RECORRIDO HISTÓRICO DE LAS SUBSERIES DE LA SERIE ARMÓNICA

HISTORICAL DEVELOPMENT OF THE SUBSERIES OF THE HARMONIC SERIES

Edilberto Sarmiento-Sarmiento Carmen Pulido-Segura** Andrés Riaño-Pulido ****

Resumen: se hace un recorrido histórico de las subseries de la serie armónica que son convergentes, ya que es bien conocido que está serie diverge. Se presentan las series de Kempner (1914) e Irwin (1916) que se obtienen eliminando de la serie armónica una cierta cantidad de números naturales que contengan el digito 9; desde entonces, varios autores han analizado las variaciones de esta idea, determinando la convergencia de subsumas similares de las series armónicas y calculando o estimando las sumas cuando son convergentes, hasta que Lubeck y Ponomarenko (2018) obtienen un resultado que caracteriza las subseries convergentes de la serie armónica.

Palabras clave: Serie armónica, series de kempner, subsumas de la serie armónica.

Abstract a historical development of the harmonic series subseries that are convergent is made, since it is well known that this series diverges. The series of Kempner (1914) and Irwin (1916) which are obtained by removing from the harmonic series a certain amount of numbers containing the digit 9; since that, several authors have analyzed the variations of this idea, determining the convergence of similar sub-sums of the harmonic series and calculating or estimating the sums when they are convergent, until Lubeck and Ponomarenko (2018) obtain a result that characterizes the converging subsums of the harmonic series.

Key Words: Harmonic series, Kempner series, subsums of harmonic series.

1. Introducción

Se hace una revisión histórica de las subseries de la serie armónica, comenzando con el artículo de Kempner 1914 [6] donde el autor prueba que la serie obtenida eliminando todos los términos que contienen el digito nueve de la serie armónica esta nueva serie contrario a lo que sucede con la

* Lic. En matemáticas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia. Maestria en matematicas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia. Profesor Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia. E-mail: edsarmientos@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2585-5983.

** Lic. En Matemáticas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia. Magister En Ciencias Matematicas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia. Profesora, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6893-8930.

*** Matematico, Universidad Nacional de Colombia, Colombia. Maestría en Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Colombia. Profesor Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia. E-mail: ajrianop@unal.edu.co. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2641-8750.

armónica resulta convergente y prueba que su suma es menor de 90. Luego Irwin en 1916 [5] generaliza el resultado de Kempner y prueba la convergencia de subseries obtenidas de la armónica eliminando cualquier otro digito un número fijo de veces y acota más precisamente la serie de Kempner. Después Farhi [4] estudia la convergencia y la suma de series de recíprocos de números que contienen un digito *d* exactamente un número de veces *n*. Posteriormente Baillie [1,8] generaliza las series de Kempner al eliminar de la armónica los términos que contengan cualquier cadena de dígitos fija y obtiene algoritmos para calcular con precisión la suma de este tipo de subseries de la serie armónica. Por último, en 2018 Ponomarenko [7] encuentra un resultado que caracteriza la convergencia de las subseries de la serie armónica.

1. Desarrollo del tema

La serie armónica es la suma de los recíprocos de los números enteros positivos.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots$$

Su nombre se deriva del concepto de armónicos en la música: las longitudes de onda de los armónicos de una cuerda vibrante son $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$, etc., de la longitud de onda fundamental de la cadena. Cada término de la serie después del primero es la media armónica de los términos vecinos.

El hecho de que la serie armónica sea divergente fue probado por primera vez en el siglo XIV por Nicole Oresme. Otras pruebas fueron dadas en el siglo XVII por Pietro Mengoli, Johann Bernoulli, y Jacob Bernoulli [3].

Históricamente, la serie armónica ha tenido cierta popularidad entre los arquitectos en particular en el período barroco, cuando la usaron para establecer las proporciones de los planos de planta, de las elevaciones, y para establecer relaciones armónicas entre los detalles arquitectónicos interiores y exteriores de iglesias y palacios.

En 1737 Euler demostró que la serie obtenida de la serie armónica eliminando algunos recíprocos de números enteros positivos y dejando únicamente los recíprocos de los números primos

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{23}+\cdots$$

Es divergente.

Existen series obtenidas de la armónica eliminando algunos recíprocos de enteros positivos que son convergentes, por ejemplo

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}++\cdots=1$$

Para cada $b > 1$, las series geométricas de base entera $\frac{1}{b}$, son convergentes.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}++\cdots=1$$

1.1. Series de Kempner

La serie de Kempner es una modificación de la serie armónica, en la cual se omiten todos los términos cuyo denominador expresado en base 10 contiene al menos un dígito 9, es decir, es la serie

$$\sum_{n\in N_9}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{28}+\frac{1}{30}+\cdots+\frac{1}{88}+\frac{1}{100}+\cdots$$

donde N_9 indica que n toma sólo valores enteros positivos cuya expresión en base decimal no contiene ningún 9. Esta serie fue estudiada por A. J. Kempner en 1914, [6]. Esta serie es interesante porque, al contrario que la serie armónica y en contra de la intuición (ya que aparentemente se eliminan pocos enteros positivos), es una serie convergente (Kempner demostró que su valor es menor que 90.

1.1.1. Prueba de Kempner

Escribiendo inicialmente:

$$\sum_{n\in N_9}\frac{1}{n}=\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{a_1}+\underbrace{\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{88}\right)}_{a_2}+\underbrace{\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\cdots+\frac{1}{888}\right)}_{a_3}+\cdots$$

Puede notarse que la fracción más grande en a_n es el primer término $\frac{1}{10^{n-1}}$ y que a_n contiene menos de 9^n términos así que:

$$a_n<\frac{9^n}{10^{n-1}}$$

$$\sum_{n\in N_9}\frac{1}{n}<\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{10^{n-1}}=90.$$

Irwin en 1916 [5] Probó que al eliminar de la serie armónica aquellos términos cuyos denominadores contienen el dígito 9 al menos a veces y, al mismo tiempo, el dígito 8 al menos b veces, el dígito 7 al menos c veces, y así sucesivamente, el dígito 0 al menos j veces (donde a,b,c,d,e,f,j,h,i,j son enteros mayores o iguales a cero dados), la serie así obtenida es convergente, para lo cual usó argumentos combinatorios.

También mejoró la cota para la suma de la serie de Kempner pues probó que

$$22.4 \leq \sum_{n \in N_9} \frac{1}{n} \leq 23.3$$

De otra parte, Baillie [1] y Wadha [9] obtienen el resultado de la serie de Kempner con una precisión de 20 decimales. El resultado de la serie es 22.92067 66192 64150 34816 (sucesión A082838 en OEIS)).

Schmelzer y Baillie [8] demuestran que las subseries de la serie armónica obtenidas eliminando los enteros que contengan una cadena fija X de dígitos converge y obtuvieron un algoritmo eficiente para el cálculo de la suma de estas series. Por ejemplo, la suma de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ para los n que no contengan la cadena "42" en su expresión decimal es 228.44630 41592 30813 25415. Otro ejemplo más complicado, en el que se calcula la suma de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$para los n que no contengan la cadena "314159" es 2302582.33386 37826 07892 02376. (Todos los valores numéricos aquí dados están redondeados en su última cifra decimal).

Se puede usar exactamente el mismo argumento con cualquier otro dígito omitido y el resultado también es cierto si se omiten sumandos que contengan cadenas de k dígitos en su expresión decimal. Por ejemplo, en el caso en el que omitimos todos los términos cuyos denominadores contengan la cadena "42". Este resultado puede demostrarse casi de la misma manera. Lo primero es darse cuenta que puede trabajarse con números en base 10^k en lugar de en la base 10 usual. En esta nueva base, cada conjunto de k dígitos de la expresión en base 10 representa a un solo dígito en la base 10^k, por lo que ahora la cadena de caracteres a sustraer está dada por un sólo "dígito" en la base utilizada. Adaptando la demostración dada arriba en base 10 a la base 10^k, se demuestra que estas series también convergen. Volviendo a la base 10, vemos que esta serie contiene todos los denominadores que se omiten para cualquier cadena de caracteres dada, así como denominadores que incluyen dicha cadena si esta no se encuentra representada por un "k-dígito" en una base 10^k. Por ejemplo, si se omiten los términos con un "42", en base 100 se puede omitir los términos 4217 y 1742, pero no el término 7421. Por tanto, el valor de esta serie siempre será mayor que el de la serie en la que se omitan todos los "42".

Farhi [4] estudió series de Kempner generalizadas. En particular, estudió las series de recíprocos de enteros positivos que tienen exactamente n veces un digito, por ejemplo, la serie de los recíprocos que contienen exactamente 1 nueve:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{19}+\frac{1}{29}+\frac{1}{39}+\frac{1}{49}+\frac{1}{59}+\frac{1}{69}+\frac{1}{79}+\frac{1}{89}+\cdots+\frac{1}{91}+\frac{1}{92}+\cdots+\frac{1}{98}+\frac{1}{109}+\frac{1}{119}+\cdots+\frac{1}{189}+\cdots$$

Por lo anterior, consideró la serie de Kempner generalizada, a saber, las sumas $S(d,n)$ de los recíprocos de los enteros positivos que tienen exactamente n veces del dígito d donde $0 \leq d \leq 9$ (de modo que la serie Kempner original es $S(9,0)$). Mostró que para cada d la familia de sucesiones $S(d,n)$ para $n \geq 1$ es decreciente y converge al valor exacto $10 \ln 10$. Curiosamente, la sucesión no es decreciente comenzando en $n = 0$; por ejemplo, para la serie Kempner original se tiene:

$$S(9,0) \approx 22.921 < 23.026 \approx 10 \ln 10 < S(9,n) \ para \ n \geq 1.$$

La serie de Kempner $S(9,0)$ converge muy lentamente. Baillie [1] mostró que, tras sumar 10^{27} términos, el error es aún mayor que 1.

En 1978 Baillie [1] publicó un método eficiente para calcular las diez sumas que surgen cuando se eliminan los términos que contienen cada uno de los dígitos "0" a "9". La suma con "9" eliminado es aproximadamente 22.92067. Pero la suma de todos los términos con denominadores hasta 10^{27} todavía difiere de la suma final en más de 1.

Luego en 2008 Baillie [8] desarrolló un método recursivo que permite expresar la contribución de cada bloque de *k+1* dígitos en función de las contribuciones de los bloques de *k* dígitos para cualquier elección de dígitos omitidos. Esto permite un cálculo más rápido con mucho menor tiempo de cómputo y lo usa calcular sumas cuyos denominadores omiten cadenas de dos o más dígitos y también sumas de $\frac{1}{s}$ donde s no contiene dígitos impares, ni pares ni cadenas como "42" o "314159" o incluso combinaciones de esas restricciones. Para el análisis de la convergencia de estas subseries en 2018 Ponomarenko [7] encuentra un resultado que caracteriza las subseries convergentes de la serie armónica.

Define que un subconjunto A de $\mathbb{N}$ es r-convergente si la serie $\sum_{n\in A}\frac{1}{n}$ converge.

Para $x \in \mathbb{R}$, define $A(x) = |\{a \in A: a \leq x\}|$, el número de elementos de A menores o iguales a x.

Una medida comúnmente usada del tamaño de A es su densidad asintótica definida como:

$$d(A) = \lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{x}$$

El resultado principal es que si $d(A) = 0$, entonces

$$\sum_{a_k \geq 1} \frac{1}{a_k} = \int_1^{\infty} \frac{A(x)}{x} dx.$$

En particular:

$\boldsymbol{A}$ es r-convergente si y solo si $\int_1^{\infty} \frac{A(x)}{x} dx$ converge.

También generalizó los resultados relativos a la convergencia de series tipo Kempner de la siguiente forma:

si $\lambda \in [0, 1]$, denota:

$$A^{\lambda} = \{n \in N: (\#9 \ en \ n) \leq \lambda(\# \ digitos \ en \ n)\}$$

El caso especial A^0 esta incluido y corresponde con las originales series de Kempner, A^1 es la serie armónica.

Además, prueba que A^{λ} es r-convergente y sólo si $\lambda < \frac{1}{10}$ y el resultado se generaliza para cualquier otro digito d en vez de 9.

3. Conclusiones

1. Es impresionante que aunque la serie armónica diverge, existen muchas subseries de la serie armónica que son convergentes al eliminar algunos términos con características particulares por ejemplo, la serie de Kempner que elimina todos los elementos de la serie que contengan al menos un nueve.

2. Es sorprendente como un tema tan particular produzca una gran cantidad de trabajo para los matemáticos durante casi 100 años.

3. Es interesante ver cómo, a partir de cada artículo, se empiezan a generalizar resultados de tal forma que el tema avanza históricamente a partir del planteamiento de Kempner 1914 hasta 2018 con la caracterización de las subseries convergentes.

4. En cada artículo quedan problemas abiertos en términos del cálculo de este tipo de sumas y la implementación de algoritmos efectivos para el cómputo de la suma de las subseries.

Referencias

[1] R. Baillie, "*Sums of reciprocals of integers missing a given digit, Amer*". Math. Monthly 86, 372-374, 1979.

[2] G. H. Behforooz, "*Thinning out the harmonic series*". Math. Mag. 68 no. 4, 289-293, 1995.

[3] C. H. Edwards, Jr. "*The Historical Development of the Calculus*". Springer-Verlag New York, Inc. 1979.

[4] B. Farhi, "*A curious result related to Kempner's series*". Amer. Math. Monthly 115, 933-938, 2008.

[5] F. Irwin, "*A curious convergent series, Amer*". Math. Monthly 23, 149-152, 1916.

[6] A. J. Kempner, "*A curious convergent series*". Amer. Math. Monthly 21, 48-50, 1914.

[7] B. Lubeck, V. Ponomarenko, "*Subsums of the Harmonic Series*". Amer. Math. Monthly 125:4, 351-355, 2018.

[8] T. Schmelzer, R. Baillie, "*Summing a curious, slowly convergent series*". Amer. Math. Monthly 115, 525-540, 2008.

[9] A. D. Wadhwa, "*Some convergent subseries of the harmonic series*". Amer. Math. Monthly 85 661-663, 1978.