

# Los problemas descriptivos de fracciones en los “Solucionarios” de Bruño y Dalmau\*

*Bernardo Gómez Alfonso\*\* Luis Puig\*\*\**

## RESUMEN

En este trabajo se hace una aproximación global al estudio de las colecciones de problemas descriptivos de fracciones (PDF) recogidas en los “Solucionarios” de las editoriales Dalmau y Bruño. Se trata de un estudio exploratorio y descriptivo cuyo objetivo es identificar los estereotipos y la forma en que se organizan estos problemas en dos textos, de gran influencia en el siglo XX, que fueron escritos como libros de ayuda para el maestro.

**Palabras clave:** historia y educación matemática, análisis de textos, problemas descriptivos de fracciones, estereotipos.

## El problema de investigación

Investigaciones en Educación matemática sobre las fracciones muestran que es uno de los contenidos matemáticos más difíciles de enseñar (Kieren, 1988; Berh, Lesh, Post y Silver, 1983; Figueras, 1988; Castro, Pitta-Pantazi, Rico y Gómez, 2016) y a la vez es un buen predictor para el buen desempeño de las matemáticas superiores, por ejemplo del álgebra (Siegler et al., 2012).

En un reciente estudio, Nicolou y Pitta-Pantazi (2015) consideraron que la comprensión de las fracciones se sustenta en siete habilidades<sup>1</sup> una de las cuales es la reflexión durante el proceso de resolución de problemas. La importancia de esta habilidad en la educación obligatoria implica que los profesores han de tener ideas claras acerca de qué problemas de fracciones son los que deben enseñar y en qué orden. Una manera de clarificar estas ideas es ocuparse de los problemas de fracciones que la tradición escolar ha venido enseñando y de cómo lo ha hecho.

---

\*Este trabajo ha contado con el apoyo de los proyectos concedidos por el Ministerio de Educación de España (EDU2015-69731-R, MINECO/FEDER) y la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport de la Generalitat Valenciana (GVPROMETEO2016-143).

\*\*U. València Estudi General (UEVG) (España), e-mail: [bernardo.gomez@uv.es](mailto:bernardo.gomez@uv.es).

\*\*\*U. València Estudi General (UEVG) (España), e-mail: [luis.puig@uv.es](mailto:luis.puig@uv.es).

<sup>1</sup>Fraction recognition, definitions and mathematical explanations for fractions, argumentations and justifications about fractions, relative magnitude of fractions, representations of fractions, connections of fractions with decimals, percentages and division, reflection during the solution of fraction problems.

En la tradición de enseñanza de las matemáticas hay una amplia variedad de problemas aritméticos verbales con fracciones que en su enunciado se describe una situación o narran una historieta pseudorealista que no pretende dar respuesta a ninguna cuestión práctica, sino a ejercitar el ingenio, el razonamiento y la curiosidad matemática. Tal vez, por eso a muchos de estos problemas se les ha llamado problemas de matemáticas recreativas.

Los antecedentes de estos problemas se remontan a las antiguas culturas matemáticas y desde entonces han sido parte esencial del contenido de los libros de aritmética y más recientemente del álgebra elemental.

Sus enunciados han evolucionado a lo largo del tiempo, adaptándose a los cambios sociales y pedagógicos, pero al haber conservado su contenido y estructura se han estandarizado bajo una determinada forma que sirve de modelo, problema tipo o estereotipo y que los hace fácilmente reconocibles.

Para referirse a estos problemas se usan denominaciones que hacen mención al contexto o acción principal descrita en el enunciado. Así, por ejemplo, en la cronología de los problemas recreativos de Singmaster (1996), se encuentran entre otros los siguientes nombres:

*Grifos que llenan cisternas; el sumiller infiel; los gemelos póstumos; herederos que reciben  $n + \frac{1}{k}$  del resto de la cantidad total y todos reciben el mismo dinero; etc.*

Otros nombres populares que aparecen en la literatura son, por ejemplo:

*El epitafio de Diofanto; ¿qué hora es?; el caminante que encuentra un grupo o la edad del joven; hombres que construyen una casa; etc.*

Ahora bien, a diferencia de lo que ha ocurrido con los problemas aditivos y multiplicativos con números enteros, a fecha de hoy, no se dispone de una clasificación de los problemas de fracciones suficientemente aceptada por la comunidad científica.

Esto impide tener una visión global o totalizadora de los mismos que sea metodológicamente útil para la enseñanza y para la investigación educativa.

Esta carencia plantea problema de investigación que, a los efectos del presente trabajo, delimitamos en las dos siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los estereotipos de los problemas descriptivos de fracciones que se han utilizado para configurar la enseñanza actual en los libros de textos y manuales escolares?
- ¿Cómo se han organizado para su enseñanza (selección, clasificación y/o agrupación, método, finalidad, etc.) en los libros de texto?

## Marco teórico y metodología

El presente estudio es exploratorio ya que no pretende confirmar ningún supuesto o hipótesis sino describir una organización de un contenido de enseñanza.

La metodología en que se sustenta es la del análisis histórico epistemológico ya que se indaga cómo se ha configurado un contenido de enseñanza en un momento determinado de

la historia, estudiando su presencia en diferentes libros de texto históricos, al ser estos las únicas fuentes y registros documentales disponibles (Gómez, 2003, 2011).

Para este análisis se requiere un enfoque de aproximación global que permita comparar varios textos entre sí, ya que el enfoque tradicional de estudiar textos aisladamente es insuficiente en la medida que tiende a desconsiderar las raíces y fuentes de las concepciones vertidas en el texto, su contexto social y cultural, y las particularidades propias del sistema educativo (Schubring, 1987).

El contenido concreto del estudio son los problemas descriptivos de fracciones (en adelante PDF) y las unidades de análisis que se han elegido son sus estereotipos y su organización.

Para identificar los estereotipos de los PDF se hace uso de las colecciones de problemas que nos ha legado la tradición de enseñanza desde los antiguos textos de la matemática china, hindú y árabe.

Para describir cómo se han organizado los PDF en los libros de texto que han contribuido a modelar la enseñanza actual de los problemas de fracciones, se comparan dos colecciones de problemas múltiples veces reeditadas en el siglo XX: los *Solucionarios* de Dalmau y de Bruño, que fueron escritos específicamente como libros de ayuda para el maestro. El criterio seguido para la comparación ha consistido el de rastrear semejanzas y diferencias en la selección y organización de los estereotipos de los PDF de ambos libros.

## **El contexto social y cultural de los libros de texto objeto de estudio**

En la primera mitad del siglo XIX se produce un cambio de perspectiva en relación con el contenido de los libros de texto que institucionaliza el concepto de manual escolar.

Se entiende como tal un libro de contenido específico que pretende dar respuesta a varios fenómenos principales: 1) la consolidación del sistema general y público de enseñanza; 2) garantizar la formación y actualización disciplinar de los profesores; 3) guiarles en su trabajo diario; 4) la implantación del sistema métrico decimal y consiguiente reducción del contenido de los textos de aritmética; 5) los requerimientos del modelo de enseñanza simultánea frente al individual, donde un grupo de alumnos recibe la misma lección al mismo tiempo y el maestro al corregir a uno, corrige a todos, para lo cual es necesario que todos los estudiantes tengan el mismo manual de trabajo (Sierra, Rico y Gómez, 1997).

Al reducirse los extensos capítulos dedicados a los distintos sistemas monetarios y de medida, gracias al papel unificador del S. M. D., se redujo y simplificó el contenido de los libros de texto, lo que permitió, entre otras cosas, la introducción del álgebra elemental en edades más tempranas de lo que era habitual, y por añadidura, la incorporación del lenguaje horizontal y de paréntesis del álgebra a la aritmética, con el consiguiente aumento de la brevedad y pérdida de retórica (Sierra, Rico y Gómez, 1997, pgs. 382 y 386). Esto hizo que los problemas aritméticos se vieran desde una nueva perspectiva: los problemas ya no son aritméticos per se, sino que son aritmético-algebraicos, según sea el método que se use para resolverlos, y en consecuencia será posible ubicarlos tanto en los capítulos de

aritmética como de álgebra elemental. Pero, atención, se advertía que el método algebraico es muy cómodo, pero no suple el razonamiento y la inteligencia ejercitada con el método aritmético (F.G.M. 1908, p. IX)<sup>2</sup>.

La necesidad de facilitar la divulgación de los manuales escolares fue el punto de partida de sociedades o compañías mercantiles centradas en su edición y, también, en otros materiales didácticos y pedagógicos auxiliares, con una red de distribución y puntos de venta. Estas sociedades rompieron con el formato, diseño e iconografía de los libros de autor de las épocas precedentes y se configuraron como un producto editorial con criterios empresariales y un sistema de comercialización específico.

Dos ejemplos de editoriales de gran influencia a lo largo del siglo XX fueron las conocidas como Bruño y Dalmau. De dos de sus “solucionarios” nos ocupamos a continuación.

### Los Solucionarios de las editoriales Bruño y Dalmau

Los “solucionarios” son colecciones de problemas resueltos que se publicaron como libros de ayuda al maestro. Dos ejemplos de ello son los que publicaron las editoriales Bruño y Dalmau.

Bruño es la obra de un colectivo, se trata del nombre de la editorial de los Hermanos de los escuelas cristianas de la Salle, institución fundada por *Juan Bautista de La Salle* en 1682. Los manuales publicados por esta editorial no eran firmados por su autor, sino por *G.M. Bruño*, que es la castellanización de *Edmond Brunhes* (1838-1916), nombre civil del Hermano *Gabriel Marie*, que fue Superior general de la orden de 1897-1913<sup>3</sup>.

Dalmau es la obra de una persona, se trata del apellido de un maestro de primaria catalán *Josep Dalmau Carles* (1857-1928), fundador de la librería *Dalmau & Company* para la distribución y venta de sus libros. Con el tiempo, se convirtió en la sociedad *Dalmau Carles & Cía*, *Dalmau Carles, Pla & Cia* y *Dalmau Carles, Pla, S. A*, ampliando el negocio con la edición de material de enseñanza.

La primera editorial está ligada a una institución religiosa y por tanto responde a los requerimientos y las demandas de esa institución, lo que se refleja en el hecho de que sus textos se modelaban en su contenido y estructura a partir de los textos que ya existían en la institución particular, de los que toman prestado o directamente copian.

La segunda es de carácter laico, está ligada al carácter emprendedor de una persona, que intenta dar respuesta a una demanda social, a través de un programa innovador, moderno y progresista para la época desde el punto de vista pedagógico.

El *Solucionario* de Bruño es un libro de 536 páginas que lleva por título *Tratado teórico-práctico de Aritmética razonada. Curso superior. Solucionario*. Contiene 1719 problemas resueltos que se corresponden exactamente en enunciado y número con los del libro *Tratado Teórico-Práctico de Aritmética Razonada. Curso Superior. Libro del alumno*. La

<sup>2</sup>Edición francesa de la editorial precedente de la editorial conocida en España como Bruño.

<sup>3</sup>Cuando un Hermano de las Escuelas Cristianas escribía un libro, su nombre no se mencionaba, en cambio se ponían las iniciales del superior general.

edición que hemos estudiado es la segunda (no consta el año de edición, aunque se puede situar en torno a 1940 ya que la primera edición es de 1932).

El *Solucionario* de Dalmau fue publicado por primera vez en 1898, bajo el nombre de *Soluciones analíticas. Libro del maestro*, el “solucionario” de Dalmau es un libro de 582 páginas conteniendo las respuestas de más de 5000 problemas y ejercicios, que se correspondían exactamente en su enunciado con los de la *Aritmética razonada y nociones de álgebra. Libro del alumno. Grado profesional*. Texto que recoge también y amplía los problemas que llevan las *Lecciones de aritmética* y el *Resumen de las lecciones de aritmética*. La edición que hemos estudiado es la de 1943.

En ambos textos hay una selección de PDF. En la siguiente sección se aborda su análisis.

## Análisis comparado de los textos

### Los estereotipos de PDF en el Solucionario de Bruño

Bajo el epígrafe “ejercicios sobre los quebrados” se presentan 280 problemas distribuidos en seis apartados:

I. Ejercicios escritos, II. Ejercicios orales, III. Fracciones decimales, IV. Operaciones con los quebrados, V. Fracciones decimales (reducción), VI. Problemas sobre los quebrados. Este último, consta de cuatro bloques:

- I. Sobre la teoría de quebrados (22 problemas).
- II. Grifos y trabajadores (20 problemas).
- III. Fracciones de fracciones (12 problemas).
- IV. Relación de partes (21 problemas).

Se cierra el apartado con una miscelánea de 37 problemas variados de “repaso”. Se encuentran también 4 PDF en el apartado de “repartimientos proporcionales” y 2 en el de “falsa posición”. Al final del libro hay un capítulo de repaso general donde también se repiten algunos estereotipos.

Ejemplos de problemas de cada uno de los tres últimos bloques del apartado 6 son los siguientes:

1. Grifos y trabajadores. Aquí se incluyen dos tipos de problemas de “acciones simultáneas”, los de trabajos en conjunto y los de cisternas que se llenan o/y vacían.
  - Grifos (10 prbs.)<sup>4</sup>.
 

*Un grifo llena un depósito en 4 horas y otro lo vacía en 5 horas. ¿En cuánto tiempo se llenará el depósito si se abren ambos grifos a la vez?* (p. 119, n.º 584).
  - Trabajadores (10 prbs.).

---

<sup>4</sup>En adelante usaremos el par (n.º prbs.) para indicar el número de problemas.

*Un obrero haría un trabajo en 2 días al paso que otro emplearía 4 días. Si ambos trabajan juntos, ¿cuánto tiempo emplearán en hacer el trabajo?* (p. 115, n.º 576).

Rastros de estos problemas que corresponden a “acciones simultáneas” se encuentran, por ejemplo, en la *Antología griega* (s. V) y en el *Liber abaci* (1202). Por ejemplo:

*Soy un león de bronce; dos chorros salen de mis ojos, otro de mi garganta, otro de mi pie. En dos días, mi ojo derecho llena la cisterna, mi ojo izquierdo en tres, y mi pie en cuatro días. Para llenarla en seis horas basta con mi garganta. Si todos los chorros, de mis ojos, de mi garganta y de mi pie, vierten a la vez, ¿en cuántas horas se llenará la cisterna?* (Jacobs, 1863, pg. 42).

*Un león se come un cordero en 4 horas, un leopardo en 5 horas, y un oso en 6 horas. Se pide, si se les tira un cordero en cuántas horas lo devorarán (juntos)* (Fibonacci, 1202, p. 182).

2. Fracción de fracción. Se incluyen aquí los problemas que corresponden a “acciones opuestas” y a “fracción de la fracción complementaria”.

■ Acciones opuestas (8 prbs.).

Bolas que caen y se elevan. *Una bola elástica cae al suelo y se eleva cada vez a la  $1/2$  de la altura anterior; después de haber botado 3 veces, la última se ha elevado 1 metro. ¿De qué altura ha caído?* (p. 124, n.º 596).

Agua y vino. *Se tiene un litro de vino en una botella y se bebe la  $1/2$ , que se reemplaza por agua; se bebe la  $1/2$  del vino con agua y vuelve a llenarse la botella con agua. Se hace lo mismo por tercera vez. ¿Qué cantidad de vino queda en la botella?* (p. 125, n.º 598).

■ Fracción de la fracción complementaria (4 prbs.).

*Un tendero ha vendido los  $\frac{2}{5}$  de un cesto de naranjas, luego los  $\frac{1}{2}$  del resto y finalmente los  $\frac{2}{3}$  del nuevo resto. Si entonces tiene 15 naranjas, ¿cuántas tenía al principio?* (p. 127, n.º 604).

Problemas de “acciones opuestas” se encuentran, por ejemplo, en Bahksali (s. III) y de “fracción de la fracción complementaria” en el Lilavati (1150).

*Un viajero va en un viaje de 4 “gavyutis” y lleva con él 4 “prasthas” de vino. Tras cada “gavyuti” se bebe 1 “prastha” y después rellena su botella con agua. ¿Cuánto vino y cuánta agua le quedará al final de su viaje?* (Svami Satya Prakash Sarasvati & Jyotishwati, 1979, p. 95).

*Un enamorado regaló a su prometida algunas perlas para hacerse adornos. Ella usó un octavo del total en un adorno para su frente; empleó tres séptimos del resto para un collar; la mitad del resto la empleó para hacerse pulseras; tres cuartos del resto de las perlas, como si fueran campanitas, fueron usadas para un cinturón. Finalmente, colocó 16 perlas en una corona. Encuentra rápidamente el número total de perlas* (Phadke, Patwardhan, Nainpally & Singh 2006, pgs. 60-61, n.º 6A).

3. Relación de partes. Se incluyen aquí tres tipos principales de problemas: “fracciones que son fracción de otra”, “repartos diversos” y “cantidades que se manipulan aritméticamente”.

- Una es fracción de otra (6 prbs.).

*Dos personas tienen juntas 100 ptas. La  $\frac{1}{2}$  de la 1.<sup>a</sup> vale el  $\frac{1}{3}$  de la 2.<sup>a</sup>. ¿Cuánto tiene cada una?* (p. 129, n.º 608).

- Repartos diversos (7 prbs.). Se incluyen aquí diversos tipos de reparto desigual y de reparto equitativo: suma de fracciones y el complemento de la suma es cantidad entera (2 prbs.).

*Se tiene una partida de mineral y se venden los  $\frac{2}{5}$  a 42 pesetas el quintal métrico; los  $\frac{4}{9}$  a 48 ptas. el quintal métrico, y lo restante, que es de 21 quintales métricos, en 945 ptas. Hállese cuánto se sacó de la venta* (pgs. 135-136, n.º 622).

*Cada uno recibe  $n \pm \frac{1}{n}$  de la cantidad total (4 prbs.). Un niño tenía cierto número de naranjas, las cuales distribuye de la siguiente manera, sin partir ninguna. Da a uno de sus compañeros  $\frac{1}{4}$  del número total menos  $\frac{1}{4}$  de naranja; a otro le da dos naranjas, y se guarda para sí la  $\frac{1}{2}$  del número total más media naranja. ¿Cuántas naranjas tenía?* (p. 133, n.º 618).

- Cantidad que se manipula aritméticamente hasta obtener otra conocida (1 prb.).

*Habiendo preguntado a un pastor cuántas ovejas tenía, respondió: La  $\frac{1}{2}$  más el  $\frac{1}{3}$ , el  $\frac{1}{6}$  y los  $\frac{6}{7}$  son iguales a 468. ¿Cuántas ovejas tenía?* (p. 61, n.º 260).

Como ocurre con los anteriores tipos hay rastros de estos problemas en la literatura antigua. Por ejemplo, en Aurel (1552), en el *Lilavati* (1150), en Ventallol (1521) y en el *Liber Abaci* (1202). Los ejemplos siguientes ilustran estos rastros en el mismo orden citado.

*Tres quieren partir 100 ducados, los que vienen al primero son tantos como los  $\frac{2}{5}$  de los del segundo; y partiendo los del tercero por los del primero vendrá en la partición  $4\frac{5}{6}$ . Demando, cuantos ducados vienen a cada uno?* (Aurel 1552, fo 102v. n.º 88).

*Las flores de loto. De un montón de flores de loto, una tercera parte, una quinta, y una sexta se ofrecieron a Siva, Vishnu y al Sol respectivamente, y arto al dios Parvatis; las 6 flores restantes se dieron al gurú. Dime, rápido, el número total de flores* (Phadke, Patwardhan, Naimpally & Singh 2006, pgs. 57-58, n.º 3).

*Un hombre ha entrado en un huerto a coger rosas, y a la entrada hay tres puertas, y él ha de dar al que guarda la primera puerta la  $\frac{1}{2}$  de todas las rosas que había cogido y media más sin romper ninguna; a la segunda puerta ha de dar los  $\frac{2}{3}$  de las rosas que le habían quedado y  $\frac{2}{3}$  más sin romper ninguna, y a la tercera puerta ha de dar los  $\frac{3}{4}$  de las rosas que le habían quedado y  $\frac{3}{4}$  de rosa más sin quebrar ninguna, y quiere, que le sobren 2 rosas. Pregunto, ¿cuántas rosas ha de coger?* (Tolra, 1619, n.º 471).

*Un joven vivió un cierto tiempo. Si viviera tanto como ha vivido y otro tanto, y  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{1}{4}$  de lo que ha vivido, y un año más, tendría 100 años. Se pide cuántos años ha vivido* (Fibonacci, 2002, n.º 273).

Entre los PDF que hay en los apartados “repartimientos proporcionales” y “falsa posición”, se encuentra una variante el clásico “los gemelos póstumos”.

- Reparto proporcional.

*En la puerta de una iglesia se encuentran habitualmente dos mendigos, a saber: una pobre todos los días y alternando un ciego y un cojo. Una persona caritativa manda a su criada con 52 céntimos y le dice: «Si encuentras a la pobre y al ciego, darás a éste los  $\frac{3}{4}$  de la suma y  $\frac{1}{4}$  a la mujer; pero si está allí el cojo, no le darás más que el  $\frac{1}{4}$  de la suma y los  $\frac{3}{4}$  a la mujer.» Por casualidad aquel día están los tres mendigos a la puerta de la iglesia. ¿Cuánto dará a cada uno según la mente de su señora? (p. 308, n.º 1180).*

La versión que aparece en Alcuino (735-804) de este problema es la siguiente:

*Al morir un padre dejó una esposa embarazada y 960 bezantes de su hacienda. Dispuso que si la mujer tuviera un hijo éste debería recibir tres cuartos de la herencia, es decir, nueve doceavos, y la madre un cuarto, es decir, tres doceavos. Sin embargo, si naciera una hija, ella debería recibir siete doceavos, y la madre, cinco doceavos. Pero como ocurrió que dio a luz a gemelos, ambos un niño y una chica. Hubo que solucionar el reparto como se pudo. ¿Cuánto debería recibir la madre, el hijo y la hija? (Burkholder, 1993, proposición 35).*

## El “solucionario” de Dalmau

Bajo el epígrafe “Ejercicios y problemas sobre los quebrados comunes” se presentan 111 problemas divididos en 6 apartados, sin ningún otro epígrafe que indique cuál es el contenido de cada uno de ellos.

Los dos primeros llevan 43 ejercicios y los cuatro siguientes llevan 68 problemas verbales de suma, resta, multiplicación y división de fracciones respectivamente.

En el último de estos apartados se incluyen cinco problemas de grifos y trabajos simultáneos y uno de “relación de partes”.

Al igual que en el solucionario de Bruño, el bloque se cierra con una miscelánea de 100 ejercicios de “recapitulación” donde se entremezclan problemas con toda clase de números: naturales, fracciones y decimales. En esta miscelánea se incluyen 16 PDF.

También aparecen PDF en los apartados de “reparto proporcional” (4 problemas) y “falsa posición” (8 problemas).

Ejemplos de problemas de cada uno de los estereotipos que incluye Dalmau, agrupados según los criterios usados en Bruño, son los siguientes:

### 1. Acciones simultáneas.

- Trabajos en conjunto.

*Un obrero hace cierto trabajo en 3 días, y otro, en 4 días. ¿Qué fracción de dicho trabajo harán juntos en  $\frac{3}{5}$  de día? (p. 154, n.º 103).*

- Grifos.

*Una espita llena cierto depósito en 9 horas, y un orificio lo vacía en 12 horas. Mandando a la vez la espita y el orificio, ¿en cuánto tiempo se llenará el mencionado depósito? (p. 155, n.º 109).*

## 2. Fracción de fracción

- Acciones opuestas.

*Un vaso lleno de agua contiene 1 kg. de sal en disolución. Se derrama  $\frac{1}{5}$  del contenido, y se llena de agua; se derrama  $\frac{1}{3}$  del contenido, y se vuelve a llenar de agua; por último, se derrama la 172 del contenido. Después de estas tres operaciones, ¿qué cantidad de sal queda disuelta en el vaso? (p. 163, n.º 47).*

- Fracción de la fracción complementaria.

*Se ha comprado una partida de vino del modo siguiente: los  $\frac{2}{5}$  a 40 ptas. el Hl.; los  $\frac{4}{9}$  del sobrante, a 38,25 ptas. el Hl., y el resto, que son 80 Dl., a 35 ptas. el Hl. Se pregunta: 1.º, cuántos litros componían la partida; 2.º cuánto ha desembolsado el comprador (p. 176, n.º 90).*

## 3. Relación de partes.

- Una es fracción de la otra.

*Repártanse 180 ptas. entre dos personas, de modo que la parte de la primera sea los  $\frac{4}{5}$  de la parte de la segunda (p. 254, n.º 18).*

- Repartos diversos.

*Cierto propietario poseía una vasta extensión de terreno de cultivo, distribuida de la siguiente manera: la  $\frac{1}{2}$ , en la siembra de trigo;  $\frac{1}{8}$ , en la siembra de cañamo; la quinta parte en la de maíz, y el resto, 35 áreas, en la siembra de cebada y mijo. Averigüese el número de áreas que medía el terreno de referencia (p. 173, n.º 80).*

- Cantidad que se manipula aritméticamente.

*Preguntaron a un matemático qué edad tenía, y respondió: «Si aumentáis el duplo de mis años en la  $\frac{1}{2}$ , el  $\frac{1}{4}$  y el  $\frac{1}{8}$  de los mismos, tendréis 1 siglo y 15 años más.» ¿Qué edad tenía? (p. 173, n.º 79).*

## Síntesis y conclusiones

No se percibe ninguna diferencia sustancial entre ambas colecciones atribuible al carácter laico o religioso de la editorial. Esto es, la selección de los PDF en ambos textos no está mediatizada por la ideología de los autores, como cabe esperar al tratarse de un libro de problemas.

En el listado de PDFs que incluyen ambos libros se encuentran problemas que el autor hace servir como problema modelo o estereotipo. Estos problemas se acompañan de otros problemas que se resuelven de modo similar, al modo de ejercicio y práctica, aunque varían en los datos, contexto, acciones o agentes.

La fuente de donde toman estos problemas es incierta ya que el autor se apropia de ellos como en una especie de propiedad común que no tiene derechos de autor, por lo que

no cita qué parte del texto es original o de producción propia y cuál se ha tomado o copiado de otro autor.

Se aprecian diferencias en cuanto a la forma de organizar los problemas, con criterios explícitos en Bruño: *grifos y trabajadores, fracción de fracción, relación de partes*, y no explícitos en Dalmau.

Hay pocas diferencias entre los estereotipos de problemas que incluyen Dalmau y Bruño. A destacar el énfasis en los problemas de *cantidades que se manipulan aritméticamente* en Dalmau frente al énfasis en los problemas de *fracción de fracción* en Bruño.

Desde el punto de vista pedagógico, ambos textos presentan los problemas con enunciados actualizados o personalizados, tal vez para adecuarlos al lenguaje y contexto social de la época.

Los problemas aparecen graduados en cuanto a su complejidad (número de etapas y tipo de números) y hacen uso de una reiteración de los problemas que apuntan a una concepción del aprendizaje basada en el ejercicio y la práctica reforzada en el “repasso o recapitulación”.

## Referencias

- Aurel, M. (1552). *Libro primero, de arithmetica algebratica*. Valencia: En casa de Ioan de Mey.
- Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-125). New York, NY: Academic Press.
- Bruño (s.f.). *Tratado teórico práctico de aritmética razonada. Curso superior. Segunda edición. Solucionario*. Madrid, Barcelona, Valladolid: Ediciones Bruño.
- Burkholder, P. (Trad.) (1993). Alcuin of York's *Propositiones ad acuendos juvenes*: Introduction, Commentary & Translation, *History of Science & Technology. (HOST) Bulletin, 1(2)*. <http://www.math.muni.cz/~sisma/alcuin/anglicky1.pdf>.
- Castro-Rodríguez, E., Pitta-Pantazi, D., Rico, L. y Gómez, P. (2016). Prospective teachers' understanding of the multiplicative part-whole relationship of fraction. *Educational Studies in Mathematics, 92(1)*, 129-146.
- Dalmau, J. (1943). *Soluciones analíticas. Nueva edición corregida y aumentada. Libro del maestro*. Gerona: Dalmau Carles Pla, S. A.
- F. G. M. (1908). *Cours de mathématiques élémentaires. Exercices d'arithmétique*. Tours: Maison Mame & Fils. Paris: Vve. Ch. Poussielgue.
- Fibonacci, L. (1202). Liber Abacci. En L. E. Sigler, *Fibonacci's Liber Abaci A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York: Springer. 2002
- Figueras, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales* (Unpublished doctoral dissertation). Cinvestav, Mexico.

- Gómez, B. (2003) La investigación histórica en didáctica de las matemáticas. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos A. (eds.), *Proc. VII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM): Investigación en Educación Matemática* (pp. 79-85). Granada: U. de Granada.
- Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA*, 5(2), 49-65.
- Gómez, B. (2016). Problemas descriptivos y pensamiento numérico: el caso de las cien aves de corral. *PNA*, 10(3), 218-241.
- Jacobs, F. (Ed., trad.) (1863). *Anthologie Grecque. Traduite sur le texte publié d'après le manuscrit par Fr. Jacobs avec des notices biographiques et littéraires sur les poètes de l'anthologie*. Tome second. Paris: Hachette.
- Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers-Its intuitive and formal development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Numbers concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Phadke, N. H., Patwardhan, K. S., Naimpally, S. A. y Singh, S. L. (Trad.) (2006). *Līlāvātī of Bhāskara-cārya: A treatise of mathematics of vedic tradition: with rationale in terms of modern mathematics largely based on N.H. Phadke's Marāthī translation of Līlāvātī*. Delhi: Motilal Banarsidass (1.<sup>a</sup> ed. 2001).
- Pitta-Pantazi D. y Nicolaou, A. (2015). The impact of a teaching intervention on sixth grade students' fraction understanding and their performance in seven abilities that constitute fraction understanding. En Konrad Krainer y Nada Vondrova (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 9* (pp. 309-315). Prague, Czech Republic.
- Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 41-51.
- Siegler, R. et al. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science*, 23(7), 691-697.
- Sierra, M., Rico, L. y Gómez, B. (1997). El número y la forma. Libros impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría. En A. Escolano (Ed.), *Historia ilustrada del libro escolar en España*, Vol. 2, (pp. 373-398). Madrid: Fundación G. S. Ruipérez.
- Svami Satya Prakash Sarasvati y Usha Jyotishwati (1979). *The Bakhshali Manuscript an Ancient Treatise of Arithmetic*. Allahabab: Arvind Printers.
- Tolra, J. B. (1619). *Arismetica de Ivan Ventallol. Traduzida de lengua catalana en castellana por el doctor Juan Batista Tolra. Va añadido un tratado del arte mayor llamada álgebra o regla de la cosa, compuesta por el mismo doctor Tolra*. Tarragona: Gabriel Roberto.
- Ventallol, J. (1521). *Pràctica mercantívol*. Lió: Joan de la Place.