

El concepto de función lineal desde una perspectiva variacional

UNIVERSIDAD DE
ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN

FABIAN POSADA BALVÍN
fposada@ayura.udea.edu.co
JHONY ALEXANDER VILLA OCHOA
javo@epm.net.co
GILBERTO OBANDO ZAPATA
gobando@epm.net.co

Introducción

Uno de los conceptos matemáticos que mayor espacio de investigación ha ganado en educación matemática, es el de función. Esto dado a que es visto actualmente como uno de los conceptos matemáticos de mayor importancia por sus múltiples aportes para modelar situaciones de las ciencias y de la misma matemática. Hogben (1970), Karlson (1961), Eves (1997), citados por de Souza 2003, afirman que, la esencia del pensamiento de hoy es el concepto de función, es decir, el movimiento del pensamiento de hoy, se materializa en la función. Adicionalmente algunas investigaciones se han desarrollado en torno a proponerlo como una vía de aproximación al álgebra escolar.

En los textos escolares colombianos tanto universitarios como de la Educación Básica se aborda dicho concepto, soportado en general, en la definición matemática propuesta por el grupo Bourbaki quienes, con un lenguaje conjuntista y a partir de los aportes dados por Dedekind, Cantor y Dirichlet, le imprimieron su grado de máxima abstracción, omitiendo, en la mayoría de los casos, toda su epistemología determinada por un tratamiento vía la variación y el cambio. La definición Bourbakista aunque formal y concreta por su grado de abstracción y generalidad, oculta a los ojos de los estudiantes y de algunos profesores de matemáticas, toda la riqueza de su campo semántico, impidiendo verlo como un concepto que, según su desarrollo histórico, atrapa la variación y el cambio y que puede ser pensado como modelo matemático de cierto tipo de fenómenos determinados por la correlación de magnitudes. Por esta la razón desarrollamos nuestro proyecto de investigación centrado en el

concepto de función desde una perspectiva variacional acorde con lo propuesto en los lineamientos y estándares curriculares colombianos. De esta manera pretendemos optar al título de magíster en educación matemática, de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia.

En este sentido, indagamos por el papel que juega el proceso de modelación matemática como herramienta didáctica de aproximación al concepto de *función lineal*; entendiendo dicho proceso, de acuerdo a lo sugerido por Duval (1999), como la actividad cognitiva de conversión de una situación presentada en lenguaje natural a un registro simbólico matemático que atrapa la correlación entre dos cantidades de magnitud, de la misma o de diferente naturaleza. Dicha actividad cognitiva está mediada por la noción de variación y por tanto el concepto de función, se concibe como modelo matemático, y de esta manera corazón del pensamiento variacional.

Marco teórico

La construcción del marco teórico se realizó desde tres perspectivas, las cuales fueron asumidas como variables macro-didácticas para la construcción del concepto de función como modelo matemático. Dichas perspectivas son:

1. La modelación matemática como herramienta didáctica en el ámbito escolar

Entre los elementos a favor de la modelación como herramienta didáctica se tiene los siguientes:

- Argumento formativo: al desarrollarse sobre la base de la solución de problemas como un proceso constructivo, desarrolla actitudes y valores positivos en los estudiantes.
- Argumento de la competencia crítica: Centra la formación del estudiante como una preparación para la vida ciudadana, en la cual las matemáticas son herramientas que le permiten posicionarse ante las demandas de la sociedad.
- Argumento de la utilidad: permite a los estudiantes ver la matemática como una herramienta útil en la solución de problemas de diversa naturaleza.

- **Argumento Intrínseco:** La modelación, la resolución de problemas son elementos intrínsecos a la actividad matemática misma.
- **Argumento de aprendizaje:** la aplicación de los conceptos matemáticos garantizan la comprensión de los mismos, en tanto que permite desarrollar y comprender argumentos matemáticos y valorar la propia matemática.
- **Argumento epistemológico.** Partir de la realidad para llegar, de manera natural a través de un enfoque cognitivo con fundamentación cultural, a la acción pedagógica, actuando, de esta forma, como una metodología alternativa más adecuada a las diversas realidades socioculturales.

En este sentido, la solución de problemas, a través de la modelación matemática, permite desarrollar contextos dentro de los cuales diferentes sistemas de representación son coordinados con el fin de almacenar, filtrar, procesar e interpretar información. De esta manera, en el proceso de desarrollar la situación problema, se logra la construcción del conocimiento matemático necesario y pertinente para su solución. Este proceso implica de manera necesaria, el debate, la confrontación, la cooperación, la validación.

2. La noción de variación de magnitudes

La noción de variación hace referencia a la relación de dependencia entre dos cantidades de magnitud determinada por la correlación entre ellas. Esto es, la variación implica la coordinación de dos o más cantidades de magnitud que varían y para la cual se busca establecer la forma en que cada una de dichas cantidades, cambia con respecto a la(s) otra(s).

En sentido estricto, la variación implica que dos o más cantidades de magnitud estén relacionadas de tal forma que el cambio en una, determina cambio(s) en la(s) restante(s). Ahora bien, en el caso que esta variación se pueda expresar a través de un modelo funcional, entonces se dice que las variables están correlacionadas. En los análisis estadísticos por ejemplo, que parten de tablas de datos que expresan la relación cuantitativa entre dos o más variables, primeramente se determina si existe

covariación, generalmente a través de analizar la gráfica cartesiana de la nube de puntos que representan las relaciones entre los datos, y después, se realizan los respectivos análisis de regresión, que no son otra cosa que determinar si existe un modelo funcional que se ajuste a los datos experimentales. El factor de correlación determina el grado de ajuste del modelo funcional a los datos.

Desde este punto de vista se puede hablar que el pensamiento variacional, propuesto por los lineamientos curriculares, es una manera de pensar dinámica, que permite sistematizar la relación entre las diferentes cantidades de magnitud presentes en determinada situación, la cual requiere ser matematizada y en esta tarea el concepto de función es fundamental.

3. Los sistemas semióticos de representación como herramienta para la construcción del concepto de función

La construcción de los conceptos matemáticos está mediado por el uso e interacción de diferentes sistemas de representación. Así por ejemplo, una misma situación puede ser representada a través del lenguaje natural, un gráfico cartesiano, una ecuación, una tabla de valores, un programa de computador, entre otros. La comprensión completa de un concepto matemático o de alguna situación implica la articulación de estos distintos registros de representación, en tanto que cada uno aporta información distinta sobre la situación y por ende sobre el concepto que se quiere enseñar.

Este proceso de construcción implica coordinar situaciones en diferentes contextos, y a propósito de una misma situación, articular distintos sistemas de representación (o como Duval, 1993, los llama, registros de representación semiótica¹), a través de dos procesos fundamentales: el tratamiento y la traducción.

Se entiende por tratamiento de un registro al proceso de transformación en otra forma equivalente pero dentro del mismo sistema de representación.

¹ En términos de Duval, un sistema de representación semiótica es un conjunto de símbolos con reglas de tratamiento que permiten la transformación de una representación en otra equivalente, y con reglas de transformación que permite poner en correspondencia unidades significantes de una representación en un sistema, con otra representación perteneciente a otro sistema.

Por ejemplo, cuando una ecuación es transformada en otra equivalente a través de las reglas del álgebra. Esto es, la ecuación $2x - 5 = 9$ se puede transformar en la ecuación $2x = 14$ después de sumar 5 en ambos lados de la igualdad (propiedad uniforme de la igualdad). Otra situación semejante se presenta cuando se realiza una operación aritmética, por ejemplo, $4 + 3 = 5 + 2$, lo cual se logra sumando una unidad en uno de los sumandos, y restando esa misma unidad en el otro sumando. El tratamiento de registros es una operación inherente a todos los procesos matemáticos y constituye la base de la actividad matemática de los alumnos.

Por su parte la traducción, se entiende como el proceso de transformación de un registro en otro registro de un sistema de representación diferente. Es el caso en el que una función expresada en un lenguaje algebraico es llevada a un gráfico cartesiano, o en el que un problema enunciado en lenguaje natural es expresado a través de una ecuación o de un conjunto de ecuaciones. Lo fundamental en este proceso es entender que la traducción de un sistema de representación a otro es la identificación de los elementos estructurales de la información en uno de los sistemas de representación y la relación con los elementos estructurales en el otro sistema de representación.

En síntesis el reconocimiento de los elementos que intervienen en la conformación de un sistema de representación y de algunas reglas básicas que sugieran las actividades de tratamiento y conversión, permite establecer relaciones entre un objeto matemático y las características necesarias para su comprensión conceptual. En particular, para el concepto de función lineal esto se determinó a partir del estudio de la noción de variación.

Basados en las anteriores variables macrodidácticas, nos centramos en el concepto de función lineal, caracterizándolo desde sus diferentes registros semióticos de representación (gráfico, simbólico, tabular y lenguaje natural) y desde algunas de las posibles dificultades cognitivas que se presentan en el proceso de modelación de situaciones donde intervienen fenómenos de variaciones lineales.

Fue así como se confirmó la importancia del razonamiento proporcional en la construcción, tanto de las estructuras multiplicativas en la básica primaria

como en la consolidación del concepto de función lineal. Si tomamos dicho razonamiento proporcional no como razón constante entre cantidades de magnitud, sino como razón constante entre diferencia de cantidades de magnitud, se identifica la función lineal, con la forma $f(x) = ax + b$ y no únicamente con la forma $f(x) = ax$ como lo proponen algunos textos, donde denominan la primera con el nombre de función afín y no lineal.

Metodología de la investigación

La metodología utilizada en la investigación fue la Ingeniería didáctica. Tal y como lo determina esta metodología, la primera tarea elaborada fue un análisis preliminar en dos líneas: una histórica-epistemológica y la otra de estado del arte en cuando a investigaciones sobre el concepto de función. En el segundo momento de la ingeniería y a partir de asumir el proceso de modelación matemático como sistemas conceptuales que se expresan para un propósito específico y requiere un conjunto de sistemas de representación para comprenderlo, se determinó que el concepto de función se puede entender como un modelo matemático que *objetiva* la correlación entre dos cantidades de magnitud a partir de cuatro sistemas de representación (gráfico, simbólico, tabular y lenguaje natural).

De esta forma se diseñaron tres situaciones de diagnóstico y tres de intervención. Las primeras pensadas para indagar por la comprensión que los estudiantes tenían sobre el concepto de función como modelos de un fenómeno de variación, y el uso de los diferentes sistemas de representación como herramientas de apoyo en el proceso de modelación matemática. Con base en los resultados de esta prueba se diseñaron tres situaciones que propiciaron un avance conceptual es este sentido.

Conclusiones

Nuestra interpretación de los lineamientos y estándares curriculares de matemáticas, nos ha permitido pensar en una vía diferente para su implementación en el aula de clase, en particular, de los aspectos relacionados con los elementos propios del álgebra, teniendo como base el concepto de función.

En la implementación del trabajo se observó que la percepción de los estudiantes en cuanto a la variación de magnitudes, la razón de cambio y la constancia de la misma, se basaba en la percepción de una correlación entre magnitudes sin realizar ninguna coordinación ni cuantificación de ellas sin embargo, con la implementación de esta propuesta se logró que avanzaran hacia dicha cuantificación de la variación y sobre todo su comparación por cociente para reconocer en la razón de cambio constante el eje central en la identificación de la función lineal y a su vez esta como un modelo matemático.

Otro aporte desde esta investigación radicó en que por la vía variacional es innecesario discriminar las funciones lineales y afines como objetos matemáticos diferentes dado que desde este punto de vista son equivalentes.

La modelación matemática como herramienta didáctica para la construcción de conceptos matemáticos, tuvo una importancia capital en la implementación de este trabajo, esto observado desde varios puntos de vista:

- Como actividad motivadora: se observó en los estudiantes que este proceso les permitió interesarse más por la necesidad de identificar regularidades. Además les permitió comprender los objetos matemáticos como herramientas que pueden describir fenómenos y no solamente como un lenguaje abstracto determinado por unas reglas sintácticas para su manipulación algorítmica.
- Como actividad cognitiva: les permitió abordar los problemas de una manera más organizada, coherentes y con sentido tanto matemático como contextual. Esto permitió que los estudiantes reconocieran en el concepto de función lineal un modelo que describe situaciones problemas particulares, pero además generalizables a situaciones donde intervienen razones de cambio constantes entre diferentes cantidades de magnitud.

Se logró confirmar la necesidad de utilizar diferentes sistemas semióticos de representación para la

comprensión de un concepto matemático. En el caso particular del concepto de función pensado como modelo, la conversión entre el lenguaje natural y el simbólico cumplió un papel fundamental en la construcción del modelo matemático. Sin embargo los demás registros de representación (gráfico y tabular) se convirtieron en herramienta de apoyo para facilitar dicha actividad cognitiva. En cuanto al sistema de representación gráfico no se logró avanzar en su comprensión, dado que los estudiantes tenían un conocimiento muy limitado de este registro como representante de una relación entre variación de magnitudes. Su interpretación iba desde una mirada meramente icónica hasta una visión muy puntual de la relación, es decir, no había una interpretación por intervalos o global de la gráfica, lo cual no permitía reconocer las características variacionales que en este registro se pueden observar. Esto sugiere futuras investigaciones que realicen un reconocimiento de la variación a través del registro gráfico y su conversión a los demás registros.

Referencias bibliográficas

- Azcarate, C., y Deulofeu, J. (1996) funciones y sus gráficas. Síntesis. Madrid
- Bassanezi Roney C. (2002). Ensino aprendizagem com Moolagem matemática. Editora Contexto.
- Dhombres, J. y otros. (1987) Mathématique au fil des âges. Gauthier-Villars. Paris
- Duval Raymond. (1999). Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle, Instituto de Educación y pedagogía, grupo de educación matemática. Traducción Myriam Vega Restrepo.
- Lesh Richard, Lehrer Richard. (2003) Models and Modeling Perspectives on the Development of Students and Teachers. En: Mathematical thinking and learning
- Ministerio de Educación Nacional (1998) Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá
- Ministerio de Educación Nacional (2003) Estándares curriculares de matemáticas. Bogotá
- Sousa Maria, Lanner Anna (2003). O lógico-histórico enquanto perspectiva didática da álgebra e sua relação com a formação de professores do ensino fundamental. En: Educação Matemática Desafios & Perspectivas. Memorias del XI Conferência Interamerica de Educação Matemática. Brasil.
- Vasco C. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. Serie Memorias, Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas. Ministerio de Educación Nacional.

