Relación entre ecuaciones y funciones
La teoría de ecuaciones vs. la teoría de funciones

GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
UNIVERSIDAD DEL VALLE

LIGIA AMPARO TORRES R.
liamtore@yahoo.es

Uno de los conceptos básicos del álgebra en la escuela es el concepto de *ecuación*, el cual generalmente se define como "la igualdad entre dos expresiones algebraicas" y cuya manipulación se limita a las técnicas de solución de ecuaciones polinómicas de primero y segundo grado. Sin embargo, tanto la perspectiva curricular orientada a nivel nacional por el Ministerio de Educación Nacional a través de los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Calidad y los desarrollos de la teoría de ecuaciones y la de funciones entre los siglos XVII y XIX posibilitan una reconceptualización en la escuela de este objeto matemático. Reconceptualización ligada a la ampliación del campo semántico de las ecuaciones en la escuela a través de la interacción con conceptos fundamentales de la teoría de relaciones y funciones. Lo que significa que, las orientaciones sobre la construcción y desarrollo del pensamiento variacional en la educación básica y media se fundamentan en la percepción, cuantificación, descripción y manipulación algebraica de la variación, para lo cual se requiere el estudio de la función como dependencia de variables y como modelo de situaciones y problemas tanto de la actividad cotidiana del hombre, de fenómenos matemáticos o de otras disciplinas y donde los diferentes tratamientos y conversiones entre los diferentes sistemas de representación asociados a la variación son parte importante en el desarrollo de este pensamiento. Las formulas y las expresiones analíticas como registros primordiales a la hora de manipular y operar con las variaciones permiten establecer la relación entre lo funcional y lo algebraico, entre las variaciones y las expresiones algebraicas.

Desde la perspectiva de la investigación en didáctica del algebra se ubica esta problemática en un enfoque funcional para el trabajo algebraico en la escuela; para Heid (1997), por ejemplo, "un enfoque funcional al álgebra no necesariamente significa el estudio de funciones. Este enfoque, sin embargo, plantea la posibilidad de usar letras como variables –como opuesta a incógnitas-". Por ejemplo, la expresión $3x+5$ puede ser vista como una función, esto es, una asignación que traslada todo numero x en otro. Tal que x se interpreta como una variable debido a que puede tomar valores en un rango. En contraste, cuando dos funciones tales como y 23 se igualan (), x debe interpretarse claramente como una incógnita –el valor para el cual las dos funciones son iguales-. Pero hay mas en un enfoque funcional que ver las letras como variables; también, conlleva por ejemplo ver la función desde la perspectiva de una relación entre los valores de x y los valores funcionales correspondientes, esto es, desde la perspectiva de cómo un cambio en x produce una variación particular en los valores de la función.

Kieran (1997), opina que central al pensamiento algebraico es el concepto de variable con todas sus connotaciones posibles, usos, y conexiones (Usiskin, 1988). Los enfoques contemporáneos a la emergencia y desarrollo del pensamiento algebraico difieren en la extensión del énfasis en los aspectos particulares de la variable. Difieren en su énfasis en la naturaleza dinámica de la variable, en las formas en las que las variables representan cantidades en el mundo real, y sobre el uso de variables para definir estructuras formales y bien definidas. Durante la década pasada las tecnologías computacionales disponibles en las escuelas habían permitido un acceso sin precedente a la representación de variables como cantidades con valores cambiantes. Lo que es interesante e importante en relación con la naturaleza dinámica de la variable, sin embargo, no es solamente el cambio en los valores de las variables, sino los efectos de esos cambios en los valores de otras variables. Esto es, lo que hace que el estudio de las variables sea interesante es el estudio de funciones de esas variables.

Como se puede observar el énfasis esta puesto en la relación de dependencia entre variables. En este curso, el interés está puesto en el análisis de los fenómenos que son organizados por los objetos algebraicos, en este caso el concepto de función, pero esto no se limita a la función, sino a las ecuaciones, inecuaciones y en general a las expresiones algebraicas y sus operaciones. Por lo tanto si el contenido matemático central a cualquier aproximación algebraica involucra los conceptos fundamentales de variable y función interesa el papel de estos conceptos en la construcción de otros. En el caso de las ecuaciones cuando una función se iguala a cero o se igualan dos funciones, que en últimas corresponden a la misma idea, pues el cambio es eminentemente procedimental. Así: , se redimensiona ese concepto de ecuación, pues no se alude sólo a lo estático de la variable, como incógnita en la solución de esa ecuación (un punto, por ejemplo), sino que se aprecia las variaciones funcionales hasta que, por ejemplo, cuando esta se hace igual a cero. Esta perspectiva didáctica con raíces epistemológicas corresponde a la idea de función como dependencia y no como correspondencia, por lo menos en el acercamiento a los conceptos algebraicos y a la identificación de familias de estas.

El evento histórico que movilizó al álgebra en esta dirección fue la ingeniosa contribución de Vieta a finales del siglo XVI: la introducción de letras en dos roles diferentes –como conocidas y como conocidas-. Su uso de las letras en este doble papel fue crucial para el desarrollo de lo que nosotros podríamos llamar, el álgebra de la familia de ecuaciones; es posible ahora expresar soluciones generales no numéricas a los problemas algo que no había sido imaginado antes. De otra parte los trabajos de Descartes y Fermat que permiten el paso del mundo de las cantidades al de las relaciones, al posibilitar determinar puntos relacionados mediante coordenadas y de esta manera definir los cambios y las variaciones. Es decir, las expresiones parametrizadas que fueron conceptualizadas por Vieta llegaron hacer vistas de una forma funcional. De aquí en adelante, los esfuerzos de Euler para expresar las cantidades que cambian se hacen presentes y después aplicadas estas relaciones y las representaciones que dan origen, a la ciencia por Galileo, Newton y Leibniz, entre otros, para representar fenómenos naturales. El álgebra fue transformada definitivamente de una ciencia de cantidades constantes a una ciencia de magnitudes cambiantes, de relaciones generales. Es este enfoque sobre las funciones y ecuaciones que se reconoce como alternativa didáctica importante en el acercamiento al álgebra en la escuela.

Sin embargo, los desarrollos del siglo XIX por Dirichlet, condujeron a una modificación en la visión de las funciones de una relación de dependencia a una correspondencia arbitraria entre números reales; esto fue generalizado aun mas cien años después por Bourbaki quien la definió estructuralmente entre dos conjuntos. Esta ha sido la perspectiva de estudio en la escuela de las funciones. Sin embargo, muchos investigadores en Educación Matemática han propuesto el retorno a las nociones de dependencia como Sfard (1977) y Freudenthal (1982), entre otros.

Este tipo de reflexiones epistemológicas, didácticas y curriculares relativas a la ampliación semántica del concepto de ecuación, en la escuela se abordan desde este curso, en el marco del 7º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, coordinado por ASOCOLME. Curso que ubica elementos importantes sobre la generación de ambientes de formación que den cuenta de aprendizajes significativos y funcionales del álgebra y del desarrollo del pensamiento variacional, lo que presupone, reconocer los cambios esenciales para ver lo curricular más allá de una lista de contenidos y parcelación de estos en el tiempo escolar y, reflexionar sobre algunos aspectos epistemológicos y didácticos del álgebra que cohesionan el currículo propuesto y las practicas en el aula.

Referencias bibliográficas

Acevedo, Myriam. y Falk, Mary. (1997). Recorriendo el álgebra. De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta. Santafé de Bogotá, Editorial Universidad Nacional.

Campos, Rómulo. (1994). Campos semánticos y el problema del significado en álgebra. En: UNO. Revista de didáctica de las matemáticas. No 1.p 45-56

Filloy, E. (1998) Aspectos teóricos del álgebra educativa. Grupo Editorial Iberoamericana. México.

Heid, Kathleen. *(1996).* Reflections on mathematical modeling and the redefinition of algebraic thinking. En: Approaches to algebra. Perspectives for Research and Teaching. By A. J. Bishop et al (eds). Kluwer Academic Plublishers, Printed in the Netherlands.

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into álgebra. En Bednarz, N., Kieran, C. Y Lee, L.(Eds.) Aproaches to Álgebra. Perspectives for Research and Teaching, pp. 225, 236, Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht – Boston – London.

Kieran, C. Y Lee, L.(Eds.) Aproaches to Álgebra. Perspectives for Research and Teaching, pp.87, 106, Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht – Boston – London.

Lee, L.,(!996) An Initiation into algebraic culture through generalization activities, En Bednarz, N.,

Mason, J., (1996), Expressing generality and roots of algebra, En Bednarz, N., Kieran, C. Y Lee, L.(Eds.) Aproaches to Álgebra. Perspectives for Research and Teaching, pp. 65,86, Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht – Boston – London.

Nemirovsky, R., (1996), Mathematical narratives, modelling, and algebra, En Bednarz, N., Kieran, C. Y Lee, L.(Eds.) Aproaches to Álgebra. Perspectives for Research and Teaching, pp.197,220, Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht – Boston – London.

Puig, Luis (1997). Análisis fenomenológico. En: Rico, ed. La educación matemática en la enseñanza secundaria. Barcelona: ICE/Horsori.

Radford, L., (1996), Some reflections on teaching algebra through generalization, En Bednarz, N., Kieran, C. Y Lee, L.(Eds.) Aproaches to Álgebra. Perspectives for Research and Teaching, pp.107,114, Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht – Boston – London.

Rojano, T. y Sutherland, R., (1991). La sintaxis algebraica en el proyecto viético. En: Historia de las ideas algebraicas. Memorias del tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Rojano et al (eds.) p.117-130.

Sfard, A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: Refletions on proceses and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, Vol. 22, pp.1, 36.

Torres, L. Y Calderón, L. (2000). El dominio de la variable. Variable didáctica en el álgebra escolar. Bogotá. En: Revista EMA Vol.5, No. 3 pp 197-209

Torres, L., Valoyes, E. Y Malagón, R. (2002). Situaciones de generalización y uso de modelos en la iniciación al álgebra escolar. Bogotá. En: Revista EMA Vol.7, No. 2 pp 227-246

Viète, François. (1983). The Analytic Art. Translated by T. Richard Witmer. United States of America. The Kent State University Press.

Álgebra, algoritmos, máximo común divisor

GRUPO DE ALGEBRA Y ANÁLISIS UPTC, TUNJA

OMAIDA SEPÚLVEDA DELGADO*
ZAGALO ENRIQUE SUAREZ**

Vamos a analizar algunos algoritmos utilizados en Algebra que surgen del concepto del algoritmo de la división en el conjunto de los números Enteros. Además presentamos la herramienta de las BASES DE GROBNER en algunas aplicaciones.

Definición .1 *Un conjunto* $(G, \cdot)$ *se llama* ***Semigrupo,*** *si cumple la propiedad que* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *.,para* $a, b, c \in G$.

Definición .2 *Un conjunto* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *. junto con una operación binaria se denomina* ***Grupo,*** *si satisface las propiedades:*

G1.Dados $a, b, c \in G$*, entonces* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *.*

G2..Existe un elemento e,tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$.

G3..Para cada $a \in G$*, existe* $a^{-1} \in G$ *tal que* $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Si además se tiene que $a \cdot b = b \cdot a$*, para cada* $a, b \in G$ *el grupo se dice Abeliano.*

Definición .3 *Un conjunto* $(A, +, \cdot, 1)$ *se llama* ***Anillo*** *si cumple las propiedades:*

A1) El conjunto $(A, +)$ *es un* ***Grupo Abeliano.***

A2) El conjunto $(A, \cdot, 1)$ *es un* ***Semigrupo.***

A3) Se cumplen las propiedades distributivas:

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \end{aligned}$$

Definición .4 *Para un subconjunto* $I \subseteq A$*, se dice que es* ***ideal del anillo*** A *si se cumplen las propiedades:*

I1) Para $x, y \in I$ *se tiene que* $x - y \in I$

I2) Para $x \in I$*,* $a \in A$ *se tiene que* $a \cdot x \in I$.

Se tiene la operación binaria de $I \times A \longrightarrow A$.

Definición .5 *Un conjunto* $(A, +, \cdot, 1)$ *define una estructura de* ***Cuerpo*** *si cumple las propiedades:*

C1) El conjunto $(A, +, \cdot, 1)$ *Es un anillo conmutativo, donde para cada* $a \in A$ *se tiene que existe* a^{-1} *tal que* $a \cdot a^{-1} = 1$.

Así tenemos que el conjunto $K[x]$, formado por polinomios en la variable x y coeficientes en un Cuerpo K, es un **Dominio de Ideales Principales,** esto es un Anillo conmutativo sin Divisores de Cero, donde cada Ideal es principal.

APLICACIONES Y ALGORITMOS

Presentamos los algoritmos a implentar, primero en el caso de una una variable, trabajando en $K[x]$ y luego algunos algoritmos para trabajar en $K[x_1, ..., x_n]$