la propuesta. Además, se sustenta en dos vertientes del uso de asistentes matemáticos: su uso como recurso heurístico (fundamental en esta investigación) y como herramienta para la comprobación de resultados.

## Marco teórico

Hay interés en la comunidad de matemáticos y educadores matemáticos, en el análisis de la forma de pensar en las personas que se dedican profesionalmente a las mismas, se investiga en cómo entienden las personas un contenido matemático específico, caracterizan los procesos de comprensión de conceptos y otros procesos asociados. “Freudenthal, Poincaré, Hadamard, han hecho estudios de tipo introspectivos al analizar su propia actividad personal como matemáticos o Polya a través de estudiar la producción de sus alumnos. De otra forma, también se reconoce el aporte de Piaget” (Garbin, 2015, p.2).

Alrededor de 1986 se forma un grupo de estudio sobre *PMA* cuyas primeras publicaciones salen a la luz años después (Tall, 1991). Logra relacionarse en ese entonces el término de PMA con los aprendizajes relacionados al pensamiento axiomático basado en definiciones y demostraciones, que se inicia en la etapa de la secundaria básica. No obstante, el rigor de la enseñanza relacionada con ese pensamiento axiomático en esta etapa y en la preuniversitaria es todavía bajo y se reconocen en la actualidad ambas como parte del Pensamiento Matemático Elemental; asumiendo como etapa avanzada la que se enmarca directamente con la universidad (Azcárate y Camacho, 2003). No obstante, la frontera entre ambos tipos de pensamiento no es rígida y depende de los sistemas de enseñanza y de la profundidad de los programas de estudio.

El PMA difiere del Elemental en que:

- Se enseña una mayor cantidad de conceptos en menor tiempo.
- Se enseña con mayor frecuencia los contenidos del currículo de manera formal antes de que el estudiante se haya familiarizado con ellos de manera informal.
- Se enseñan conceptos que históricamente evolucionaron muy lentamente y, al mismo tiempo, se exige el aprendizaje de demostraciones estándar y la realización de construcciones mentales abstractas.
- Se enseña una mayor cantidad de conocimientos matemáticos y se exige la comunicación de los mismos y el aumento de estrategias de trabajo; se espera, además, que los estudiantes adquieran la habilidad de distinguir entre pensamiento matemático y meta matemático.
- Se evalúa a los estudiantes en tiempo cortos y se reducen las actividades a tareas elementales; de esta manera se dificulta una evaluación que tome en cuenta la comprensión, el análisis y la síntesis, y no sólo la reproducción de conocimientos por parte del estudiante. (Garbin, 2015, p. 4)

El aprendizaje de conceptos y la adquisición de competencias matemáticas relacionadas con la disciplina de *Análisis Matemático* están en su mayoría relacionadas con el PMA. Autores como Tall y Cornu sitúan el trabajo con el concepto de límite dentro del PMA por ser fundamental en la teoría de las aproximaciones, continuidad, derivabilidad e integración; además por estar involucrado con el pensamiento axiomático y requerir de niveles de abstracción en su aprendizaje (Tall (1992) y Cornu (1991) citados ambos por Penagos, Mariño y Virginia, 2017).

Existen varias aproximaciones para vencer los obstáculos que tradicionalmente genera la enseñanza de los límites, Sierpinska (1987) intentó diseñar situaciones didácticas que ayudara a los estudiantes a vencer obstáculos de aprendizaje relacionados con éstos y sugiere que para que un obstáculo sea eliminado, es necesario crear un conflicto al interior del alumno (es decir, un conflicto cognitivo).

Por su parte Cornu (1994) en forma similar señala que es muy importante que el estudiante esté consciente de la complejidad de la noción de límite y de las dificultades que se pueden presentar más que proporcionarle una exposición clara del concepto. Una posible razón de esto es que los autores no han logrado generar una discusión rica en torno a las ideas intuitivas de los estudiantes y en consecuencia una gran mayoría de ellos se limitan a un acercamiento algebraico carente de significado (Blázquez y Ortega, 2000; Hitt y Páez, 2003).

No obstante, coincidiendo con algunos especialistas del tema, el estudio de los límites debe situarse en uno u otro tipo de pensamiento en dependencia al trabajo que se realice con él ((Edwards, Dubinsky y McDonald, 2005) citados por Penagos, Mariño y Virginia, 2017). Si solamente se realiza el cálculo de límites que no presenten formas indeterminadas es suficiente un pensamiento matemático elemental y de ahí el criterio de los autores de esta investigación enmarcar el tratamiento de las *FIL* dentro del PMA.

En la enseñanza del cálculo de límites se comienza por introducir los conceptos de infinito, punto de acumulación y de infinito como punto de acumulación; los primeros cálculos que realizan los estudiantes son, por lo general, en funciones continuas que sólo se resuelven a partir de una sustitución algebraica y asumen (porque se les ha mostrado y demostrado desde el punto de vista algebraico y gráfico) que toda relación $\frac{expresión\ constante}{expresión \to 0} = \infty$ y que toda relación $\frac{expresión\ constante}{expresión \to \infty} = 0$ , todo ello con los consabidos convenios matemáticos e interpretando " $\rightarrow$ " como la expresión "tiende a".

En ese proceso de cálculo de límites se pueden formar las llamadas FIL, hay siete tipos distintos de ellas y el estudiante debe ser capaz de identificarlas y resolverlas. Para un límite indeterminado cualquier resultado se puede esperar: +∞, -∞ ó a ($a \in R$). Hay métodos directos para solucionarlas ( $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ ), mientras que otras ( $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $0^0$, $1^\infty$, $\infty^0$ ) recurren a la tan famosa estrategia de los matemáticos de "reducirlo al caso anterior" y solucionarlo así.

La idea de "indeterminado" radica precisamente que una expresión no tendrá siempre el mismo resultado y esto, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, rompe con un pensamiento muy arraigado en los estudiantes. Además de la dificultad anterior los estudiantes poseen creencias precedentes al cálculo de límites (algunas de ellas erróneas), en lo relacionado con el cálculo de expresiones que involucran operaciones aritméticas y exponenciales, ello les hace dudar que el resultado no sea único. En la enseñanza de los límites se ha experimentado en los últimos años el uso de *asistentes matemáticos* con diferentes propósitos didácticos (Fernández, 2000; Mira, 2016).

Investigaciones en didáctica del Análisis Matemático, relacionadas con el PMA, demuestran la importancia del uso de los medios de cómputo en el aprendizaje de esta disciplina y proyectos de prestigiosas universidades encaminan sus esfuerzos en este sentido (Azcárate, Camacho y Sierra, 1999). Por su parte Hegedus y Kaput (2004) conciben la tecnología como una infraestructura representacional que amplía las potencialidades del pensamiento humano.
Para Estrada (2005), un rasgo importante de las representaciones de los objetos matemáticos en un ambiente dinámico es poder operar con ellos y ver al mismo tiempo el efecto de estas acciones sobre dichas representaciones. De acuerdo con Herrera, el debate sobre el papel de las tecnologías ya no se centra en si debemos usarlas o no, sino en cómo emplearlas inteligentemente para que nuestros estudiantes aprendan mejor Matemática. (Herrera (2010) citado por Amaya, de Armas y Sgreccia (2011)).

En las clases de Matemática, según los contenidos a impartir y su profundidad, las características del alumnado y el soporte técnico del que se disponga, se pueden utilizar asistentes matemáticos en diferentes tipos de tareas. Existe una amplia gama de software dedicados a esta ciencia que se pueden clasificar según propósito (generales o específicos) según el tipo de procesamiento que realizan (Fig. 1) y la forma de adquisición los dividen en libres (GeoGebra, Maxima, R, GraphCalc, etc.) y no libres (Mathematica, Maple, MatLab, MathCAD, etc.) (Wikiversity, 2014) (Wikipedia, 2019).

**Figura 1.** *Tipos de software matemáticos según procesamiento matemático (Wikipedia, 2019).*

**Software Matemáticos según procesamiento de la información**

| |
|---|
| Calculadoras |
| Sistemas Algebraicos Computacionales (CAS) |
| Sistemas Estadísticos Computacional (SEC) |
| Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) |
| Sistemas de Optimización |
| Sistemas de Calculo Numérico (SCN) |
| Demostradores de Teoremas |

En la presente investigación se ha utilizado el asistente *GeoGebra* un software de propósito general, porque posee varios tipos de procesamientos, que incluye: calculadora, CAS (del inglés Computer Algebra System), procesamiento estadístico y geométrico, además de ser un software libre. GeoGebra tiene potencialidades de realizar operaciones en la vista geométrica y algebraica al unísono, esto lo convierte en un medio de enseñanza por excelencia para el trabajo heurístico que dependa de ambos sistemas de representaciones.

Varias definiciones de heurística recoge la literatura, según Müller (citado por Crespo (2007)) la heurística incluye la elaboración de principios y estrategias que facilitan la búsqueda de vías de solución para problemas, la comprobación de hipótesis, propiedades, en tareas de carácter no algorítmico sea de manera teórica o práctica. Es por ello que con la aplicación de la propuesta GeoGebra va a permitir, a través de las tareas elaboradas, la apropiación por parte del alumno del concepto de indeterminación relacionado con las FIL.

Según Crespo (2007) los medios heurísticos "… la computadora, con la revolución que impregna a todos los procesos donde se inserta, redimensiona estos medios convirtiéndose en un eficiente apoyo a alumnos y profesores".

## Metodología

En el aula de primer año (modalidad Curso Encuentro) de la carrera Ingeniería Industrial (Plan D), Facultad de Ciencias Técnicas y Empresariales de la Universidad "José Martí Pérez" de Sancti Spíritus; se detectaron dificultades en el aprendizaje de los límites en general y particularmente las FIL. No comprenden el significado de "indeterminación" y tienen tendencia a operar algebraicamente según las propiedades de los límites. Es por ello que se trazó una estrategia de trabajo con GeoGebra para utilizar la representación dinámica de funciones y las operaciones algebraicas y exponenciales que entre ellas conducen a indeterminaciones para lograr mayores niveles de comprensión y por ende desempeño de los estudiantes en el tema.

El curso está estructurado en encuentros semanales de 4 horas clase (48 horas clase en total) y por lo ajustado del tiempo se utilizó el espacio de consultas (tiempo de docencia extra convenido con el estudiante) para aplicar los instrumentos y parte de la propuesta.

Después de una *primera evaluación* (paso 1 del experimento) relacionada con el tema, salen a la luz las dificultades con las FIL en cuanto a su comprensión y cálculo. Se aplica entonces una *encuesta* totalmente anónima y voluntaria (paso 2 del experimento) para conocer:

a) ¿Puede explicar con sus palabras por qué ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $0^0$, $1^\infty$, $\infty^0$) son "indeterminadas"?
b) Si alguna de ellas a usted le parece que podría tener un valor único expréselo y explique su respuesta.
c) ¿Le resulta atractivo el cálculo de límites? Explique por favor.

Posteriormente se realizan *ejercicios utilizando GeoGebra como recurso heurístico* (paso 3 del experimento), apoyados en dispositivos móviles (teléfonos, tabletas y computadoras portátiles) de los estudiantes con presencia y guía del profesor; de manera que el estudiante pueda "descubrir" por qué se denominan FIL e interiorice la necesidad de hacer operaciones que eliminen esas formas antes de pasar al cálculo algebraico.

Los estudiantes estaban familiarizados con el uso de GeoGebra desde el primer tema del curso relacionado con el trabajo con funciones y conocían todos los comandos a utilizar en el ejercicio excepto el comando Límite[<Función>, <Valor Numérico>] el cual fue explicado.

Ejercicio 1.1: ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener de la FIL $0 \cdot \infty$ ?
a) Realiza la representación en GeoGebra de las funciones $f_1$, $f_2$, $f_3$ y g (Fig. 2); utilizando las vistas Algebraica y Gráfica. Se orienta en ese momento que $f_2$ sea $\frac{n}{x}$ declarando n como deslizador y posicionándolo en 1 hasta que se indique su uso en próximo ejercicio.
b) Hagamos un debate del comportamiento de cada una de ellas cuando $x \to \infty$. Utilice los conocimientos de cálculo de límites y compruebe utilizando los resultados de la Vista Gráfica. Deberá quedar por escrito el límite de cada una ($f_1$, $f_2$, $f_3$ y g) cuando $x \to \infty$.
c) Introduzca las funciones $k_1$, $k_2$ y $k_3$ como resultado de los productos de funciones $f_1 \cdot g$, $f_2 \cdot g$ y $f_2 \cdot f_3$ respectivamente.
d) Verifique, utilizando los resultados de b, que las funciones anteriores corresponden a la FIL $0 \cdot \infty$.
e) Introduzca los comandos Límite[$k_1$,∞], Límite[$k_2$,∞] y Límite[$k_3$,∞]; y observe los resultados. Responda ¿todas tienen el mismo valor del límite?
f) Oculte la representación en la Vista Gráfica de las funciones iniciales $f_1$, $f_2$, $f_3$ y g, active la representación en la misma vista de $k_1$, $k_2$ y $k_3$ para comprobar en éstas últimas que su comportamiento cuando $x \to \infty$ coincide con el valor de los límites calculados en el inciso anterior (Fig. 3).
g) Calcule en su libreta los límites del inciso e, aplicando las estrategias para eliminar las indeterminaciones estudiadas en clases anteriores.

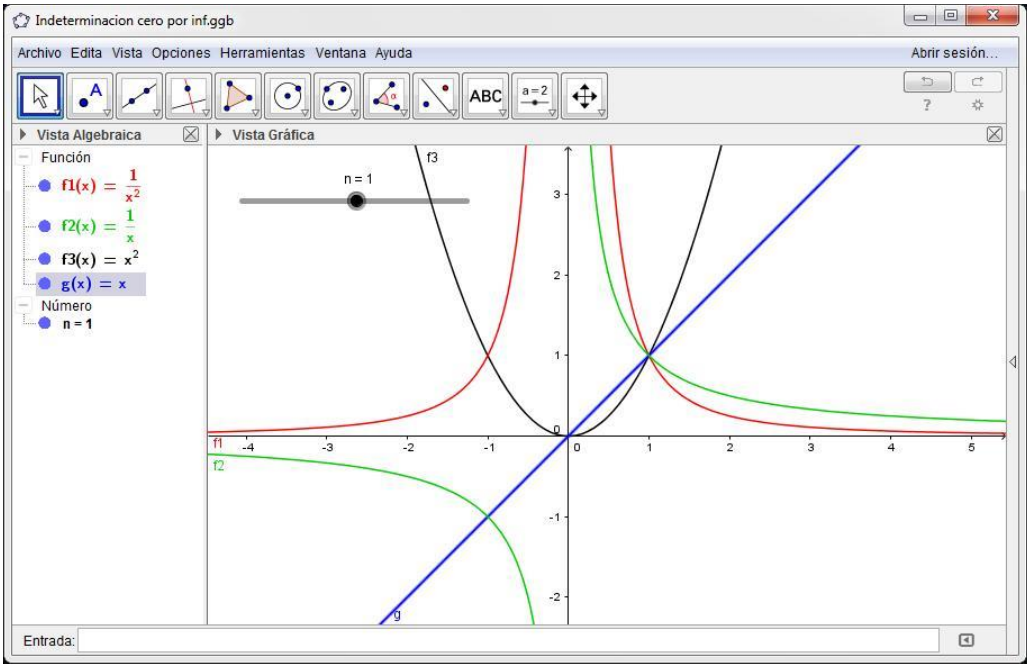



**Figura 2.** *Vista de GeoGebra correspondiente al análisis de las funciones simples ($f_1$, $f_2$, $f_3$ y $g$) y su comportamiento cuando $x \to \infty$, Ejercicio 1.1 a) b).*

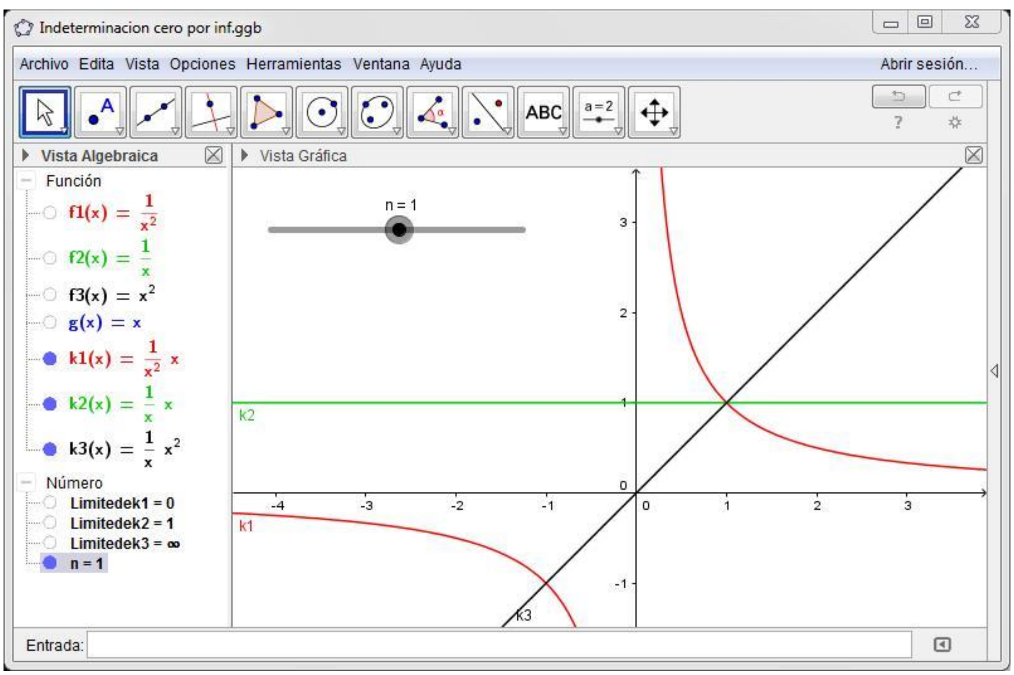



**Figura 3.** *Vista de GeoGebra correspondiente al análisis de las funciones compuestas ($k_1$, $k_2$ y $k_3$) y su comportamiento cuando $x \to \infty$, comparándolos además con el resultado del comando Límite (Limitedek1, Limitedek2 y Limitedek3), Ejercicio 1.1 c) al f).*

Ejercicio 1.2: ¿Qué ocurre en los límites anteriores para otros valores de n? Realice conjeturas para un debate colectivo utilizando el deslizador.

En respuesta al ejercicio 1.2 el estudiante llega a la concluir la influencia de n en el resultado de los límites y reafirma el concepto de indeterminación. Otras formas indeterminadas son abordadas en seis ejercicios con el mismo estilo, algunos dejando la libertad a los estudiantes de proponer las funciones que conformaran la FIL, algunos cuando $x \to \infty$ y otros cuando tiende a un punto en el cual ocurra la forma indeterminada, Fig. 4.

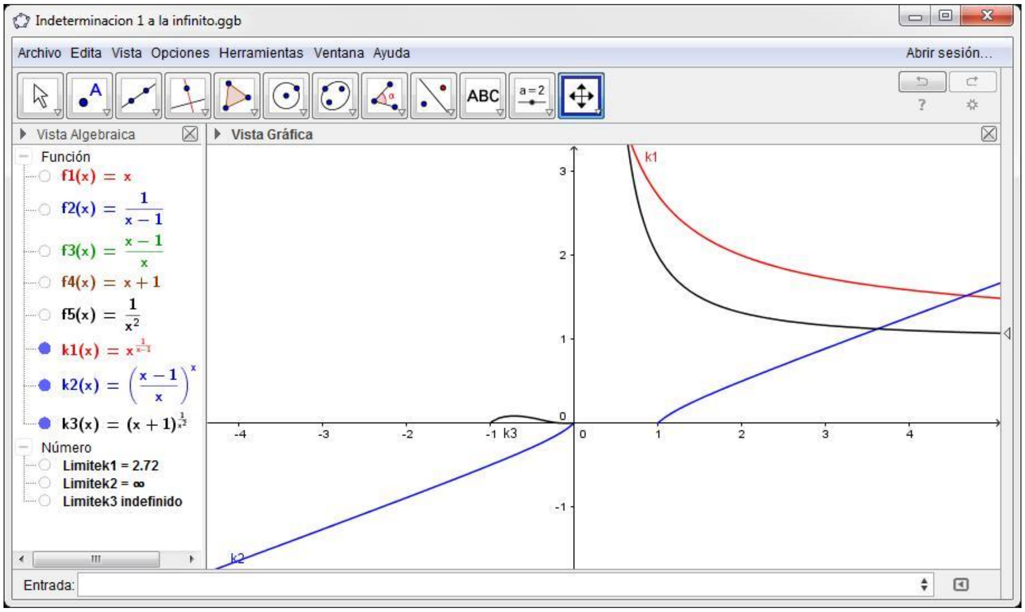



**Figura 4.** *Similar proceder heurístico para la forma indeterminada* $1^{\infty}$. *Calculando el límite de* $k_1$ *cuando* $x \to 1$, *el límite de* $k_2$ *cuando* $x \to \infty$ *y el límite de* $k_3$ *cuando* $x \to 0$.

Después de esa actividad se orientan para el *trabajo independiente* (paso 4 del experimento) de los estudiantes tareas de cálculo de límites indeterminados que serían revisadas tanto en su desarrollo a lápiz y papel como su comprobación en GeoGebra, siguiendo el modelo de ejercicio utilizado en el momento anterior. Una muestra de ello es el siguiente:

Ejercicio I: Forme indeterminaciones y calcule. Sean las funciones elementales:

$$f1(x) = x$$
$$f2(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$$
$$g1(x) = 1 - 2x$$
$$g2(x) = \sqrt{1-x}$$
$$h1(x) = \frac{1}{x^4}$$
$$h2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$h3(x) = \frac{1}{x}$$

a) Identifique las indeterminaciones que se forman cuando $x \to 0$ en los casos:
$\frac{f1}{f2}, \frac{f2}{f1}, f1^{f2}, f2^{f1}, h3^{f1}, h3^{f2}, h3 \cdot f1, f2 \cdot h3, g1^{h3}, g2^{h3}, h1 - h2, h2 - h3$

b) Realice en su cuaderno el cálculo de límites correspondientes a las combinaciones del inciso anterior.

c) Represente, utilizando GeoGebra, cada una de las funciones elementales. Construya algunas de las formas indeterminadas anteriores y compruebe el cálculo realizado en el inciso anterior.

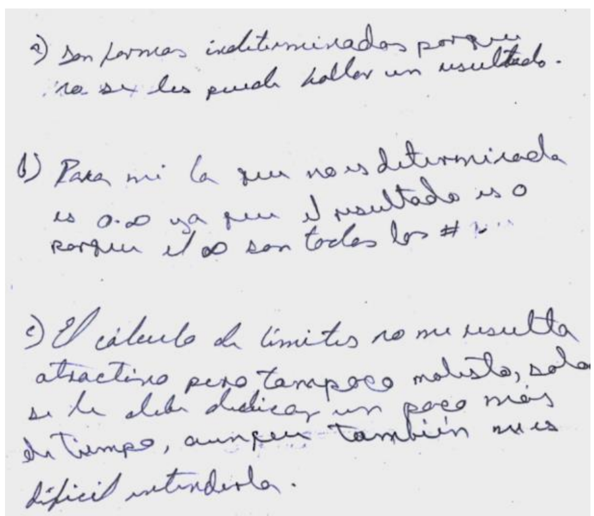
d) Proponga otras combinaciones de funciones que conduzcan a FIL.

Por último, se aplicó una *evaluación* (paso 5 del experimento) con los mismos objetivos y niveles de dificultad que la primera prueba pedagógica con el objetivo de comparar los resultados del aprendizaje, aplicar técnicas de estadística descriptiva y concluir el experimento.

## Resultados

Para la investigación se trabajó con una muestra de 16 estudiantes de los 22 que están matriculados en el primer año de Ingeniería Industrial ya mencionado, que fueron los que estuvieron presentes en todos los momentos de la misma: pre-test, encuesta, ejercicios de carácter heurístico con GeoGebra, ejercicios independientes a lápiz y papel utilizando GeoGebra para su comprobación y post-test.

Relacionado con la *encuesta* se comprobó que en la forma que se presentan las indeterminaciones hace pensar a los estudiantes, en algunos casos (56,25% del total), que tienen un resultado definido con sólo aplicar erróneas creencias epistemológicas relacionadas con las operaciones aritméticas y algebraicas. Analizando el inciso b de la encuesta, las más frecuentes expresadas por los estudiantes son: "cero multiplicado por cualquier cantidad es cero" (correspondiente a $0 \cdot \infty$, con 4 estudiantes) (Fig. 5), "la resta de dos elementos iguales es cero" (correspondiente a $\infty - \infty$, con 3 estudiantes) y "multiplicar infinitamente 1 es igual a 1" (correspondiente a $1^{\infty}$, con 2 estudiantes).


a) Son formas indeterminadas porque no se les puede hallar un resultado.

b) Para mi la que no es determinada es $0 \cdot \infty$ ya que el resultado es 0 porque el $\infty$ son todos los #s

c) El cálculo de límites no me resulta atractivo pero tampoco molesto, solo se le debe dedicar un poco más de tiempo, aunque también me es difícil entenderla.

**Figura 5.** *Muestra de la respuesta dada por un estudiante a la encuesta.*

En la actividad que se realiza en el aula utilizando *como medio de enseñanza* el GeoGebra se observó una buena participación de los estudiantes, aportaron ideas y mejoraron incluso dificultades relacionadas con el cálculo de límites anteriores a la introducción de las formas indeterminadas.

En las actividades de *trabajo independiente* se constató mediante la evaluación sistemática y observación al desempeño de los estudiantes que un 56,25% (9 estudiantes) realizó el trabajo independiente con lápiz y papel y un 25% (4 estudiantes) estuvieron en disposición de mostrar sus operaciones con GeoGebra.

En la prueba pedagógica aplicada anterior a la propuesta se logra un 18,75% de aprobados (3 estudiantes) y después efectuados los dos momentos de trabajo con las FIL usando GeoGebra los estudiantes mejoraron sus resultados en el cálculo de límites en general y en el cálculo de límites indeterminados demostrado al obtenerse un 43,75% (7 estudiantes) de aprobados en la prueba pedagógica final (Fig. 6).

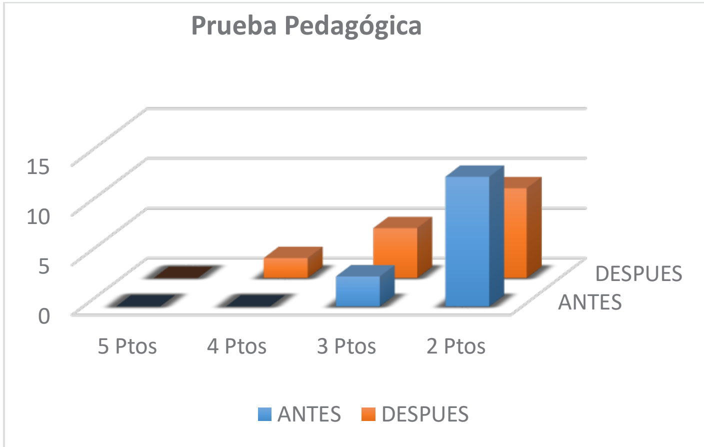



**Figura 6.** *Gráfico de frecuencia absoluta de aprobados en el pre-test (antes) y post-test (después) aplicado a la muestra de 16 estudiantes.*

## Conclusiones

En el Análisis Matemático el concepto de límite es básico en la construcción de otros conceptos, son varias las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y mayores aún las relacionadas a los procesos presentes en el Pensamiento Matemático Avanzado. En la bibliografía especializada es amplio el reporte de dificultades relacionadas al proceso de enseñanza-aprendizaje de los límites.

El uso de representaciones en el aprendizaje de conceptos matemáticos es útil y reporta resultados inmediatos en la comprensión de los mismos. La aplicación de los asistentes matemáticos al proceso de enseñanza-aprendizaje es fundamental en el trabajo con las representaciones por su inmediatez y diferentes usos didácticos que sustentan.

El asistente matemático GeoGebra se utiliza en la propuesta como medio de enseñanza en el proceso heurístico que ayuda a la comprensión de las formas indeterminadas del límite y como herramienta de comprobación en ejercicios de cálculo de límites donde dichas formas pueden estar presentes.

La comparación de los resultados docentes, de pruebas pedagógicas realizadas antes y después de aplicada la propuesta, constata una mejora en la comprensión de las formas indeterminadas del límite y en el cálculo de límites en general.

## Referencias bibliográficas

Amaya de Armas, T. y Sgreccia, N. (2011). Creencias sobre la matemática y su relación con las prácticas de enseñas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana Matemática Educativa 24,* 1160-1168. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Azcárate Giménez, C., Camacho Machín, M. y Sierra, M. (1999). Perspectivas de investigación en didáctica de las Matemáticas: Investigación en didáctica del Análisis. En T. Ortega (Ed.), *Actas del III SEIEM* (pp. 283-293). Valladolid: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Azcárate Giménez, C. y Camacho Machín, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana X(2)*, 135-149.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2000): El concepto de límite en la educación secundaria. En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 189-209), México: Grupo Editorial Iberoamérica. S.A. de C.V.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limité: modelés spontanés et modelés propres. *Proceedings PME-V,* 322-326.

Cornu, B. (1994). Limits. En D. Tal1 (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-167), Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publisher.

Cortés Garcés, F. A. y Londoño Cano, R. A. (2015). Una propuesta didáctica para la noción de indeterminación. En A. Ruiz (Ed.), *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática CIAEM* (pp. 1-10). Chiapas, México: CIAEM.

Crespo, E. (2007). Modelo didáctico sustentado en la heurística para el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática asistida por computadora. Tesis de Doctorado no publicada, Instituto Superior Pedagógico "Félix Varela Morales". Cuba.

De la Torre Cuesta, C. y Martín Jiménez, L. (2000). *Utilización de asistentes matemáticos en la enseñanza de las matemáticas*. Recuperado el 17 de Marzo de 2019 de: https://www.researchgate.net/publication/26428267_Utilizacion_de_asistentes_matematicos_en_la_ensenanza_de_las_matematicas

Debárbora, N. N. (2012). *El uso de GeoGebra como recurso educativo digital en la transposición didáctica de las funciones de proporcionalidad.* Tesis de maestría, UNSAM. Argentina.

Del-Pino, J. (2013). El uso de GeoGebra como herramienta para el aprendizaje de las medidas de dispersión. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 243-250). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 113-134), Cambridge: University Press.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21), Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publisher.

Espíritu Montiel, V. I. y Navarro Sandoval, C. (2015). Límites indeterminados mediante el uso de tablas de valores y gráficos. *Revista Números 88(Marzo),* 31-53.

Estrada, J. (2005). *Diseño de situaciones dinámicas en un ambiente computacional como un escenario para el aprendizaje de conceptos fundamentales del cálculo*. Recuperado el 17 de Marzo de 2019 de: http://polya.dme.umich.mx/eventos/MemoriaXIII.pdf

Fernández Casuso, M. B. (2000). Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema funciones con el uso de un asistente matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3(2)*, 171-187.

Garbin, S. (2015). Investigar en pensamiento matemático avanzado. En J. Ortiz y M. Iglesias (Eds.), *Investigaciones en educación matemática. Aportes desde una unidad de investigación* (pp. 137-153), Maracay, Venezuela: Universidad de Carabobo. Recuperado de: http://riuc.bc.uc.edu.ve/handle/123456789/2749

Hegedus, S. y Kaput, J. (2004). An introduction to the profound potential of connected algebra activities: Issues of representation, engagement and pedagogy. En M. Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 3* (pp. 129-136). Bergen, Norway: Bergen University College.

Herrera, M. (2010). Introducción al Capítulo 5: Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23,* 1149-1151. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Hitt, F. y Páez, R. (2003). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite y actividades de enseñanza. Recuperado el 23 de Diciembre de 2018 de: https://www.researchgate.net/publication/268176026

Mira López, M. (2016). *Desarrollo de la comprensión del concepto de límite de una función. Características de trayectorias hipotéticas de aprendizaje.* Tesis de Doctorado, Universidad de Alicante. España.

Penagos, M., Mariño, L. F. y Virginia Hernández, R. (2017). Pensamiento Matemático elemental y avanzado como actividad humana en permanente evolución. *Revista Perspectivas 2(1)*, 105-116.

Ruíz Socarras, J. M. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación 3(47)*, 1-8.

Sierpinska, A. (1985). Epistemological obstacles relative to the limit concept. *Recherches en didactique des mathématiques (1),* 5-67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics 18*, 371-397.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21) Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publisher.

Tal1, D. y Schwarzenberger, R. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching (82)*, 44-49.

Wikiversity (4 Abril 2014). *Mathematics software.* Wikiversity: School of Mathematics. Recuperado el 8 de Enero de 2019 de https://en.wikiversity.org/wiki/Mathematics_software

Wikipedia (27 Abril 2019). *Software Matemático.* Wikipedia: Fundación Wikimedia, Inc. Recuperado el 19 de Julio de 2019 de https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Software_matemático&oldid=115557637