Reflexiones sobre el concepto de Área

CARLOS JULIO LUQUE ARIAS
caluque@pedagogica.edu.co
LYDA CONSTANZA MORA MENDIETA
lmendieta@pedagogica.edu.co
JOHANA ANDREA TORRES
jotorres@pedagogica.edu.co

PROFESORES DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

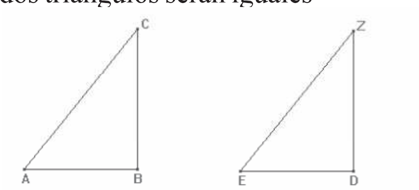
Con base en observaciones y conversaciones con profesores de educación básica y secundaria y en la revisión de algunos textos escolares hemos notado que el concepto de área de la geometría euclidiana se presenta habitualmente de manera incompleta, cuando no de forma errónea, limitándose en muchos casos a la presentación o consecución de fórmulas para el cálculo de áreas sin reparar en su significado, por ejemplo en unos textos se hace sólo una presentación intuitiva, en otros la unidad de medida es única, o debe caber un número natural de veces, o debe ser una figura que tesela el plano.

En los ***Elementos de Euclides*** se introduce los conceptos de:

Igualdad de figuras planas rectilíneas en términos de congruencia, en la proposición.

I – 4

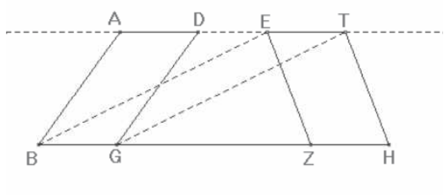
Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a dos lados del otro e iguales los ángulos comprendidos por los lados iguales, tendrán iguales sus bases y los dos triángulos serán iguales



Y de igualdad de figuras planas rectilíneas en términos de áreas, en la proposición

I – 36

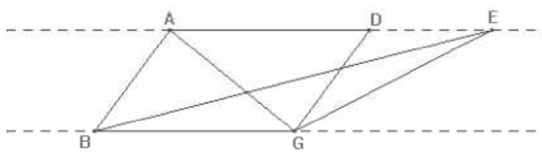
Los paralelogramos colocados sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son equivalentes.



Seguidamente se hace una construcción de paralelogramos iguales a otras figuras planas rectilíneas, en la proposición

I – 41

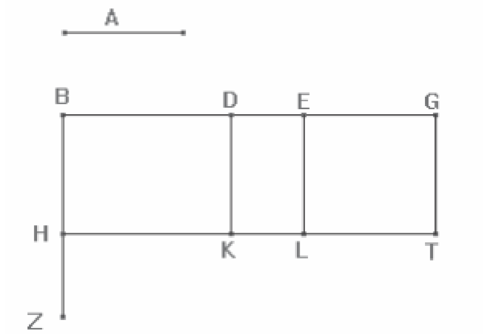
Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y están colocados entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo.



Luego se descomponen figuras rectilíneas planas en otras figuras rectilíneas planas, usando la proposición

II – 1 Propiedad Distributiva

Si una de dos rectas se divide en un número cualquiera de partes, el rectángulo comprendido por dichas rectas equivale a los rectángulos comprendidos por la no dividida y por cada una de las parciales.



Y luego se escribe un área como suma de otras dos, en la proposición

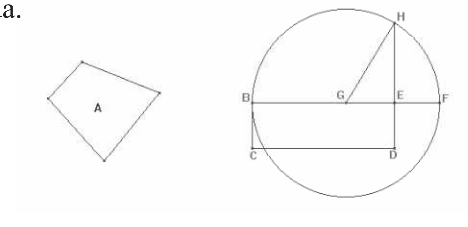
I – 47 Teorema de Pitágoras

En los triángulos rectángulos el cuadrado sobre el lado opuesto al ángulo recto es equivalente a los cuadrados sobre los lados que forman ese ángulo recto.

Seguidamente se hace cuadraturas de figuras planas rectilíneas usando la proposición

II – 14

Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada.

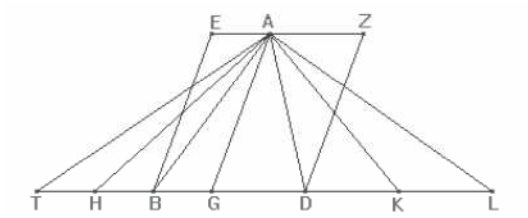


Con esto se reduce el problema de calcular el área de una figura plana, al de construir un cuadrado equivalente a ella.

En la proposición

VI – 1

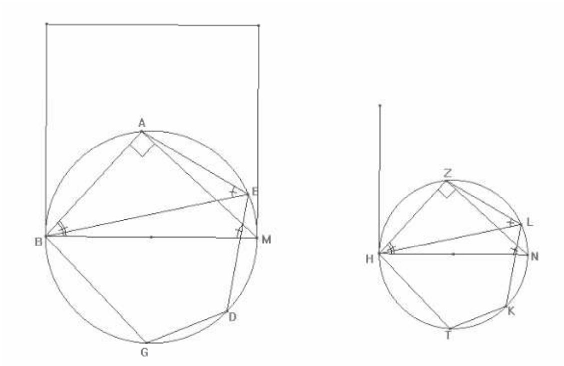
Los triángulos y paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.



Se introduce la proporcionalidad de áreas, lo que amplia el espectro de áreas calculables a polígonos cualesquiera, que se desarrolla en la proposición

XII – 1

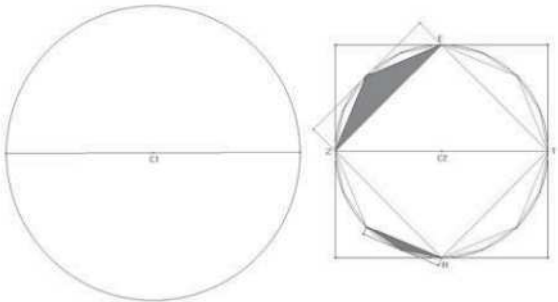
Los polígonos semejantes inscritos en círculos son entre sí como el cuadrado de los diámetros.



Paso preliminar para el cálculo del área del círculo con el uso de una nueva herramienta, que es el principio de exhaución, en la proposición

XII – 2

Los círculos son entre sí como el cuadrado de sus diámetros.



Como vemos el concepto de área en Euclides no requiere el uso de números ni de fórmulas, pero si enfatiza en el concepto de área como la equivalencia de figuras que tienen igual descomposición en figuras congruentes; permitiendo en el aula un desarrollo más dinámico y el uso de herramientas tecnológicas como los programas *Cabri Géomètre II* o *Regla y Compás.*

El concepto de área en los *Fundamentos de la Geometría de Hilbert*

Otra aproximación al concepto de área puede hacerse usando la presentación axiomática de la geometría realizada por Hilbert partiendo de tres objetos no definidos: punto, recta y plano; seis relaciones indefinidas: estar sobre, estar en, estar entre, ser congruente, ser paralelo y ser continuo; y veintiún axiomas: ocho de incidencia o pertenencia, los cuales incluyen los cinco postulados de Euclides, cuatro de orden, cinco de congruencia, tres sobre continuidad, y un postulado sobre paralelas equivalente al quinto de Euclides.

Las medidas en el plano son introducidas como magnitudes geométricas: longitud de segmentos, amplitud de ángulos y área de regiones poligonales; dadas por números reales, y fundamentadas en el principio de congruencia. Los axiomas de continuidad de las magnitudes geométricas, permiten asignar a cada segmento un valor numérico de manera única (Arquímedes) y a cada número real, un segmento de longitud el número dado (Cantor).

Para medir segmentos, suponemos que a cada segmento le corresponde un número positivo determinado, de manera que:

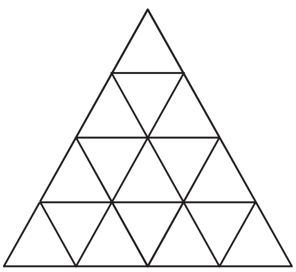
1. A segmentos congruentes correspondan números iguales.
2. Si B es un punto interior del segmento AC y a los segmentos AB y BC le corresponden los números a y b respectivamente, entonces al segmento AC le corresponde el número $a + b$.
3. A algún segmento OO' le corresponde la unidad.

Para medir áreas, suponemos que como en un triángulo cualquiera el producto de un lado por la altura correspondiente no depende del lado elegido, el *semiproducto de un lado por la altura correspondiente* es un número positivo y se llama el *área del triángulo.*

El área así definida presenta las propiedades siguientes:

- Triángulos congruentes tienen igual área.
- Si un triángulo se divide en un número finito de triángulos sin puntos interiores comunes, el área del triángulo es la suma de las áreas de cada uno de los triángulos que lo componen.
- Si dos triángulos son semejantes *la razón de sus áreas es el cuadrado de la razón de dos lados cualesquiera correspondientes*.
- El área de un polígono es la suma de las áreas de los triángulos en que se descompone.

En ésta versión podemos escoger como unidad de medida por ejemplo un triángulo equilátero, evitando la tendencia a creer que las áreas se miden solamente con unidades cuadradas y que las fórmulas para el área de los polígonos permanecen invariante. Por ejemplo,



Para lado 1 el área es 1.
Para lado 2 el área es 1 + 3 = 4.
Para lado 3 el área es 1 + 3 + 5 = 9.
Para lado L el área es $1 + 3 + 5 + \ldots + 2L - 1 = L^2$.

El concepto de medida según Maurice Fréchet

El área es un caso particular de la teoría de la medida, donde sobre una familia de subconjuntos de un espacio base conocida como ó-álgebra se define una función en los reales no negativos aumentados. Esta función es llamada una medida si tiene un buen comportamiento de las operaciones usuales de la teoría de conjuntos incluidos los procesos infinitos numerables.

Precisando, una ó-álgebra de un conjunto X es una familia Λ de subconjuntos de X que verifica:

a) $X \in \Lambda$

b) Si $E_k \in \Lambda$ para $k = 1, 2, \ldots$, entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \Lambda$.

c) Si $P \in \Lambda$ y $Q \in \Lambda$, entonces $P - Q \in \Lambda$.

El par (X, Λ) se llama *espacio medible*. En estos espacios se cumple que: el conjunto vacío pertenece a cada σ-álgebra, el complemento en X de cada elemento de Λ pertenece también a Λ, la intersección enumerable de elementos de Λ pertenece también a Λ y la intersección de cualquier familia de s-álgebras de X es una σ-álgebra de X.

El ejemplo más importante es la σ-álgebra de R^n engendrada por la familia de los conjuntos abiertos conocida como σ-álgebra de Borel, y sus elementos, conjuntos de Borel.

Sea (X, Λ) un espacio medible y $\mu : \Lambda \to [0, \infty]$ una aplicación con las propiedades:

a) $\mu(\emptyset) = 0$.

b) μ es completamente aditiva, es decir, para cada sucesión $\{E_k\}$ de elementos de Λ tal que $Ei \cap Ej = \emptyset$ si $i \neq j$, se verifica

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

La aplicación m se llama *medida* (X, Λ, μ), a los elementos de Λ se les denomina *conjuntos medibles,* y al valor $\mu(E)$ *medida* de E.

Un ejemplo particularmente importante es cuando $\mu(X) = 1$, el espacio de medida se llama espacio de probabilidad.

Referencias bibliográficas

CAMARGO, L. et al. (2004) *Espiral 2.* Bogotá, D.C. Norma

CARO, V. et al (1993) *Matemática 7 Aritmética y geometría transformacional.* Santafé de Bogotá. Migema.

CLEMENS, S. et al (1989) *Geometría con aplicaciones y solución de problemas.* Wilmington. Adisson-Wesley Iberoamericana.

GÓMEZ, R. et al (1976) *Matemática moderna estructurada 2.* Bogotá. Norma.

GUERRERO, B. (2002) *Notas de clase Geometría en el plano yen el espacio.* Bogotá, D.C. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias.

LONDOÑO, N. et al (1983) *Serie Matemática progresiva Aritmética y Geometría 7.* Bogotá. Primera edición. Norma.

MARIÑO, R. (2004) *La geometría en el arte y el diseño.* Bogotá. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias.

MOISE, E. et al (1972) *Serie matemática moderna Geometría.* Cali. Norma.

_________ (1968) *Elementos de Geometría Superior*. México D.F. Compañía editorial continental.

NIÑO, H. (1978) *Delta 9.* Bogotá. Editorial Universitaria de América Ltda.

VILLEGAS, M. et al (1991) *Matemática 2000.* Santafé de Bogotá. Voluntad.