VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018

INGENIERÍA DIDÁCTICA DEL PROCESO DE PRUEBA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Nelly Rodolfo Eliseo D´Andrea
Pontificia Universidad Católica Argentina. Facultad de Química e Ingeniería. Campus Rosario. (Argentina), Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Facultad de Agronomía. (Argentina)
rodolfoedandrea@gmail.comnerigaud@unam.mx, ahfs@unam.mx

Resumen

Una de las dificultades que encuentra el estudiante que ingresa a la Universidad, es el abordaje de la prueba matemática, proceso que conlleva implícito el conocimiento del lenguaje y la epistemología de esta ciencia. Estas dos últimas cuestiones son prácticamente desconocidas en el ciclo medio de Argentina, pues en este nivel, mayoritariamente, la matemática que se presenta, hace mostración de objetos matemáticos y sus propiedades sin demostración. El ciclo medio en Argentina se lleva a cabo entre los 13 y 18 años. El objetivo de este curso es instruir al docente de nivel medio y universitario en el conocimiento de una ingeniería didáctica que optimice el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la demostración de proposiciones matemáticas verdaderas.

Palabras clave: demostración, modelo didáctico, aprendizaje constructivo

Abstract

One of the difficulties that the student who enters University faces is the approach of the mathematical proof, which is a process that implies the knowledge of mathematical language and the epistemology of this science. The latter two matters are practically unknown in the middle education cycle (13-to 18-year-old students) of Argentina, since at this level, the mathematical doing mostly shows mathematical objects and their properties without demonstration. The objective of this course is to provide the university and middle education teacher with the knowledge of a didactic engineering that optimizes the teaching and learning process of the demonstration of true mathematical propositions.

Key words: demonstration, didactic model, constructive learning

Introducción

Cuando se le pide una demostración a un estudiante, este recurre a la verificación aunque es consciente que no es el proceso adecuado para establecerse como prueba. No obstante, lo hace, posiblemente debido al hecho que en la cotidianeidad y en las ciencias experimentales la verificación es el método de prueba usual. Este proceso se repite ostensiblemente, y no de forma aislada. Se trata de una reacción muy general, cuando el estudiante no puede llevar a cabo una prueba o no se le ocurre como generarla. El estudiante universitario de Ciencias Naturales e Ingeniería tiene profundas dificultades para comprender, reproducir y generar demostraciones matemáticas.

El objetivo de este curso fue instruir al docente universitario en el conocimiento de una ingeniería didáctica que optimice el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la demostración matemática.

Se presentó este curso a un grupo de docentes de nivel medio y superior que en su praxis demanda la necesidad y uso de la argumentación como núcleo central de los procesos de validación que los estudiantes de nivel medio y superior requieren. La cuestión se direccionó esencialmente a la presentación de una ingeniería didáctica destinada a optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración y la forma de llevar a cabo las secuencias argumentativas que se hallan implícitas en este proceso.

Marco teórico

El término ingeniería didáctica se utiliza en didáctica de las matemáticas con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje, conforme mencionó Douady (1996, p. 241)

> … el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase.

Artigue (1998) distingue varias dimensiones ligadas a los procesos de construcción de ingenierías didácticas, distinguiéndose una dimensión epistemológica que se asocia a las características del saber enfocado a la acción. Por otro lado, debe tenerse en cuenta la dimensión cognitiva que se asocia a las características cognitivas de los estudiantes que son foco del proceso de enseñanza y finalmente una dimensión didáctica que se asocia a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza utilizado.

El estudiante universitario de Ingeniería y Ciencias Naturales, tiene dificultades para comprender, reproducir y generar demostraciones matemáticas, confundiendo acciones como demostrar y verificar. El estudiante procede, en general, cuando se le pide una prueba, desde el empirismo ingenuo (Balacheff, 2000), considerando que la prueba consiste en la exhibición de algunos casos particulares sin un criterio formado al hacerlo. En muchos casos, cuando le es requerida una prueba que el docente ya expuso en clase, vuelven a recurrir a la verificación ignorando lo expuesto. Por otro lado, están aquellos que repiten lo que el docente realizó pero de modo mecánico, ritual y sin comprensión. Cabe preguntarse entonces: ¿Es necesario enseñar a demostrar?; ¿Con qué objetivo?; ¿Cómo es posible guiar al estudiante para que sea capaz de respetar el proceso deductivo cuando realiza la demostración de proposiciones matemáticas?; ¿Qué estrategias pueden utilizarse para que realice este proceso desde el razonamiento y no desde la memoria repetitiva?

Existen numerosos trabajos descriptivos sobre la demostración matemática y fundamentalmente están referidos a demostraciones en geometría. Se citan algunos de ellos a continuación.

Bell (1976) plantea que la demostración (formal o no) puede tener diversos objetivos en matemática:

Verificación: cuando se intenta asegurar la veracidad de una afirmación.; *Iluminación:* cuando además de asegurar su veracidad, permite entender por qué es cierta una afirmación.
Sistematización: cuando permite organizar el enunciado demostrado en un sistema de axiomas, definiciones y otros teoremas.

Bell (1976) se propuso analizar los intentos de los estudiantes por construir demostraciones o elaborar explicaciones en situaciones matemáticas elementales y comparó la forma en que difieren de los usos de la demostración que realiza un matemático profesional. A la luz de este análisis, elaboró una clasificación de los tipos de respuestas que un estudiante puede arrojar, a través de una categorización que distingue entre: empíricas y deductivas. La primera se caracteriza por el uso de ejemplos como factor esencial para la certeza mientras que la segunda se caracteriza por la utilización de la deducción como elemento conector con las conclusiones.

Harel & Sowder (1998) basados en estudios realizados por otros investigadores definen los denominados esquemas de demostración (proof scheme) y realizan una clasificación de dichos esquemas definiendo previamente dos conceptos vitales imprescindibles para comprender los esquemas citados. Indagar (ascertaining) es el proceso que un estudiante utiliza para suprimir sus dubitaciones acerca de la verdad de una observación. Persuadir (persuading) es el proceso que un estudiante utiliza para suprimir las dubitaciones de otros sobre la verdad de una observación. El esquema de demostración del estudiante es lo que constituye las acciones: indagar y persuadir para este.

Por otro lado, Leron (1983) y Solow (1992) proponen estrategias para llevar a cabo el proceso demostrativo, como se describe brevemente a continuación.

Leron (1983) propone un método denominado “estructural”, inspirado por las ideas informáticas que surgieron en los ochenta y repercutieron indiscutiblemente para posteriores avances. La idea básica que subyace es presentar las demostraciones en clase en diferentes niveles de gradualidad, procediendo desde las ideas elementales de la prueba hacia la conclusión, de manera escalonada y fragmentada. La ventaja principal de presentar así una demostración es que permite una comunicación más fluida generando en el estudiante un aprendizaje significativo. A diferencia de la prueba tradicional que se desarrolla desde la hipótesis a la tesis, la prueba estructural se desarrolla como un ‘diagrama de flujo’, focalizando determinadas partes de la prueba, con el objetivo de facilitar la comprensión de estas y generar la comprensión global de la prueba completa.

Solow (1992) sostiene que si se tiene que realizar una demostración del tipo: si A entonces B, se dice que se usa un *método progresivo*, tomando A como cierto llegamos a B, y que se usa uno *regresivo* cuando se busca un método para demostrar que B es verdadero, partiendo del supuesto de que B es verdadero. Ambos métodos se relacionan entre sí cuando se trabaja con B de tal forma que se llega a A y luego se toma A y se llega a B, obteniéndose así el método conocido como regresivo-progresivo. El proceso regresivo se inicia preguntando: ¿Cómo o cuándo puedo concluir que la proposición B es verdadera? El proceso de demostración se comienza regresivamente, planteando lo que Solow denomina: "pregunta de abstracción" que consiste siempre en un planteo de la forma: "¿Cómo o Cuándo puedo concluir que la proposición B es verdadera?". La pregunta debe ser formulada de un modo abstracto y sin hacer referencia alguna al problema concreto que generó. La respuesta a la pregunta de abstracción es un proceso de dos fases. Primero hay que dar una respuesta abstracta, para después aplicar esta respuesta a la situación específica. La forma en que sea formulada esta pregunta juega un papel decisivo. Por ejemplo, si tiene que probarse que el cuadrado de todo número entero par es par, la pregunta de abstracción sería para el planteo de esta prueba: ¿Cómo puedo demostrar que un número al cuadrado es par? Se puede responder esta pregunta en términos no tan abstractos, diciendo que esto puede ocurrir cuando se puede expresar al número como el producto de 2 por otro entero.

Presentación de la ingeniería didáctica

El lenguaje matemático tiene tres facetas claramente definidas: coloquial, que se expresa a través del lenguaje natural del individuo; visual, que se expresa a través de la visualización conceptual, que puede ser desde un simple diagrama a mano alzada a la gráfica realizada por un software y finalmente el lenguaje simbólico, que es propio de la Matemática. La epistemología de la Matemática se basa en el razonamiento y la abstracción y su desarrollo en el estudiante requieren de un entrenamiento en el conocimiento y la adquisición de destrezas del Lenguaje Matemático.

Como producto de la investigación llevada a cabo por D´Andrea, Curia y Lavalle (2012) sobre el razonamiento deductivo utilizado por estudiantes de Ciencias Naturales e Ingeniería, en el proceso de validación de proposiciones matemáticas, se generó un diagnóstico que permitió la construcción de una ingeniería didáctica apropiado para incentivar el abordaje de la demostración matemática. El diagnóstico, postula lo siguiente:

> El estudiante ingresante a Carreras de Ciencias Naturales e Ingenierías requiere en los cursos de Matemática del currículo de la carrera elegida comprender la demostración de proposiciones y teoremas. Tiene profundas dificultades para comprenderlas, y más aún para reproducirlas, producto del retardo del desarrollo del pensamiento formal y la supresión de desarrollos teóricos en el área matemática en el ciclo medio. A esto se suma la experiencia personal de los docentes que valoran la formación recibida en la demostración de proposiciones y teoremas pero que paralelamente reniegan de aprendizajes memorísticos implícitos en estas cuestiones y como consecuencia de estas experiencias y la reticencia de los estudiantes a incorporar estos contenidos debilitan estos procesos en el aula y por ende a la Matemática, al no exponer debidamente la epistemología que le es propia. (D´Andrea et al, 2012, p.130)

Esta ingeniería se perfila a través de una serie de estrategias presentadas como una secuencia de tareas cuyo objetivo es lograr un aprendizaje comprensivo, significativo y constructivo con una perspectiva implícita que permita desarrollar un pensamiento lógico que pueda ser extrapolado a otras disciplinas. Si bien la secuencia de tareas es eminentemente conductista, su aplicación cotidiana en el desarrollo de los diferentes cursos de Matemática, puede finalmente conducir a una actitud constructivista del estudiante, ya que tal secuencia induce al fortalecimiento de una habilidad ‘dormida’ en este y es la actividad ‘demostrar’, que estimula la praxis argumentativa, que se sostiene totalmente en el razonamiento. Para el desarrollo en clase de la actividad consistente en la demostración de una proposición, que permita una secuencia inmediata de apropiación como consecuencia de la comprensión, se sugiere seguir las siguientes etapas:

1. *Comprensión y Apropiación del Lenguaje Matemático.* Esta etapa es el prolegómeno a las siguientes y consiste en permitir al estudiante el acceso, comprensión y apropiación del Lenguaje Matemático. Para un acercamiento efectivo del estudiante a este Lenguaje, el docente deberá diseñar y seleccionar estrategias y material didáctico que apunten a un aprendizaje constructivo y comprensivo. La comprensión y apropiación del lenguaje requiere que el estudiante conozca: La utilización de conectores proposicionales: conjunción; disyunción inclusiva y exclusiva; implicación y doble implicación; negación. Las condiciones que pueden presentarse en una implicación o condicional. Las implicaciones asociadas que se hallan implícitas en un condicional cualquiera. Las reglas fundamentales del álgebra de proposiciones: Involución; De Morgan; Negación de una implicación, entre otras. Los métodos de demostración de implicaciones.

Los contenidos citados deben ser expuestos con una profusa cantidad de ejemplos, extraídos de contenidos del ciclo medio que son revisados, usualmente, en el curso propedéutico que antecede el inicio de las Carreras de grado universitarias.

Carece de sentido el planteo de las etapas siguientes, si el estudiante no tuvo la posibilidad de acceder al Lenguaje Matemático. Esta etapa debe ser el comienzo de los cursos iniciales de Matemática de la carrera escogida por el estudiante.

2. *Presentación del teorema o proposición a demostrar:* En este punto se presenta al estudiante el teorema o proposición a demostrar, en su estructura formal.

Las tres etapas siguientes tienen órdenes indistintos y esto obedece a que el estudiante puede apropiarse de la comprensión de la proposición a demostrar desde la perspectiva de su propio lenguaje, la visualización o la simple acción de la verificación.

3. *Interpretación coloquial:* En esta etapa se propone al estudiante que intente explicar coloquialmente, lo expuesto formalmente en el ítem anterior. Con esta etapa se generaría la comprensión desde el lenguaje coloquial. Esta etapa constituye la parte crucial del proceso de aprendizaje.

4. *Verificación:* En esta etapa el estudiante es instado por el docente a verificar por sí mismo la proposición a demostrar debiendo generar mínimamente dos ejemplos. Ejemplos que no deben ser elegidos aleatoriamente, sino teniendo en cuenta que deben cumplir lo planteado por las hipótesis de la proposición.

5. *Visualización:* En esta etapa, el estudiante nuevamente es instado por el docente, pero esta vez a visualizar la proposición a demostrar. La visualización puede ser una interpretación geométrica si así correspondiera, a través de un simple esquema, dibujo, figura a mano alzada o a través del software. La proposición podría no tener una interpretación geométrica, pero un esquema visual que muestre la secuencia de lo que expresa conceptualmente, puede contribuir notablemente a su comprensión.

6. *Simbolización:* Luego de la explicación coloquial, la verificación y la visualización, entonces debe retomarse la estructura formal de la proposición a demostrar. La comprensión de la expresión simbólica

de la proposición a demostrar ya tiene otra accesibilidad para el estudiante, penetrando de esta forma en el proceso de abstracción, imprescindible para llevar a cabo la prueba formal.

7**.** *Elementos vitales de la proposición:* En esta etapa el estudiante debe identificar la hipótesis de la proposición a demostrar; las hipótesis implícitas y la tesis.

8. *Contenidos implícitos de la proposición:* En esta etapa el estudiante deberá identificar que estructuras conceptuales están implícitas en la proposición a demostrar. Esto de alguna manera está incluido en la etapa anterior en las hipótesis implícitas.

9. *Abstracción:* En esta etapa, el docente guía al estudiante en la formulación de la clásica pregunta de abstracción postulada por Solow en su método regresivo–progresivo. Esta pregunta, en la exposición de la proposición a demostrar, debe ser formulada al grupo de estudiantes con el objetivo de generar discusión y planteos personales.

10. *Guía Secuenciada de la demostración:* Si la proposición a demostrar es en extremo constructiva y compleja de modo que el estudiante no pueda abordarla por sí mismo, es recomendable la presentación secuenciada y detallada de la misma como se detalla a continuación. Si la proposición no requiere de grandes artificios para la construcción de su prueba, es importante invitar al estudiante a llevarla a cabo por sí mismo, a través de una Guía Secuenciada de instrucciones que contemplen el paso a paso de la prueba en cuestión para, propiciar la construcción de esos razonamientos de forma autónoma. Esta Guía Secuenciada permitirá observar la demostración una vez realizada desde una perspectiva global hacia perspectivas más focalizadas, posibilitando la construcción de la prueba, generando aprendizajes comprensivos y significativos y no un conocimiento inerte sin interacción. Se recomienda que, si la proposición reviste complejidad, el docente la exponga detalladamente, y al finalizarla invite al estudiante a que intente reproducirla de forma aproximada con la Guía Secuenciada antes descripta, o bien que él mismo la genere, o también, que elabore una serie de preguntas relacionadas a la argumentación que conduce a la prueba. Esta serie de preguntas también podría ser un disparador inicial para el estudiante a los efectos de la construcción del razonamiento que constituye la prueba. La idea que subyace a esta Guía, es que el planteo de las pruebas no sea una instancia formal, sino que se integre a la práctica cotidiana. Es decir, que la práctica tradicional, no esté formada por clásicos ejercicios de aplicación de las estructuras conceptuales y las proposiciones asociadas a estas o simplemente aplicación de algoritmos sino, que la teoría se articule con la práctica de forma natural.

Por razones de espacio, se consideran a continuación algunos ejemplos que corresponden a la construcción de la Guía Secuenciada que es en definitiva el núcleo central de la ingeniería didáctica propuesta y que permite al estudiante una aproximación inicial a la construcción del proceso argumentativo.

1. ¿Cómo puede probarse que el cociente entre dos números complejos, expresado en forma polar, es otro número complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos y su argumento es la diferencia de los argumentos de los complejos dados?

Guía Secuenciada: Considerar que el cociente entre dos números complejos z y z’ arroja un cierto resultado (darle un nombre simbólico) y despejar luego z o z’ en función de los otros dos. Expresar ambos miembros de la igualdad planteada, en forma polar y luego de tener en cuenta la propiedad del producto de números complejos en forma polar. Considerar la definición de igualdad entre números complejos, correspondiente al formato polar. Aplicada la definición, deben despejarse los valores del módulo y el argumento del número complejo resultado del cociente al cual se le otorgó un nombre al comienzo de la prueba. Tener presente que tal definición debe considerarse particularmente para $k = 0$.

2. Si $f: [a, b] \to R$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces, cualesquiera sea $x \in (a, b)$: $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en (a, b). ¿Cómo puede demostrarse que la función de la hipótesis es estrictamente creciente si la función derivada primera es positiva?

Guía Secuenciada: Considerar la función de la hipótesis, y un subintervalo de la misma, que puede llamárselo, por ejemplo: $[x, y] \subset [a, b]$. Luego, aplicar a la función f el teorema del valor medio del Cálculo Diferencial en el subintervalo considerado, previa verificación del cumplimiento de las hipótesis del teorema citado. Posteriormente analizar el signo de la expresión obtenida y teniendo en cuenta la hipótesis sobre el signo de $f'(x)$ y la definición de función estrictamente creciente, se podrá arribar a la tesis.

Conclusiones

El estudiante cuando comienza a familiarizarse con la demostración, tiene dificultades para comprender la exposición del proceso deductivo y argumentativo de las proposiciones matemáticas que realiza el profesor en el aula. Sin embargo, es consciente acerca de lo requerido por este, cuando se le pide una demostración, comprendiendo que la verificación no es el proceso adecuado para establecerse como prueba, asimismo recurre a este, probablemente debido al hecho que en la cotidianeidad y en las ciencias experimentales la verificación es el método de prueba usual y no está habituado a la abstracción que caracteriza este tipo de procesos matemáticos. Se trata de una reacción muy general, cuando el estudiante no puede llevar a cabo una prueba o no se le ocurre como generarla. En el marco teórico se citaron algunos de los muchos trabajos acerca de los modos de demostrar del estudiante, basados exclusivamente en demostraciones geométricas, ya que la visualización contribuye notablemente a la tarea de este tipo de pruebas, enfocándose el problema de la demostración sobre esta rama de la matemática. También se citaron algunos que, de modo general, pergeñaron acciones que permiten facilitar el proceso demostrativo. En congresos y en visitas a diferentes universidades, a través de la conversación con profesores y estudiantes cuando se les pregunta específicamente a los docentes acerca de su actitud con los estudiantes frente la demostración, muchos llegan a decir que es una empresa imposible, por ende, admiten que debilitan y hasta anulan el proceso deductivo en el aula.

La ingeniería didáctica presentada se propone que el estudiante genere una actitud reflexiva frente a la instancia del proceso demostrativo. La etapa correspondiente a la Guía Secuenciada, es una alternativa interesante que permite conducirlo hacia este objetivo, pero también es una 'muletilla' que con el tiempo debe ser dejada para poder permitir un desarrollo mental autónomo. Que el estudiante de Ciencias Naturales e Ingeniería realice demostraciones en los cursos de Matemática obligatorios en su currículum es muy importante ya que constituyen el 'embrión' de las reflexiones y razones que deberán hacer uso en su futuro desempeño profesional de acuerdo a la carrera de grado elegida. Pero estas demostraciones para que realmente jueguen un papel efectivo deben dejar de tener un carácter eminentemente ritual y jugar un rol central configurando un aprendizaje significativo.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1998). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. *Colombia. Una empresa docente.*

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Una empresa docente. Bogotá: Universidad de Los Andes.

Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1), 23 – 40.

Bravo Estévez, L. y Arrieta, J. (2003). *Una estrategia didáctica para la enseñanza de las demostraciones geométricas: resultados de su implementación*. VII Simposio de la Sociedad española de investigación en educación Matemática, pp.153-160.

D´Andrea, R.E.; Curia, L.; Lavalle, A. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios.* Alemania: Editorial Académica Española.

Douady, R. (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. En Barbin, E., Douady, R. (Eds.). *Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas.* Francia. Topiques éditions. Publicación del I.R.E.M.

Harel, G & Sowder, L. (1998). Students´Proof Schemes:Results from Exploratory Studies. En A.H.Schoenfeld, J.Kaput, E.Dubinsky. (Eds.) *Research in Collegiate mathematics education III* (pp.243-283) American Mathematical Society: Providence, EE.UU.

Leron, U. (1983). Structuring Mathematical Proofs Author(s). *The American Mathematical Monthly*, 90, 3. pp. 174 – 185.

Solow, D. (1992). *Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas.* México: Limusa. Noriega Editores.