TEOREMA DE PITÁGORAS SU HISTORIA, DEMOSTRACIONES E IMPACTO EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PITÁGORAS THEOREM ITS HISTORY, DEMONSTRATIONS AND IMPACT ON MATHEMATICAL EDUCATION

Diego Armando Pinzón-Cifuentes * *Magdalena Pradilla-Rueda* **

Resumen*:* Diego Pinzón es matemático egresado de la Corporación Universitaria Republicana, actualmente vinculado al semillero de investigación Matemáticas y Ciencias de la Información que pertenece al Grupo de Investigación Desarrollo e Innovación Sostenible (**G.I.D.I.S**), desarrollando tareas de estudio relacionadas con el impacto del teorema de Pitágoras en la matemática griega y las consecuencias que esta trajo para el desarrollo de esta ciencia, los cuales serán presentados en este documento. Magdalena Pradilla ha realizado múltiples investigaciones en los campos de lenguaje formal, natural y de computación; lógica y epistemología de la informática. Autora de libros sobre tratados básicos en lógica matemática (evolución histórica, sintaxis y semántica) y geometría.

Palabras clave: Teorema de Pitágoras, ternas pitagóricas, pensamiento inductivo, pensamiento deductivo, triángulo rectángulo

Abstract: Diego Pinzón is a mathematician graduated from the Republican University Corporation, currently linked to the Mathematics and Information Sciences research hotbed that belongs to the Sustainable Development and Innovation Research Group (**GIDIS**), developing study tasks related to the impact of Pythagoras' theorem on Greek mathematics and the consequences it brought to the development of this science, which will be presented in this document. Magdalena Pradilla has conducted multiple investigations in the fields of formal, natural and computer language; logic and epistemology of computer science. Author of books on basic treatises in mathematical logic (historical evolution, syntax and semantics) and geometry.

Key Words: pythagorean theorem, pythagorean triples, inductive thinking, deductive thinking, right triangle.

---

* Matemático, Corporación Universitaria Republicana, Colombia. Corporación Universitaria Republicana, Colombia. E-mail: diegoar201088@hotmail.com - da.pinzon@urepublicana.edu.co.

** Informática, Universidad de Grenoble, Francia. Maestría y doctorado en matemáticas aplicadas a ciencias sociales, Universidad de Grenoble, Francia. Corporación Universitaria Republicana, Colombia. E-mail: magdapradilla@gmail.com - magdapradilla@urepublicana.edu.co. Número ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6798-3601

1. Introducción

El objeto de estudio de esta investigación es el desarrollo del teorema de Pitágoras y sus posteriores consecuencias, entendido desde un punto de vista deductivo y epistemológico, debido a su importancia en el desarrollo de otras áreas, así como para la formalización y axiomatización de la matemática. Para el desarrollo de la investigación, se consultaron 10 fuentes primarias de historia de la matemática, y cerca de 50 libros y artículos relacionados con el tema.

Encontramos bastante material bibliográfico relacionado con el objeto de investigación, en la cual la mayoría son libros de historia de la matemática, geometría y teoría de números, en idiomas como el español, inglés y francés. Debido a la cantidad de información, fue necesario hacer un filtro, rescatando aquellos datos que consideramos, tienen relación con la utilización del teorema para la educación matemática de la época, o cómo el teorema cambió de alguna manera la forma de percibir las matemáticas. Así las cosas, autores como Heat, Van der Waerden, Neugebauer, Euclides, Kline, Boyer, entre otros, hacen aportes técnicos e históricos en los cuales se basó gran parte de nuestro trabajo.

Teniendo en cuenta lo anterior, este estudio bibliográfico se organizó en tres partes: la primera es un estudio sobre los antecedentes históricos del teorema de Pitágoras en civilizaciones diferentes a la griega, como los babilonios, los egipcios, chinos e hindúes. La segunda está relacionada con los diferentes tipos de demostraciones, en las que se destacan dos demostraciones geométricas atribuidas a Pitágoras, así como las hechas por Pappus y Bashkara. La tercera parte aborda las consecuencias que se dieron a partir de la demostración, como el surgimiento de las magnitudes inconmensurables, la aparición de los números irracionales y el último teorema de Fermat.

2. Teorema de Pitágoras en civilizaciones antiguas

El teorema de Pitágoras se remonta varios miles de años antes de su demostración formal. En el antiguo Egipto, unos 2000 años a.C., data de un uso netamente práctico, en la construcción de pirámides y en la redistribución de tierras afectadas por las crecientes del río Nilo. En Babilonia también se hicieron hallazgos, donde investigadores como O. Neugebauer y A. J. Sachs [1], relacionan el contenido de las tablillas **YBC** 7289 y la **PLIMPTON** 322 con el teorema. Varios siglos más adelante, encontramos a los indios, con un uso más práctico que teórico del teorema, que era utilizado para la construcción de altares para adorar dioses; mientras que, en China, se tiene conocimiento de una demostración del teorema de Pitágoras y varios problemas, expuestos por B.L Van der Waerden [2], en donde se exponen 16 problemas geométricos, cuya base teórica para su resolución es el teorema de Pitágoras.

a. Egipto

En épocas de crecientes, el río Nilo se desbordaba y dejaba todas sus riberas inundadas, de tal forma que, al bajar su nivel, todos los terrenos que dejaban descubiertos quedaban fertilizados. Los pobladores de la época vivían de cultivar esas tierras, ya que el resto del país es desértico. No obstante, una vez bajaba en nivel del río, era necesario restituir las tierras a sus respectivos dueños, dado que la inundación acababa con la división que aquellos terrenos tenían en un principio. Para esto, los egipcios contaban con una herramienta que les era bastante útil: el triángulo rectángulo, conocido como el triángulo sagrado egipcio. La herramienta utilizada era una cuerda o lazo a la que se ataban nudos, de tal manera que cada uno de los nudos eran equidistantes, en la que debían estar atados 3, 4 y 5, es decir, era una terna pitagórica[33]. Con estas medidas, se garantizaba el trazo de rectas perpendiculares.

b. Babilonia

La mayoría de textos cuneiformes que han encontrado los arqueólogos en sus investigaciones pertenecen a la época de la dinastía Hammurabi (1800-1600 a.C.), y muestran un sistema de numeración completamente desarrollado. Los textos matemáticos pueden ser separados en dos grandes grupos: "textos de tabla" y "textos de problemas" [3]. El primer grupo hace referencia a aquellas tablillas que contienen tablas, como por ejemplo las tablas de multiplicación o la tablilla Pimpón 322, mientras que el segundo grupo contiene la formulación o solución de problemas algebraicos o geométricos, como el caso de la YBC .7289, apreciada en la Figura 1.

Esta última es parte de la colección babilónica de Yale. En ella se muestra una figura que se acerca mucho a lo que conocemos del Teorema de Pitágoras. La tabilla muestra un cuadrado con sus diagonales y unas marcaciones con su sistema de numeración sexagesimal: el lado del cuadrado está marcada con el número 30, mientras que los números $42; 25{,}35$ y $1; 24{,}51{,}10$ están marcados a lo largo de la diagonal. Traduciendo estos números a nuestra notación arábiga tenemos que $1; 24{,}51{,}10 = 1{,}4142129\ldots$, mientras que $42; 25{,}35 \approx 42{,}04081633$. La interpretación que hace Neugebauer [1] sugiere que $1; 24{,}51{,}10$ es una aproximación muy cercana a $\sqrt{2}$, y $42; 25{,}35$ es el número que se obtiene de utilizar la fórmula $d = l\sqrt{2}$ ($30 \times 1; 24{,}51{,}10 = 42; 35{,}35$), lo que sugiere que los babilonios ya conocían la relación entre los catetos y la hipotenusa de los triángulos rectángulos.

Por otra parte, la tablilla **PLIMPTON** 322, perteneciente a la Universidad de Columbia, sería de la misma época de la tablilla **YBC** 7289. Consta de una tabla de 4 columnas y 15 filas, como se aprecia en la figura 2. Las columnas se cuentan de izquierda a derecha, desde I hasta IV. Las columnas II y III contienen un listado de catetos b e hipotenusas c, mientras que la columna IV contiene los números del 1 al 15, lo que sería una simple numeración de cada una de las filas. Para completar las termas hace falta el cateto a. En este punto, el autor [1] sugiere una forma de calcular las ternas, con lo que hoy serían las ecuaciones $a = 2pq, b = p^2 - q^2, c = p^2 + q^2$, donde p y q son enteros arbitrarios que cumplen con las condiciones de ser primos relativos, no ser simultáneamente impares y $p > q$. Por su parte, Boyer [4] menciona que los números de la columna I son una aproximación de los valores de $sec^2(A)$, para 31°≤A≤45°.

[33] Una terna pitagórica es una tripleta de números enteros x, y, z tal que la relación $a^2 + b^2 = c^2$ se cumple.

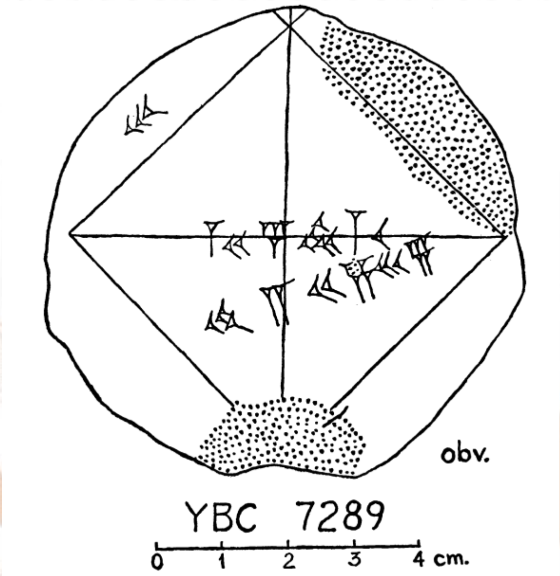

Figura 1. Tablilla YBC 7289**. Fuente:** O. Neugebauer y A. J. Sachs "*Mathematical Cuneiform Text*".

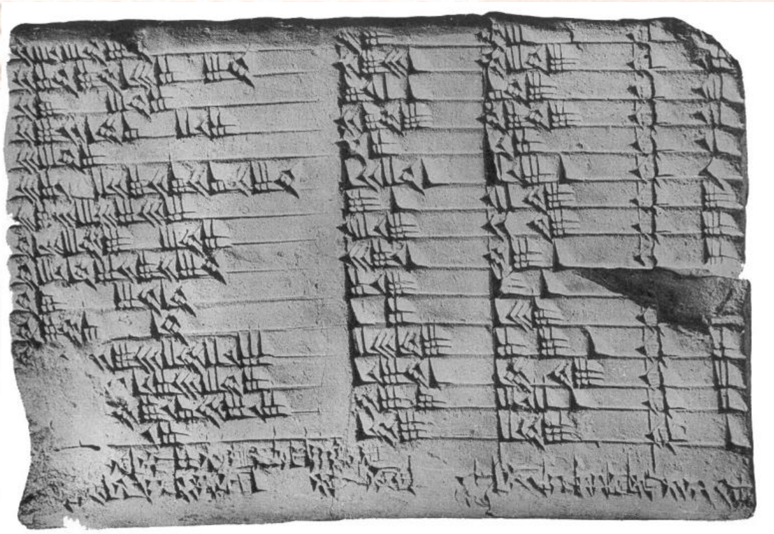

Figura 2. Tablilla PLIMPTON 322. **Fuente:** https://es.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322

c. India

En India, la historia del Teorema de Pitágoras surgió gracias a la religión. La teoría que desarrollaron se encuentra en un antiguo manual hindú llamado Sulvasustra, que significa "*Manual de la cuerda*", y tenía como fin la prescripción detallada para la construcción de altares, con formas y tamaños definidos. Se calcula que este manual data de entre los años 500 y 200 A.C, y se destaca entre ellos los Sulvasustras atribuidos a Baudhayana (entre siglo VI y III) y Apastamba (entre siglos VI y III a.C), además de altares famosos basados en el Teorema de Pitágoras como el Altar en forma de halcón y el Mahavedi. Algunas construcciones geométricas usadas en el Sulvasustras, son mencionadas en el texto Satapatha Bramana, que fue escrito, según [5], entre los años 1000 y 800 A.C.

d. China

En china, el Teorema de Pitágoras en China se remonta hasta la dinastía Han (206 A.C - 221 D.C.), en el capítulo 9 de la colección "*Nine chapters on the Mathematical Art*". De acuerdo con Lui Hui (siglo III D.C.), este escrito se basó en otros trabajos anteriores que fueron quemados en tiempos del emperador Ch'in Shih Huang (221-206 A.C.), cuyos restos fueron recuperados y compilados en el libro anteriormente mencionado. En el capítulo 9, llamado "*Problems concerning Right-Angled Triangles*" aparecen 16 problemas que involucran triángulos rectángulos. En todos los casos, los problemas se dan con números concretos, pero las soluciones se dan de manera general. Van der Waerden [2] clasifica estos problemas en 12 categorías, en función de la información que dan y o que hay que calcular.

3. Demostraciones del teorema

Una vez presentados los antecedentes del teorema en las cuatro civilizaciones mostradas previamente, podemos apreciar un desarrollo empírico y epistemológico de las matemáticas. Tomando como ejemplo el triángulo sagrado egipcio de lados 3-4-5, para ellos no era del todo claro el porqué este da lugar a un ángulo recto, bastaba con saber que servía así y con eso era suficiente, no les interesaba llegar más allá. La mayoría de civilizaciones antiguas comparten esta forma de pensar. Más allá de motivarse por descubrir nuevas matemáticas, las teorías que desarrollaban debían alguna utilidad, ya sea para construir pirámides o altares. En este contexto, los babilonios parecieran ser la excepción, ya que las tablillas **YBC** 7289 y **PLIMPTON** 322, según las interpretaciones de Neugebauer [1], pareciera que va más allá y surge la hipótesis de que estas tablillas tuvieran función pedagógica más que practica.

La misma situación encontramos en los chinos. Los 16 problemas de "*Nine chapters on the Mathematical Art*" tienen la particularidad de que a problemas puntuales se da una solución general. Acá se da un paso hacia la abstracción, pasando de un método inductivo a uno deductivo, en comparación con las otras civilizaciones donde se generalizaban teorías con base en el funcionamiento correcto de varios casos particulares. En este sentido, los griegos dan el salto definitivo para dejar atrás la matemática concebida como un campo de investigación inductivo basado en las generalizaciones a parir de casos particulares, logrando la abstracción de esta ciencia hacia la mente, logrando así trabajar de manera inductiva, para de esta manera dar a luz a las primeras demostraciones matemáticas formales de la historia.

Uno de los personajes más relevantes en el proceso de abstracción de las matemáticas es el matemático y filósofo griego Pitagoras de Samos, a través de su escuela, la Hermandad Pitagórica.

Parte de esta importancia radica en la manera cómo los pitagóricos percibían el mundo. Para ellos, el mundo estaba compuesto por números enteros o relaciones entre ellos, de la misma forma en que la materia está formada por átomos [6]. El teorema de Pitágoras es sin duda el legado más importante que dejaron para el desarrollo de la matemática en la posteridad.

Entendido en un principio como un teorema más geométrico que algebraico, en el que se relaciona las áreas de los catetos y el área de la hipotenusa, se reconoce a través de la historia como la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$. Dado el hermetismo con el que trabajaban, es difícil establecer cuál fue la demostración hecha por Pitágoras, además porque los descubrimientos hechos dentro de la hermandad eran, en la mayoría de los casos, atribuidos al mismo Pitágoras, así el no tuviera nada que ver. En virtud de lo anterior, los historiadores han podido reducir a un poco menos de 3 las pruebas desarrolladas por Pitágoras, basado en conceptos de proporción y semejanza de sus lados [7].

En la segunda prueba, Maor [8] expone que hay razones para creer que Pitágoras demostró primero el caso puntual de los triángulos rectángulos isósceles. Se presume que esta prueba ya había sido hecha por los hindúes, y que Pitágoras pudo haber escuchado algo de ella en los viajes que hizo por el Mediterráneo. Para esta prueba se traza el cuadrado $ABCD$ como se muestra en la figura 3, luego se unen los puntos medios de cada uno de los lados, tanto adyacentes como opuestos, mediante una línea recta, lo que forma el cuadrado $KLMN$. Este cuadrado, a su vez se puede dividir en cuatro triángulos congruentes de medidas $45 - 45 - 90$ grados. Cualquiera de los dos tiene un área combinada igual a los cuadrados MC o NC del triángulo MCN. Así, el área total del cuadrado $KLMN$ es igual al área combinada de los

Cuadrados construidos sobre los dos lados.

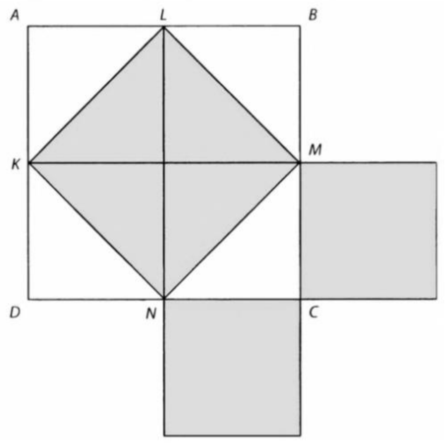

Figura 3. Demostración caso particular triángulo rectángulo. **Fuente:** E. Maor. *"The pytagorean Theorem. A 4000-year history".*

En la segunda se tiene la Figura 4, un triángulo rectángulo que es divido en otros dos triángulos rectángulos, mediante una recta que atraviesa el ángulo recto y es perpendicular a la hipotenusa. Esta demostración, muy al estilo de Euclides, muestra en primer lugar que el cuadrado sobre AB es igual en área al rectángulo formado sobre BD. Acto seguido, muestra que el cuadrado sobre AC es igual en área al rectángulo formado sobre DC. Luego, por la adición de ambas áreas, se concluye que la suma de los cuadrados sobre AB y AC es igual al área sobre BC. Esta es la prueba que más se cree fue desarrollada por Pitágoras.

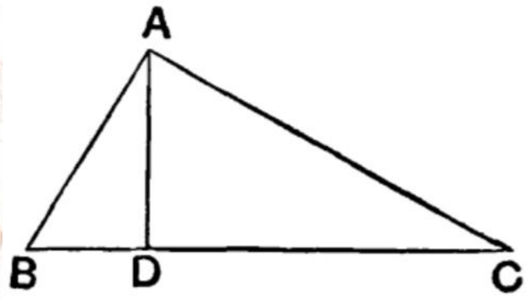

Figura 4. Demostración general del teorema de Pitágoras**. Fuente:** T. L. Heat, *"A history of greek mathematics"*.

Usando la figura 4, vemos que los triángulos en los que se divide el triángulo original son semejantes entre sí y el triángulo original, mientras que los tres triángulos, el original y los internos, tienen como lados correspondientes los catetos y la hipotenusa del rectángulo original. La suma de los dos triángulos semejantes anteriores es idéntica al triángulo semejante en la hipotenusa. Así, se puede inferir que lo mismo también sería cierto para los cuadrados descritos en los tres lados correspondientes, respectivamente, porque los cuadrados y los triángulos semejantes están entre sí en la proporción duplicada de los lados correspondientes [7].

Si bien, como señalamos anteriormente, no es posible determinar cual de estas es la demostración es la que realizó Pitágoras, se puede analizar de diversas maneras. La primera tiene que ver en la manera como cada quien percibe las matemáticas. Desde este punto de vista, para Pitágoras eran la base de todo lo que conocemos, así que las trato con el respeto y la responsabilidad del caso. Si las matemáticas eran perfectas, entonces de alguna manera la demostración que quería hacer se podía llevar a cabo. El camino que encontró fue utilizar la teoría de semejanza de triángulos disponible en la época y mediante un proceder de pasos lógicos, hacer equivalencia entre áreas.

Desde el punto de vista educativo de las matemáticas, esto nos demuestra que el conocimiento se forja, se construye, así como las demostraciones. Las matemáticas son inherentes al ser humano, surgen de la necesidad de contar, de hacer negocios, de interpretar el mundo. Así mismo se podría decir que es el proceso de aprendizaje, primero como algo empírico en los primeros años de vida, al igual que los egipcios y babilonios, desarrollar el pensamiento numérico en situaciones de la vida diaria, para luego pegar el salto, en el bachillerato y universidad, cuando el pensamiento matemático está más afianzado, hacia la abstracción y trabajar desde allí las Matemáticas.

Cada persona es diferente, por eso el desarrollo del pensamiento matemático también lo es, y la historia del teorema de Pitágoras también lo refleja. Pitágoras decidió utilizar teoría de semejanza y equivalencia entre áreas para probarlo, fue su visión, y así como él, cada uno puede tener la suya. Dentro de los miles de demostraciones, tanto geométricas como algebraicas, cada una muy diferente a la otra, rescatamos a dos personajes: Pappus y Bashkara.

Pappus, por ejemplo, hizo su demostración del teorema basado en la proposición I.36 de Los Elementos de Euclides: “Los paralelogramos que tienen las bases iguales y están contenidos entre las mismas paralelas, son iguales entre sí” [9]. Esta es otra construcción desde un punto de vista geométrico, basado en el trabajo que realizó Euclides, que a su vez se basó en otros autores diferentes que vivieron antes de él; esta es una descripción de lo que es la matemática. Tomemos como ejemplo el juego Jenga, en el cual con bloques de madera o plástico se pueden construir torres muy altas; en nuestro caso, cada teoría matemática es un bloque, y sobre ésta se desarrollan nuevas teorías, y sobre estas muchas más teorías derivadas, de aquí la rigurosidad con la que se deben tratar, cada paso debe estar justificado y no debe dejar lugar a dudas o paso a ambigüedades.

Sin embargo, Pappus fue un paso más allá, y logró demostrar una generalización de la proposición I.47 de los elementos, el mismo teorema que venimos tratando. En aquella extensión, se muestra que no necesariamente se deben trabajar con triángulos rectángulos, sino que puede ser un triángulo cualquiera. Las figuras que subtienden los lados del triángulo no deben ser necesariamente cuadrados, en su lugar puede ir un paralelogramo cualquiera. Una visión más amplia desarrollado también geométricamente, al estilo pitagórico y euclidiano, que abre nuestra perspectiva, mostrándonos una vez más que hay más de un camino para un tema en concreto.

Una última visión que queremos presentar del tema es la demostración hecha por Bhaskara. Esta demostración, una combinación de geometría y álgebra, refuerza la visión expuesta anteriormente. Un poco alejado de la estrategia utilizada en las demostraciones mencionadas, para la demostración del Teorema, Bhaskara toma un cuadrado de lado c y lo divide en cuatro triángulos equivalentes, con catetos a y b, y un cuadrado de lado igual a la diferencia de los cuadrados. Posteriormente, estos elementos son reorganizados de la forma en la que aparecen en la figura x, de tal forma que, la figura original queda transformada en dos cuadrados unidos, uno de área a y el otro de área b, luego se puede concluir que la suma de las áreas de los cuadrados de área a^2 y b^2 es igual c^2, el área del cuadrado original.

De esta manera presentamos como la matemática, desde el punto de vista de la educación, debe ser una construcción, la misma historia nos lo muestra así. La demostración de este teorema en particular nos muestra que hay muchas formas de llegar a una misma conclusión, cada demostración es auténtica, como también cada persona lo es. Está en manos de todos los que hacemos parte del gremio hacer que así sea.

4. Consecuencias del teorema

El Teorema de Pitágoras marcó un nuevo rumbo en la historia de las matemáticas, al ser una de las primeras demostraciones formales de la historia. Luego de su demostración, el teorema de Pitágoras ha servido como inspiración para posteriores formulaciones matemáticas. Entraremos a detallar 3 consecuencias que impactaron de gran manera a las matemáticas.

4.1. Aparición de los inconmensurables y los números irracionales

No son muy claras la fecha y la forma en que aparecieron los inconmensurables. Como se mostró anteriormente, los babilonios, en su tablilla **YBC** 7289 dejaron escrita una aproximación muy cercana a $\sqrt{2}$, mientras que los egipcios *llegaron a reconocer el caracter distinto de los irracionales* Kline[6]. Esto muestra que de una u otra forma, las civilizaciones antiguas ten´ıan conocimiento de este tipo de nociones, pero no las desarrollaron de una manera más profunda. Diversos personajes han hablado sobre los orígenes de la teoría de inconmensurabilidad, uno de ellos Pappus, quien le atribuye el descubrimiento de los inconmensurables a los pitagóricos.

El descubrimiento de los inconmensurables se le atribuye en gran medida a Hipaso de Metaponto. Hasta ese momento, la teoría de proporciones por parte de los pitagóricos se limitaba a comparar medidas cuyas magnitudes eran números enteros, es decir, cantidades conmensurables que tuvieran alguna unidad de medida en común, de modo que cada uno de los números era múltiplo de la unidad. Llamaron razones conmensurables a aquellas cantidades que se podían expresar mediante la relación de números enteros, mientras que aquellas que no las llamaron inconmensurables. Este descubrimiento causó un fuerte impacto dentro de la hermandad, hasta el punto que, según cuentan algunos autores, Hipaso fue ahogado en el mar por traer a este mundo objetos que no se pudieran expresar como relación entre dos números enteros.

La demostración dio paso a una nueva clase de números, unos que los pitagóricos no veían en la naturaleza. Fue tan fuerte el impacto que se dice, fue lo que habría generado la primera crisis de las matemáticas. Los números irracionales permanecieron en el limbo más de 2000 años, hasta que Richard Dedekind, mediante cortaduras, logró formalizar el conjunto de números reales en el año 1872.

4.2. Último teorema de Fermat

Conjeturado por el matemático francés Pierre de Fermat e inspirado en el teorema de Pitágoras, planteó si la expresión $x^n + y^n = z^n$ tendría soluciones enteras para $n > 2$. Luego de mas de 300 años en los que cientos de matemáticos intentaron demostrar esta conjetura, en 1995, Andrew Wiles y Richard Taylor lograron demostrar el último teorema de Fermat era cierto y que no hay soluciones para dicha expresión. La importancia de este radica en las teorías surgidas en el casi interminable camino hacia su demostración. Destacando el teorema de Taniyama-Shimura, el cual fue la base para su demostración, donde genios como Euler y Sophie Germain, dieron sus aportes con los que fue posible demostrar el esquivo teorema, [10].

5. Conclusiones

La matemática surge de la necesidad del ser humano. Con el transcurrir de la historia, la matemática fue mutando de una ciencia casi experimental a una ciencia en la cual no se admiten ambigüedades ni errores. El teorema de Pitágoras cambió la forma en la que percibimos las matemáticas, nos da a entender que el desarrollo del pensamiento deductivo puede tomar su tiempo pero el cerebro está capacitado para entender si se hace de la manera correcta. Mostrando la evolución que ha tenido el teorema, se puede tomar como guía para entender que todo hace parte de un proceso. Por otra parte, a partir de la demostración surgieron otras teorías que han sido de gran relevancia para el desarrollo de la humanidad.

Referencias

[1] O. Neugebauer.y A. J Sachs. *"Mathematical cuneiform texts"*. Londres: New Heaven, 1945, pp. 37 – 44.

[2] B. L. Van der Waerden, *"Geometry and Algebra in Ancient Civilizations"*. Berlin: Springer-Verlag, 1983, pp. 1-66.

[3] O. Neugebauer*, "The Exact Sciences in Antiquity"*. Nueva York: Dover Publications, Inc., 1969.

[4] C. B. Boyer, *"Historia de la matemática".* Madrid: Alianza Editorial, 1987, pp 8-62

[5] L. Renou y J. Filliozat, *"L'Inde classique I".* Paris: Editions Belin, 1947,

[6] M. Kline*, "El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días".* Madrid: Alianza Editorial, 1992, pp.53-61.

[7] T. L. Heat, *"A histoy of greek mathematics",* Vol 1. Oxford: Oxford University Press, 1921, pp. 141-169.

[8] E. Maor, *"The pytagorean Theorem. A 4000-year history".* New Jersey: Princeton University Press, 2007.

[9] Euclides, *"Elementos".* Barcelona: Gredos, 1991.

[10] S. Singh, *"El último teorema de Fermat".* Barcelona: Editorial Planeta, 2015.