HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS: INCIDENCIA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

HISTORY OF MATHEMATICS: INCIDENCE IN TEACHERS' TRAINING

Carlos Rondero-Guerrero[1] Aarón Reyes-Rodríguez[2]***

Resumen*:* en este artículo, de carácter teórico, se analiza mediante dos ejemplos cómo la Historia de las matemáticas puede aportar elementos para apoyar la formación docente. Particularmente, se argumenta que la historia de las matemáticas es una fuente rica de conocimientos epistemológicos y didácticos, entre los que destacamos a los referentes epistemológicos como ideas que pueden promover la articulación de saberes y el proceso de entendimiento de conceptos o saberes matemáticos. Mediante un análisis documental, se describe cómo una idea matemática que denominamos *relación fundamental del cálculo Leibniziano* y el *Teorema de Pitágoras* se constituyen en referentes epistemológicos a través de los cuales se pueden articular diversos conceptos. En este contexto, se da cuenta de cómo se lleva a cabo el proceso de articulación de ideas matemáticas y cuáles son las implicaciones didácticas de dicho proceso de articulación en la formación de profesores de matemáticas. Análisis como el presentado pueden ser de utilidad para que estudiantes y profesores de matemáticas identifiquen que el conocimiento matemático es parte de una herencia cultural.

Palabras clave: historia, Matemática, formación de profesores, referente epistemológico.

Abstract: in this paper, of a theoretical nature, we analyze through two examples how the History of mathematics can provide elements to support teacher training. Particularly, it is argued that the history of mathematics is a rich source of epistemological and didactic knowledge, among which we highlight epistemological benchmarks as ideas that can promote the articulation of knowledge and the process of understanding mathematical concepts or knowledge. Through a documentary analysis, it is described how a mathematical idea that we call *the fundamental relation of Leibnizian calculus* and the *Pythagorean Theorem* constitute epistemological benchmarks through which various concepts can be articulated. In this context, it describes how the process of articulation of mathematical ideas is carried out and, some of the didactic implications of such articulation

* Licenciado en Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, México. Doctor en Ciencias, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México. Área Académica de Matemáticas y Física: Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México. E-mail: ronderocar@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0663-8366

** Actuario, Universidad Nacional Autónoma de México, México. Doctor en Ciencias, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del **IPN**, México. Área Académica de Matemáticas y Física: Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México. E-mail: aaronr@uaeh.edu.mx. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8294-9022

process, in the training of mathematics teachers. Analysis such as the one presented can be useful for students and mathematics teachers to identify that disciplinary knowledge is part of a cultural heritage.

Key Words: history, Mathematics, teachers' training, epistemological benchmarks.

1. Introducción

En lo que corresponde a la formación de profesores de matemáticas, un aspecto que ha sido descuidado es el correspondiente a la relevancia de la historia de la disciplina en la construcción de competencias pedagógicas y didácticas, además de lo concerniente a la ampliación de la cultura general de los docentes. Por otra parte, el estudio de la Historia de las Matemáticas posibilita que los saberes que se enseñan en el aula, estén contextualizados en un marco amplio, que permita a las personas reconocerlos como parte de su herencia cultural. Mostrar a los estudiantes, al menos en parte, algunas de las ideas básicas y fundamentales que dan origen al conocimiento matemático es un hecho relevante que puede permitirles interesarse en el aprendizaje de tales ideas.

Los ejemplos son muchos, en este trabajo se muestran algunas aportaciones relevantes de grandes pensadores como Pitágoras, Leibniz y otros, además de saberes tan reveladores como el triángulo aritmético, los números figurativos, el triángulo armónico y el binomio de Newton y por supuesto la presencia del promedio. Nuestra perspectiva incorpora además de aspectos históricos, otros de carácter epistemológico, lo que permite ampliar el desarrollo conceptual del conocimiento matemático. El constructo teórico básico de este trabajo se denomina *articulación de los saberes matemáticos*, en el que se considera que durante el proceso de aprendizaje se requiere explicitar algunas de las diferentes articulaciones entre los saberes, en contraposición a lo que tradicionalmente se realiza al presentarlos en forma descontextualiza, aislada, desconectada y sin mostrar las diferentes interrelaciones que existen entre ellos.

Como se indicaba, el llevar a cabo una revisión histórica de diversos conceptos matemáticos puede permitir a los estudiantes darse cuenta que las matemáticas no son la *ciencia exacta* y *acabada* que nos hacen creer en la escuela, sino que es una creación humana similar al resto de las ciencias, que ha transitado por un proceso de desarrollo que ha conducido al refinamiento de las ideas desde aproximaciones iniciales, que actualmente pudiéramos considerar como burdas. Por ejemplo, la Historia del álgebra permite darnos cuenta de la dificultad de entender los números negativos, los cuales, incluso algunos renombrados matemáticos pensaban que *no existían*, a pesar de aparecer como soluciones a cierto tipo de ecuaciones; así como las dificultades epistemológicas que involucra el realizar operaciones con números racionales; hasta las dificultades para utilizar e interpretar el símbolo igual, cuya invención, como lo conocemos, es relativamente reciente (1557).

Al respecto, Liu [1] considera cinco razones por las cuales la historia de las matemáticas debiera integrarse en los salones de clase: (i) la historia puede ayudar a incrementar la motivación y ayudar a desarrollar una actitud positiva hacia el aprendizaje, (ii) los obstáculos pasados en el desarrollo de las matemáticas pueden ayudar a explicar por qué los estudiantes de hoy las encuentra difíciles, (iii) los problemas históricos pueden propiciar que los estudiantes desarrollen un pensamiento matemático, (iv) la historia revela la faceta humanística del conocimiento matemático y (v) la historia proporciona a los profesores una guía para la enseñanza.

2. Desarrollo del tema

En esta sección se muestra, mediante un ejemplo, cómo la Historia de las matemáticas (**HM**) proporciona condiciones para obtener ricas experiencias y entendimiento del desarrollo de los conceptos matemáticos [2], así como articular estas ideas en una estructura conceptual amplia. A partir de dos ejemplos que hemos abordado en otros artículos, argumentamos que la historia de las matemáticas es útil para identificar referentes epistemológicos, es decir ideas básicas que permiten articular una estructura de conceptos, así como fenómenos que limitan el aprendizaje de un concepto como el reduccionismo didáctico, es decir la falta de articulación entre objetos o relaciones que permean todas áreas de la disciplina o de otras ciencias, como es el caso del teorema de Pitágoras, considerado por algunos como el teorema individual más importante en matemáticas, [3].

2.1. La Historia de las Matemáticas como fuente de referentes epistemológicos

Un referente epistemológico es un saber, a partir del cual es posible articular diferentes objetos matemáticos en una estructura conceptual, [4]. En esta sección ejemplificamos cómo la revisión de la historia de las matemáticas permite la identificación de tales referentes, particularmente abordaremos lo concerniente a un referente epistemológico del cálculo leibniziano, el cual pudimos identificar al realizar un detallado análisis de algunos de los sustentos epistemológicos expresados por el propio Leibniz.

Adoptar una perspectiva histórica para llevar a cabo una reflexión didáctica resulta relevante ya que la historia de las matemáticas juega un papel de gran importancia dentro de la educación matemática [5-7] porque, entre otros aspectos, puede apoyar a una mejor comprensión de los conceptos o ideas, además de situar a los nuevos conocimiento en el contexto amplio de la disciplina [7] y en el de la cultura humana. Por otra parte, la historia de las matemáticas puede dar pautas acerca de enseñarnos cómo enseñar [8] y por esta razón los profesores deberían ser capaces de analizar el desarrollo histórico de las matemáticas, en busca de ideas de alto valor pedagógico.

En este contexto, se considera que la Relación Fundamental del Cálculo Leibniziano (abreviada como **RFCL**) es una idea de gran valor pedagógico, como trataremos de mostrar en este trabajo. Baron [9] y Serfati [10] refieren que Leibniz derivó la **RFCL** a partir de la idea fundamental del principio de identidad. Este saber en apariencia elemental, e incluso trivial, tiene una enorme trascendencia en el desarrollo del cálculo. La Relación Fundamental del cálculo Leibniziano (**RFCL**) es un referente epistemológico para el cálculo diferencial e integral, lo que lleva a considerar que la identificación de este referente, realizada desde una perspectiva histórico-epistemológica, tiene diversas implicaciones didácticas, incidentes en los aprendizajes de los estudiantes.

El principio considera que *cada cosa que posee magnitud es igual a sí misma*, es decir, A=A, la cual es denominada la propiedad de identidad, que para Leibniz es *el origen de los orígenes*. Desde un punto de vista lógico esta afirmación, podría parecer irrelevante ante un observador poco analítico; sin embargo, en las manos de un genio como Leibniz, es la fuente de una gran cantidad de resultados matemáticos no triviales. Este resultado es poco conocido por los profesores de matemáticas, pero al reflexionar sobre el conjunto de articulaciones conceptuales que se desprenden del mismo se puede obtener una gran diversidad de aprendizajes de carácter epistemológico y didáctico. En nuestro caso, un aprendizaje didáctico que identificamos fue: es recomendable el profesor esté atento a rescatar las ideas expresadas por los estudiantes, por simples que parezcan.

Partiendo de este principio y realizando las operaciones de resta y suma, que se muestran a continuación, se obtiene la **RFCL**, es cual es un resultado que ya no es trivial.

$$A=A$$
$$A-A=0$$
$$A-A+B-B+C-C+D-D+E-E=0$$
$$A+(B-A)+(C-B)+(D-C)+(E-D)-E=0$$
$$(B-A)+(C-B)+(D-C)+(E-D)=E-A$$

Con base en el desarrollo algebraico previo, Leibniz hace notar que dada una sucesión finita de magnitudes, la suma de las primeras diferencias de términos consecutivos de la sucesión original es igual a la diferencia entre el último y el primer término de la sucesión. No cabe duda de que una vez extraída e identificada la relación fundamental, ésta se convierte en el eje central de la construcción que Leibniz hace del cálculo, viéndose reflejada en muchos de sus desarrollos matemáticos, es decir que el cálculo de Leibniz tiene su origen en gran medida en este resultado que si bien es cierto es de carácter numérico, no se queda sólo es éste ámbito, sino que lo trasciende. Entonces, los conceptos fundamentales del cálculo infinitesimal desarrollados por Leibniz, se van extrapolando al ámbito de lo infinito de los conceptos y resultados obtenidos a partir del análisis de las sucesiones finitas [10-14].

En forma general dada la sucesión, $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$; su correspondiente sucesión de diferencias es:

$$d_1= a_1-a_0,\ d_2= a_2-a_1,\ d_3 = a_3-a_2,\ \ldots,\ d_n = a_n-a_{n-1},$$

Leibniz, obtiene el resultado,

$$\sum_{k=1}^{n} d_k = a_n - a_0$$

El cual identificamos como un referente epistemológico, que denominamos **RFCL**. Un primer resultado que se deriva de la **RFCL** es:

$$\sum_{k=1}^{n} d_k + a_0 = a_n$$

Ambas expresiones, se interpretan en forma complementaria. La primera nos dice que la suma de la sucesión de diferencias, es igual a la diferencia total, entre el último y el primer valor de la sucesión original; la segunda se interpreta como el hecho de que el último valor de la sucesión, está dado como el primer valor, más la suma (acumulación) de todas las diferencias (cambios). Dicho de otro modo, es posible predecir el valor final, si se conoce el valor inicial, más el valor acumulado de las diferencias. Este referente predictivo se encuentra, por ejemplo, en el movimiento rectilíneo uniforme, cuya expresión básica es:

$$x\,(t) = x_0 + v\,(t\text{-}t_0).$$

La interpretación que se le puede dar a la expresión anterior es: para predecir la posición de una partícula, cualquier instante de tiempo t, se requiere conocer la posición inicial y agregar la variación de la posición producida por la velocidad v, en el intervalo de tiempo transcurrido, $t - t_0$.

Durante el análisis de las dos primeras expresiones, lo que pareciera ser un simple despeje, se traduce en una nueva interpretación del resultado. Es decir, se está llevando a cabo un proceso de articulación, al integrar al campo de interpretaciones, de la primera expresión, la idea de predicción, con lo que se obtiene una estructura conceptual más amplia.

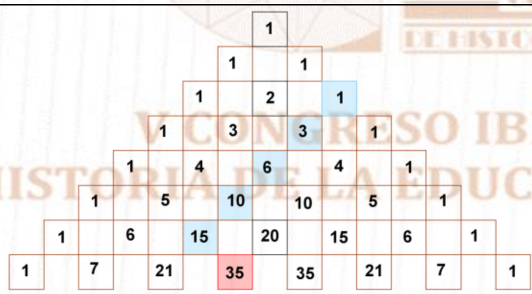

Figura 1. Triángulo aritmético.

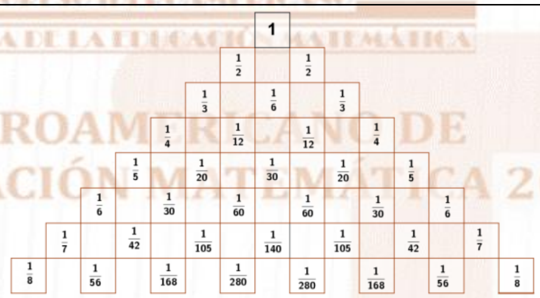

Figura 2. Triángulo armónico.

De tal manera que el análisis de una de las ideas centrales del cálculo de Leibniz han permitido identificar a la **RFCL** como un referente epistemológico trascendente para el cálculo, ya que es un saber que propicia la articulación y la ampliación de algunas propiedades de la suma de diferencias numéricas que pueden extenderse al ámbito de lo continuo como un medio para entender diversas ideas fundamentales en esta área de las matemáticas.

Es un hecho que estas ideas están plasmadas en los desarrollos matemáticos que aparecen en los libros de historia de las matemáticas, sin embargo, la riqueza conceptual del análisis emerge cuando se lleva a cabo una reflexión didáctica precisamente, con el propósito de identificar el valor pedagógico de tales ideas y su posible impacto en los procesos de aprendizaje.

La **RFCL,** está presente en otros objetos matemáticos, como el triángulo aritmético y triángulo armónico. Es posible identificar varias relaciones entre los triángulos aritmético y armónico. Los denominadores de cada elemento de la *n*-ésima diagonal del triángulo armónico se obtienen al multiplicar por n, los respectivos elementos de la *n+1*-ésima diagonal del triángulo aritmético: figuras 1-2.

2.2. La Historia de las Matemáticas en la identificación de fuentes de reduccionismo didáctico

Generalmente, los profesores de matemáticas presentan a los estudiantes los saberes matemáticos descontextualizados de sus orígenes y evolución histórica, lo que trae como consecuencia el que vea a la matemática como un conjunto de recetas que, en el mejor caso, tienen que memorizar; y no como una disciplina que tiene una estructura lógica-deductiva.

Las matemáticas son un legado cultural de la humanidad. La presencia de diferentes niveles de desarticulación, como el anteriormente mencionado, lo hemos denominado: *reduccionismo didáctico de los saberes matemáticos.* Este fenómeno de reduccionismo tiene diversas implicaciones en la didáctica, lo que generalmente se convierte en un obstáculo para la obtención de aprendizajes con entendimiento profundo que le vaya dando sustento al desarrollo de un pensamiento crítico.

En principio se presentan algunas perspectivas sobre el teorema de Pitágoras (**TP**) que dan muestra de enorme trascendencia de este conocimiento. Existen diversas evidencias del reduccionismo didáctico con el que se presentan los saberes, por ejemplo: la indicación a los profesores fue que enunciaran el **TP**, siendo la forma más común: *en un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma del cuadrado de los catetos*. Sin embargo, en algunos casos, los profesores no hicieron referencia al triángulo rectángulo y mencionaron que el enunciado del **TP** es $c^2=a^2 + b^2$, sin dar mayor explicación, lo cual es muestra de una simplificación conceptual excesiva o la falta de entendimiento de que un teorema es un enunciado condicional que debe ser probado. En este caso, el reduccionismo didáctico se expresa al considerar al **TP** como una fórmula o una ecuación, sin que intervengan otros elementos de reflexión, como la condición de que las variables se refieren a las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Lo anterior concuerda con lo mencionado en la literatura de investigación donde se ha identificado que los conocimientos de los estudiantes sobre el **TP** se reducen a conocer el nombre del teorema, e incluso llegan a memorizarlos sin mayor significado e interpretación.

De otro lado, también se ha identificado que los conocimientos histórico-epistemológicos de estudiantes y profesores son muy reducidos, y ello tiene implicaciones con una serie de creencias persistentes -muchas veces sesgadas- acerca de la trascendencia formativa de los saberes matemáticos, lo que se convierte en una presentación en el aula sumamente reduccionista de los mismos al quitarles mucho de su esencia conceptual que tienen desde sus orígenes.

En la literatura [15] se reportan acercamientos muy pobres, por ejemplo, acerca de los aspectos históricos del teorema de Pitágoras. Algunos de estos conocimientos son los siguientes: (i) "este teorema fue descubierto por la escuela pitagórica"; (ii) *[Conozco a] su creador: Pitágoras*. Con tal tipo de respuesta se puede inferir que los profesores consideran, equivocadamente, que los antecedentes históricos y epistemológicos no son relevantes en la construcción del saber matemático, lo que podría ser un elemento motivador para propiciar el aprendizaje de los estudiantes.

Otro aspecto que se requiere remarcar, por su relevancia, es el hecho de que muchos profesores consideran que las diferentes áreas de la matemática no tienen relación entre sí, por lo cual el reduccionismo didáctico en este sentido se presenta al exponer contenidos fragmentados sin un manifiesto interés por articularlos. En este sentido, cuando se estudia el **TP** los profesores reconocen o podrían mencionar que es importante estudiarlo y aprenderlo, porque permite calcular distancias que no se pueden medir directamente, lo cual es relevante en disciplinas como astronomía e ingeniería. O bien que la distancia entre dos puntos es un invariante en la transformación de un sistema de referencia desde la perspectiva Galileana. Es decir, difícilmente los profesores identifican al **TP** como uno de los teoremas más importantes y trascendentes de la matemática, fundamental para describir el espacio en el que vivimos y que, por supuesto, tiene relación con muchos otros saberes de diferentes áreas de las matemáticas: en trigonometría, geometría analítica, vectores y el cálculo, sólo por mencionar algunos de ellos.

Por otra parte, es un hecho lamentable el darnos cuenta que en el devenir del tiempo, el **TP** ha sufrido un reduccionismo didáctico que se expresa como una especie de decantamiento epistemológico, reflejado en las respuestas de los profesores en las que el **TP** se reduce a la expresión $c^2=a^2 + b^2$, la cual conlleva una carencia de significados y relaciones que son base del entendimiento matemático. Este decantamiento es análogo al fenómeno de la invisibilidad de las tecnologías identificado por Moreno-Armella y Sriraman [16]. En este caso el **TP**, al ser una de las herramientas fundamentales de la matemática, se ha incorporado de forma estrecha al saber matemático, aunque durante la educación escolarizada se reproduce ese carácter de invisibilidad del saber de manera que el teorema se incorpora acríticamente a la cultura matemática como una serie de creencias socialmente compartidas, despojándolo de sus elementos conceptuales históricos y epistemológicos, los cuales son de gran trascendencia en la construcción del conocimiento matemático.

Reflexionar respecto al tema del reduccionismo didáctico, asociado a su decantamiento epistemológico, es importante porque la educación matemática debiera proporcionar a los estudiantes un sentido holístico de los conceptos, de su alcance, lo cual permitiría potenciar, tanto el uso e historia de los mismos adecuados a la experiencia y al nivel de entendimiento particular de los estudiantes, [17].

3. Conclusiones

El poner en el escenario didáctico los referentes epistemológicos puede permitir modificar la perspectiva de los reduccionismos didácticos tan dominantes en las prácticas matemáticas presentes en las aulas. Aquí se han mostrado sólo dos ejemplos de referente epistemológico (**RFCL**), y algunas de las implicaciones que su conocimiento tiene para la didáctica. Por supuesto, existen otros referentes: la diferencia de cuadrados y los promedios, entre otros. En un aula de clase donde está presente un reduccionismo didáctico es difícil que se promueva el entendimiento de las ideas matemáticas ya que éste depende, en gran medida, de la construcción de conexiones robustas entre previos y nuevos conocimientos.

La articulación de los saberes matemáticos, expresada desde sus antecedentes históricos y epistemológicos, es un sustento conceptual que al incorporarse a las prácticas matemáticas posibilita el rompimiento del reduccionismo didáctico y el decantamiento epistemológico con el que se presentan, por parte de los profesores, los saberes, de tal forma que dicha articulación debería ser un eje fundamental en la formación de los mismos. En lo que se refiere a la disciplina de la Educación Matemática es conveniente dar un giro importante sobre investigaciones acerca de las diversas implicaciones que tiene el atender en forma sistemática la formación de profesores sobre estas dos vertientes teóricas: la historia y epistemología de las matemáticas, y el reduccionismo didáctico de los saberes matemáticos.

Referencias

[1] P.-H. Liu, *"Do Teachers Need to Incorporate the History of Mathematics in their Teaching?".* The Mathematics Teacher, vol. 96, no. 6, pp. 416-421, september 2003.

[2] R. M. Panasuk and L. B. Horton, *"Integrating History of Mathematics into the Classroom: Was Aristotle Wrong?"*. Journal of Curriculum and Teaching, vol. 2, No. 2, pp. 37-46, 2013.

[3] J. Bronowski, *"The ascent of man"*, 4th ed. London: BBC Books, 2011.

[4] C. Rondero et al., *"Aspectos históricos del cálculo de Leibniz: incidencia y aplicación en la didáctica de las matemáticas"*. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, vol. 89, pp. 55-68, 2015.

[5] J. Fauvel, *"Using history in mathematics education"*. For the Learning of Mathematics, vol. 11, no. 2, pp. 3-6, 1991.

[6] R. C. Laubenbacher and D. Pengellery, *"Mathematical masterpieces: teaching with original sources"* in Vita Mathematica: historical research and integration with teaching. Washington: The Mathematical Association of America, 1996, pp. 257-260.

[7] V. F. Rickey, *"My favorite way of using history in teaching calculus"* in Learn from the masters. Washington: The Mathematical Association of America, 1997, pp. 123-134.

[8] S. Avital, *"History of mathematics can help improve instruction and learning"* in Learn from the masters. Washington: The Mathematical Association of America, 1997, pp. 3-12.

[9] M. A. Baron, "*The origins of the infinitesimal calculus"*. New York: Dover, 2003.

[10] M. Serfati, *"The principle of continuity and the 'paradox' of Leibnizian mathematics"* in the practice of reason: Leibniz and his controversies. Amsterdam: John Benjamins Publishing Company, 2010, pp. 1-32.

[11] H. J. M. Bos, *"Differentials, higher order differentials and the derivative in the Leibnizian Calculus".* Archive for History of Exact Sciences, vol. 14, no. 1, pp. 1-90, 1974.

[12] H. J. M. Bos, *"Newton, Leibniz and the Leibnizian tradition"* in "*From the calculus to set theory 1630-*

1910: An introductory history". Princeton: Princeton University Press, 1980, pp. 49-92.

[13] P. Mancosu, *"Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century".* New York: Oxford University Press, 1996.

[14] M. Serfati, *"On 'the sum of all differences' and the origin of mathematics according to Leibniz: mathematical and philosophical aspects"* in "*Perspectives on theory of controversies and the ethics of communication: Explorations of Marcelo Dascal's Contributions to Philosophy"*. Dordrecht: Springer, pp. 69-80, 2014.

[15] A. Reyes et al., *"Reduccionismo Didáctico y Creencias de Profesores acerca del Teorema de Pitágoras",* BOLEMA, vol. 31, no. 59, pp. 968-983, 2017.

[16] L. Moreno, B. Sriraman, *"The articulation of symbols and mediation in mathematics education",* ZDM Mathematics Education, vol. 37, no. 6, pp. 476-486, 2005.

[17] A. Schoenfeld, *"Toward a theory of teaching-in-context".* Issues in Education, vol. 4, no. 1, pp. 1-94, 1998.