RECME Editorial Smart Smath Alianza ASOCOLME - Grupo Editorial GAIA Revista Colombiana de Matemática Educativa

Análisis de algunos aspectos de la Teoría de la Objetivación

Miglena Asenova[1,2]; Bruno D'Amore[1,3,4]; Martha Isabel Fandiño Pinilla[1]; Maura Iori[1]; George Santi[1,5]
avcdiem@gmail.com; bruno.damore@unibo.it; marisafp@hotmail.it; maura@iori-maura.191.it; grpsanti@gmail.com

Resumen

En este artículo se presentan y se discuten algunos de los elementos fundadores de la teoría de la objetivación. Destacamos inicialmente los que consideramos ser los temas clave de esta teoría, sobre la base de la contradicción epistemológica clásica entre teorías realistas y teorías pragmáticas, para luego proponer, de una manera problematizada, reflexiones sobre dos de sus pilares: el concepto de labor y el concepto de objetivación. Proponemos también un análisis de la teoría de la objetivación con referencia a posibles relaciones con otros enfoques en educación matemática.

Palabras clave: teoría de la objetivación; labor; labor conjunta; semiótica; alienación.

Analysis of some aspects of the Theory of Objectification

Abstract

In this paper, we present and discuss some of the foundational elements of the theory of objectification. We highlight the key themes based on the classical epistemological contradiction between realist and pragmatic theories. We propose reflections on two of its cornerstones in a problematic way: the concepts of labour and objectification. We suggest an analysis of the theory of objectification referring to possible relations with other approaches in mathematics education.

Keywords: theory of objectification; labour; joint labour; semiotics; alienation.

Análise de alguns aspectos da Teoria da Objetificação

Resumo

Este artigo apresenta e discute alguns dos elementos fundadores da teoria da objetivação. Destacamos inicialmente os que consideramos serem temas chaves desta teoria, sobre a base da contradição epistemológica clássica entre teorias realistas e teorias pragmáticas, para em seguida propormos, de uma maneira problematizada, reflexões sobre dois de seus pilares: o conceito de trabalho e o conceito de objetivação. Propomos também uma análise da teoria da objetivação com referência a possíveis relações com outros enfoques da educação matemática.

Palavras-chave: teoria da objetivação; trabalho; trabalho conjunto; semiótica; alieanação.

[1] Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia.
[2] Università di Palermo, Italia.
[3] Doctorado Interinstitucional en Educación DIE, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.
[4] Grupo de investigación MESCUD, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.
[5] Libera Università di Bolzano, Italia.

1 Introducción

Los aportes en educación matemática realizados por Luis Radford, sus estudiantes y colaboradores en los últimos 10-15 años han favorecido en el área de la educación matemática una reflexión profunda sobre algunos aspectos que en muchas investigaciones anteriores no se problematizaban o se consideraban ya adquiridos o, en algunos casos, eran ignorados completamente (nos limitaremos a elegir como referencias: Radford, 1997, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2013); estos estudios también han llevado a discusiones relevantes sobre algunos temas clásicos de la investigación en educación matemática (D'Amore, Radford, & Bagni, 2007).

La posibilidad de examinar un gran número de sus trabajos recientes, de participar en encuentros, conferencias y debates, de dirigir tesis doctorales sobre este tipo de tema, nos ha llevado a algunas reflexiones que queremos compartir a través de este texto.

Quisiéramos enmarcar la teoría de la objetivación (TO) en el desarrollo histórico y epistemológico de la educación matemática y examinar algunas palabras clave de esta teoría, discutiendo su significado desde un punto de vista filosófico y sociológico, mostrando su complejidad y los diferentes significados con los que a veces se usan también en la investigación y en la comunicación de la misma. Esto con el fin de contribuir al debate internacional actual sobre la teoría mencionada incluso como una herramienta interpretativa para quienes se acercan a tales estudios por primera vez.

La razón que nos lleva al presente estudio es la necesidad imperiosa de profundizar críticamente algunos de los temas tratados, no tanto por razones de simplificación conceptual, sino (¡por el contrario!) debido a la necesidad de resaltar las complejidades que se esconden en esta perspectiva teórica. Nos impulsa también el objetivo de reducir, limar y disminuir algunas disonancias aparentes con otras teorías o con otras interpretaciones, tratando de buscar raíces comunes.

La complejidad y la profundidad que caracterizan la TO derivan del campo de investigación de la educación matemática, entendida como la epistemología del aprendizaje de la matemática (D'Amore, 1999, 2006a). El aprendizaje de la matemática es una experiencia humana (D'Amore, 2003, 2005) que involucra al individuo en toda su complejidad y en su compleja interacción con el mundo que se descompone en sus elementos históricos, culturales, sociales, políticos, materiales, etc. La fuerza epistemológica de la TO ha proporcionado a la comunidad académica un nuevo punto de vista para comprender la riqueza multiforme del aprendizaje de la matemática. El aprendizaje se concibe como una actividad reflexiva que tiene lugar de acuerdo con las posibilidades y los vínculos de sistemas semióticos de significación cultural y que entrelaza dialécticamente la dimensión subjetiva, la dimensión objetiva y la dimensión histórico-cultural. En la dialéctica que emerge de la actividad reflexiva, el individuo y los objetos matemáticos son producidos constantemente por un contexto histórico y cultural específico y, al mismo tiempo, contribuyen a producirlo. La trama sujeto-objeto-cultura nos permite incluir y dar un nuevo significado a los pilares teóricos que contribuyen a la creación de la educación matemática como disciplina autónoma de investigación.

La TO está comprendida dentro de las llamadas teorías socioculturales; en general, en estas se supone que el conocimiento es generado por los individuos en el curso de prácticas sociales constituidas histórica y culturalmente. Por lo tanto, la producción de conocimiento no depende de exigencias de adaptación cognitiva, sino que está incorporada en formas culturales de pensamiento, relacionadas con una realidad simbólica y material que proporciona las bases para interpretar, comprender y transformar el mundo de los individuos, los conceptos y las ideas que estos se forman en conexión con esta realidad. El aprendizaje es "la adaptación a través de mecanismos sociales a un mundo de prácticas culturales" (D'Amore & Radford, 2017, p. 116) que los estudiantes obtienen a través de un proceso social de objetivación mediado por signos, lenguajes, artefactos e interacciones sociales, cuando los estudiantes participan en formas culturales de reflexión y acción.

Con respecto a las teorías anteriores, la entrada de las teorías socioculturales en la educación matemática ha ampliado el campo de investigación gracias a las nuevas herramientas conceptuales y operativas que han permitido análisis de naturaleza diferente; de hecho, se trata de interpretar las ideas de saber, conocimiento y aprendizaje de una manera que sin duda es nueva. Según las teorías socioculturales, el concepto de adaptación cognitiva no es suficiente para comprender en profundidad la idea de conocimiento o de aprendizaje. Según estas teorías, el conocimiento no es el resultado de estructuras de carácter epistémico que trascienden la cultura, sino que es él mismo una forma cultural constituida por reflexiones y acciones incorporadas en las mismas prácticas sociales, con la mediación del lenguaje, y debida a la interacción social gracias al uso de signos y la creación de artefactos apropiados (Radford, 2011).

La teoría de la objetivación, en particular, se basa en la idea, considerada fundamental, de que el aprendizaje es al mismo tiempo conocer y llegar a ser, es decir, no puede circunscribirse solo al ámbito del conocimiento, sino que debe involucrar el ámbito del ser, del ser específico de los sujetos. El objetivo de la educación matemática es un esfuerzo dinámico, político, social e histórico que empuja a los sujetos reflexivos y éticos a la creación dialéctica de discursos temáticos y prácticas de naturaleza matemática determinadas histórica y culturalmente. Estos discursos y estas prácticas están en continua evolución. Las bases filosóficas de esta posición se pueden rastrear en las obras del filósofo alemán Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770–1831) y en los desarrollos posteriores debidos a Karl Marx (1818–1883) y en toda la llamada tradición dialéctica: Evald Ilyenkov (1924–1979), Felix Mikhailov (1930–2006), Lev Semënovič Vygotskij (1896–1934); ver por ejemplo (Radford, 2006; D'Amore, & Radford, 2017).

2 La semiótica

En sus albores, a principios de la década del 2000, la TO no se conocía por su actual denominación, sino se la indicaba genéricamente como enfoque semiótico-cultural (Radford, 2000a, 2000b, 2002, 2003). Sus elementos fundamentales que habrían de ser desarrollados en los años siguientes ya estaban todos presentes: las nociones de objetivación, de medio semiótico de objetivación, de actividad reflexiva mediada y los aspectos históricos, culturales y sociales que son constitutivos del pensamiento y del aprendizaje en la matemática. En esta sección queremos investigar el papel de la semiótica en la TO, que ocupa una posición central dentro de la teoría, y el cambio de perspectiva con respecto al uso de los signos que la TO ha iniciado en este campo de investigación.

La introducción de la semiótica en la educación matemática se debe a los trabajos pioneros de Duval (1993, 1995, 1996) cuyo interés en la investigación era el de identificar el funcionamiento cognitivo del pensamiento matemático. Partiendo de la naturaleza epistemológica particular de los objetos/conceptos matemáticos, Duval atribuye a las representaciones semióticas una función prioritaria en el pensamiento y en el aprendizaje matemático, tanto como para caracterizar la cognición en la matemática a través de un manejo complejo de transformaciones de representaciones *en* (tratamiento) y *entre* (conversión) registros semióticos, continuando la tradición estructuralista francesa iniciada por de Saussure (1915). No es casualidad que para Duval tenga sentido considerar los signos como pertenecientes siempre a los sistemas semióticos, ya que es precisamente la estructura interna del sistema semiótico en la cual se consideran los signos la que determina los posibles usos semánticos de los signos mismos. Sin embargo, como afirma Duval (2017), "el concepto de 'sistema semiótico' no es suficiente para dar cuenta de las dos transformaciones, el tratamiento y la conversión, que guían cognitivamente la actividad matemática" (p. 46). Para dar cuenta de estos dos tipos de transformaciones semióticas necesitamos la noción de registro de representación semiótica. Para Duval, un registro de representación semiótica es un sistema semiótico particular que (a diferencia de, por ejemplo, un código) no solo tiene una función de comunicación, sino también una función de *objetivación* (que en Duval es tomar conciencia de algo para uno mismo, solo para uno mismo, no para la comunicación); además, un registro de representación semiótica puede producir "cognitivamente" o "crear" nuevas representaciones y por lo tanto nuevos conocimientos, mediante transformaciones de representaciones semióticas de objetos matemáticos.

Piénsese, por ejemplo, en el registro algebraico cuyas reglas sintácticas nos dicen cómo construir representaciones más complejas a partir de algunos signos elementales (letras, cifras y símbolos para las operaciones). La perspectiva estructural y funcional de Duval identifica el funcionamiento cognitivo y el desarrollo del conocimiento en la matemática con la transformación de las representaciones que acabamos de describir.

Es necesario hacer una pausa para justificar el peso que el enfoque de Duval atribuye a las transformaciones semióticas. Los objetos/conceptos matemáticos son entidades ideales a las cuales no se puede acceder directamente a través de la percepción; no tienen ninguna de las características identificadas por Aristóteles para caracterizar un objeto como "cosa", es decir, tridimensionalidad, accesibilidad sensorial múltiple (de varios sentidos al mismo tiempo) independiente de las representaciones semióticas y posibilidad de separación material de otras partes de la realidad. La única posibilidad de acceso a los objetos matemáticos es a través de representaciones semióticas. Tan es así que Duval (2017, p. 71) afirma que "no hay noética sin semiótica". Esta afirmación, que podría parecer drástica, es el resultado de un largo viaje que ha caracterizado la investigación sobre la delicada relación entre signo y objeto, entre significante y significado. A este respecto, recordemos los famosos triángulos semióticos como, por ejemplo, el de Richards (símbolo-referencia-referente). La noética, entendida como adquisición conceptual, es asimilable a la relación establecida entre el objeto y una representación suya que, en el esquema de Frege, es uno de sus sentidos. En el caso de la matemática, esta relación no es posible, por lo que la noética es realizable *solo* a través de la semiótica. El problema de la naturaleza del conocimiento matemático lleva a Duval a resaltar, a partir del esquema de Frege, una distinción epistemológica (no semiótica) fundamental para comprender el funcionamiento cognitivo del pensamiento matemático, precisamente lo que hay entre representaciones o signos y objetos. Nótese que Duval afirma que "Frege no propuso una definición de signo" (Duval, 2017, p. 15). Para Duval, el signo no se puede identificar con la expresión que representa el objeto, por lo tanto, no ve en la distinción entre *Sinn* y *Bedeutung* de una expresión un triángulo semiótico (Duval, 2006). Dado que en matemática es imposible establecer una relación directa entre representación y objeto, Duval condensa el *sentido* en la relación existente entre una representación y la estructura del registro de representación al que pertenece y al que está conectado a través de las transformaciones de tratamiento. Pensar y aprender en la matemática requiere una transformación de las representaciones a través de tratamientos y conversiones, y el objeto se entiende como el invariante de las representaciones semióticas respecto a las transformaciones de tratamiento y conversión.

El enfoque semiótico-cultural, en una perspectiva vygotskijana de la teoría de la actividad, le atribuye a la semiótica un papel completamente diferente en la cognición y en la atribución de significado de los objetos matemáticos. La posición ontológica y epistemológica que está a la base de la TO no postula la existencia de objetos matemáticos, sino que los coloca en una perspectiva antropológica, como "emergentes de la actividad humana". Este último planteamiento doble coincide exactamente con la posición de Duval. El pensamiento y el aprendizaje en la matemática no se caracterizan exclusivamente como en las perspectivas de tipo puramente cognitivista, ni por una activación de estructuras cognitivas, sino que implican toda la complejidad de la experiencia individual que también incluye la percepción, la dimensión afectiva, los aspectos viso-espaciales y kinestésicos, los gestos, etc.

El aprendizaje no se ve como asimilación (como sucede en el conductismo), ni como una construcción *ex nihilo* (de la nada, como en el constructivismo), sino como una *re-flexión*, es decir, como un movimiento dialéctico entre la realidad sociocultural y el individuo que la refleja: por un lado, el ser humano que piensa crea los objetos del pensamiento, pero al mismo tiempo refleja la realidad cultural a la cual pertenece y siendo plasmado por ella, en el sentido de que esta última determina su forma de percibir y entender la realidad, es decir, sus *manières de viser* (formas de mirar) (Merleau-Ponty, 1945). La actividad reflexiva "constituye" y da forma al pensamiento y a su producto, es decir, al conocimiento.

Sobre este fondo ontológico y epistemológico, el significado de signo y de semiótica adquieren un papel radicalmente distinto respecto al que asume en las tradiciones estructuralistas clásicas que, a pesar de los diferentes matices, reedifican el significado de conceptos/objetos matemáticos y signos en la relación significado-significante-interpretación. El signo es un puente que conecta las estructuras cognitivas con los objetos/conceptos de una realidad material o ideal como en el caso de los objetos matemáticos.

Radford (2000b) nos da una definición de signo y semiótica consistente con la perspectiva vygotskijana y de la teoría de la actividad que su teoría abarca:

> De acuerdo con Vygotsky (1962), Vygotsky y Luria (1994), Zinchenko (1985), Geertz (1973), Bateson (1973) y Wertsch (1991), en lugar de ver signos como espejos que reflejan

> los procesos cognitivos internos, los consideramos como instrumentos o prótesis de la mente con el fin de llevar a cabo acciones según lo requieran las actividades contextuales en las cuales los individuos se involucran. Como resultado, existe un cambio teórico de lo que los signos representan a lo que estos nos permiten hacer. (Radford, 2000b, p. 241)[6]

Esta concepción de la semiótica nos permite ampliar la noción de signo mucho más allá de lo que permitiría la semiótica clásica. La TO es un ejemplo de *ampliación externa* (Arzarello, 2006) de los sistemas semióticos utilizados en matemática. Esta ampliación es externa, ya que requiere incluir entre los sistemas de signos no solo el lenguaje natural, el lenguaje simbólico, gráficos, esquemas, etc., sino también los gestos, los artefactos materiales, el ritmo, el uso deíctico y generativo del lenguaje natural, etc., que la semiótica clásica no podría considerar como signos:

> Estos objetos, herramientas, dispositivos lingüísticos y signos que los individuos utilizan intencionalmente en los procesos de creación de significados sociales a fin de lograr una forma estable de conciencia, para hacer evidentes sus intenciones y para llevar a cabo sus acciones que permiten alcanzar el objetivo de sus actividades, yo los llamo medios semióticos de objetivación.[7] (Radford, 2003, p. 41)[8]

La actividad humana, por lo tanto, no solo es *reflexiva* sino también *mediada* en el sentido de que es posible realizarla solo a través de los recursos semióticos, en el amplio sentido que acabamos de mencionar. Sin embargo, sería reductivo pensar en la semiótica solo con la función de mediar en la actividad humana, entendida como un "hacer" relegado a la manipulación material de los objetos. Podemos pensar en los medios semióticos de objetivación como un conjunto de artefactos; en efecto, le confieren a la actividad humana un carácter social y cultural sin el cual no podríamos atribuirle a dicha actividad un papel central en el pensamiento ni en el desarrollo histórico del conocimiento en la matemática. Estos son los depositarios del desarrollo histórico del conocimiento matemático como un cofre hipotético cultural y social, heredado de las generaciones anteriores. Además, los artefactos no actúan de manera autónoma como mediadores, sino que requieren de actividades sociales humanas que les den un sentido y de un ser humano que sepa cómo usarlos y que sea capaz de reconocer, identificar, aprovechar la inteligencia almacenada en ellos y poder, por lo tanto, ayudar a otros (por ejemplo, a los estudiantes) a descubrirla por sí mismos, a hacerla suya en un proyecto social y adecuadamente compartido (Radford, 2008).

Si en el enfoque estructural y funcional de Duval es prioritario el funcionamiento semio-cognitivo del pensamiento matemático, en la TO lo es la acción reflexiva mediada que entrelaza el pensamiento matemático, la emergencia de sus objetos/conceptos y su significado. La semiótica, en el sentido de la ampliación externa descrita anteriormente, es el "campo" en el que cual la actividad reflexiva puede tener lugar y desarrollarse.

3 Pensamiento, conceptos matemáticos y significado: de las teorías realistas a las teorías pragmáticas

En esta sección, queremos discutir el desarrollo epistemológico relativo a los objetos/conceptos matemáticos en la educación matemática, proponiendo un camino que comienza con los triángulos semióticos y termina con la TO.

Los triángulos semióticos se insertan en la línea de las *teorías realistas* (D'Amore, 2003, 2005) que atribuyen a los *objetos matemáticos* una existencia real y a priori en un dominio ideal, independiente del ser humano. El *significado* de los objetos matemáticos es

[6] Following Vygotsky (1962), Vygotsky and Luria (1994), Zinchenko (1985), Geertz (1973), Bateson (1973) and Wertsch (1991), instead of seeing signs as the reflecting mirrors of internal cognitive processes, we consider them as tools or prostheses of the mind to accomplish actions as required by the contextual activities in which the individuals engage. As a result, there is a theoretical shift from what signs *represent* to what they *enable* us to do. (Radford, 2000b, p. 241)

[7] Por simplicidad, identificamos los medios semióticos de objetivación con los artefactos, incluso si los primeros son los artefactos materiales e ideales que median la actividad reflexiva entendida como aprendizaje.

[8] These objects, tools, linguistic devices, and signs that individuals intentionally use in social meaning-making processes to achieve a stable form of awareness, to make apparent their intentions, and to carry out their actions to attain the goal of their activities, I call *semiotic means of objectification.* (Radford, 2003, p. 41)

una relación convencional entre los signos y las entidades a priori que estos representan. Esta relación puede asumir diferentes caracteres que el esquema de los triángulos semióticos pretende describir. *Pensar, conocer y aprender* en la matemática pueden identificarse con el descubrimiento o el reconocimiento de entidades y sus relaciones que pertenecen a un dominio ideal, a través de las representaciones que estas entidades reflejan en la mente.

A principios de los '90 Gérard Vergnaud propone, dentro de su teoría de los campos conceptuales, una definición de concepto matemático basada en un esquema ternario que, sin embargo, inserta elementos pragmáticos en la posición realista típica de la semiótica clásica. En el corazón de su definición, Vergnaud expone la noción de *invariante operatorio*; argumenta que el conocimiento racional debe ser de tipo operatorio. El invariante operatorio puede definirse como la estructura de regularidad de una práctica que define su *esquema*. Con tal fin, Vergnaud (1990) introduce la noción de "concepto-en-acto" y "teorema-en-acto" para indicar el conocimiento contenido en los esquemas. Sobre la base de la noción de esquema y de invariante operatorio, recordamos la famosa y muy citada definición de *concepto* dada por Vergnaud (1990); el concepto C sería en esta teoría la tripla ordenada (S, I, *S*) en la cual:

> S es el conjunto de las situaciones que le dan significado al concepto (el *referente*);
> I es el conjunto de invariantes en el que se basa el funcionamiento de los esquemas (el *significado*);
> *S* es el conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus procedimientos, las situaciones y los procedimientos (el *significante*). (D'Amore, 2006a, p. 220)

Con respecto a la definición de Vergnaud, D'Amore y Fandiño Pinilla (2018) observan que:

> Esta posición, que en el pasado fue fuertemente examinada por todos los académicos de educación matemática, ahora ha caído un poco en desuso, para dar cabida a nuevos conceptos; en nuestra opinión, esta posición de Vergnaud es una idea precursora tanto de la noción de actividad reflexiva en la teoría de la objetivación de Luis Radford (Radford, 2006b; Santi, 2011), como de la noción de *prácticas operacionales y discursivas* en la teoría EOS de Juan Diaz Godino (Godino, & Batanero, 1994; D'Amore, Font, & Godino, 2007; D'Amore & Godino, 2007). (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2018, p. 272)

Vergnaud, por lo tanto, parece anticipar y abrir el camino a las *teorías pragmáticas* (D'Amore, 2003, 2005) en la educación matemática, teorías que otorgan un papel central a la *noción de práctica* en la caracterización de los objetos matemáticos.

> Por lo tanto, los objetos matemáticos son símbolos de unidades culturales que surgen de un sistema de usos que caracterizan las pragmáticas humanas (o, al menos, de grupos homogéneos de individuos) y que se modifican continuamente con el tiempo, dependiendo también de las necesidades. De hecho, los objetos matemáticos y el significado de estos objetos dependen de los problemas que se enfrentan y de los procesos de su resolución. (D'Amore, 2005, pp. 5–6)

En estas teorías, la relación significado-significante se atenúa y el *significado* de un concepto/objeto matemático puede identificarse con el contexto de uso en el cual se utilizan las expresiones lingüísticas. De hecho, el conjunto de usos determina el significado de los objetos matemáticos, reconociendo una superposición entre la semántica y la pragmática. En esta oración podemos entrever la posición de Wittgenstein (1953) quien en sus célebres "Investigaciones filosóficas" revolucionó la teoría del significado, no solo en el ámbito de la matemática, reconociendo que el significado de las expresiones lingüísticas depende de su función en un "juego lingüístico" caracterizado, como todo juego, por reglas específicas que determinan su uso y su propósito concreto.

Desde esta posición, *pensar, conocer y aprender*, tienen la misma naturaleza que el sistema de prácticas de donde emergen los objetos matemáticos. Se debe renunciar al conocimiento objetivo y absoluto, accesible a través de la observación y el descubrimiento. Pensar, conocer y aprender son prácticas que se desarrollan en determinados contextos socioculturales, realizadas y compartidas por seres humanos. La introducción de esta perspectiva en la educación matemática ha llevado a un punto de inflexión "antropológico" en esta disciplina, "que privilegia al ser humano, en el complejo proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática y en la determinación del proceso de conceptualización" (D'Amore, 2005, p. 1).

La TO realiza plenamente el giro antropológico descrito anteriormente, en el sentido de las teorías pragmáticas. El ser humano, que en el caso de la enseñanza de la matemática es el estudiante y al que Radford dedica su atención, no es un individuo capaz de autorregularse, sino un *sí mismo comunitario* (Radford, 2008, p. 229) que actúa y aprende a actuar en la comunidad de la clase, interactúa con los demás, abierto a escuchar otras voces y otros individuos. En la pragmática invocada por la TO, entendida como actividad reflexiva mediada, el aprendizaje no es solo un proceso de conocimiento sino también un llegar a ser, que transforma al alumno en un individuo capaz de *ser-con-los-demás* (Radford, 2008, p. 229). El actuar humano, reflexivo y mediado, es una forma de ser; Wittgenstein (1953) hablaría en este caso de una "forma de vida". Esta nueva dimensión que coloca al ser humano, producido social y culturalmente, al centro del pensamiento y del aprendizaje, nos obliga a reconsiderar la naturaleza de las habilidades y de los llamados niveles de competencia.

La visión clásica de la educación matemática, que considera el conocimiento matemático como un conjunto de nociones que las mentes "desencarnadas" deben almacenar y reelaborar, reduce la matemática a un bien de consumo e instaura una separación entre conocer y ser. Por lo tanto, la competencia se entiende exclusivamente como un hacer matemática, en el sentido de realizar cálculos, resolver problemas, coordinar inferencias, etc., excluyendo o limitando la dimensión social, cultural, afectiva y metacognitiva del aprendizaje de la matemática (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2003; D'Amore, Godino, & Fandiño Pinilla, 2008). El enfoque sociocultural en el cual se inserta la TO restablece la unidad entre el saber y el ser, considerando el aprendizaje como un modo de ser a través del cual mirar, comprender e interpretar la realidad histórica a la que pertenece el individuo. La competencia ya no puede considerarse solo como una respuesta eficaz a ciertos estímulos, sino también como una disposición afectiva y metacognitiva que actualiza el conocimiento matemático en la práctica individual y social. Fandiño Pinilla (2003), siguiendo este punto de vista, introduce la noción de *competencia matemática* la cual se reconoce cuando "un individuo ve, interpreta y se comporta en el mundo en un sentido matemático" (p. 265). Para un análisis en profundidad de esta acepción de competencia, se remite al lector al artículo que se acaba de mencionar y a D'Amore (2003, 2005).

La TO lleva a sus últimas consecuencias la vuelta antropológica en la educación matemática, asignando a la enseñanza-aprendizaje de la matemática una dimensión política y ética. El aula de matemática se configura como un espacio social (que puede parecer utópico) en el cual el ser y el saber activan un cambio de cada uno de los individuos hacia la construcción de su identidad, el respeto por los demás, la inclusión, la crítica y la comprensión recíproca para comprender y resolver conflictos, el compromiso por el bien del otro y el bien de la comunidad. (Para una profundización sobre los aspectos éticos y políticos de la educación matemática, remitimos a: Ernest, 2018; Radford, 2008, 2012; Valero, 2012).

Después de la aparente digresión sobre las implicaciones antropológicas de la TO, retomamos el tratamiento epistemológico de los conceptos/objetos matemáticos desde la posición pragmática en la cual se inserta la perspectiva semiótico-cultural de Radford. Observamos que los aspectos antropológicos, éticos y políticos no son el trasfondo sobre el cual se desarrolla la práctica matemática, sino que la constituyen y están indisolublemente vinculados a la cognición, al aprendizaje y a los procesos de significación en la matemática.

En la sección 2 describimos la caracterización, como actividad reflexiva mediada, de la noción de práctica propuesta por la TO. A continuación, resumimos sus características distintivas. (Véase Fig. 1).

- La actividad, que Radford también llama *praxis*, es una *dialéctica*, en el sentido marxista, entre la dimensión objetiva y subjetiva que se unen en la acción y se estimulan mutuamente. Lo subjetivo y lo objetivo están siempre en movimiento y en transformación de acuerdo con las posibilidades del trasfondo histórico-cultural que determina tanto la forma de la actividad como las formas del conocer en términos de problemas relevantes, metodologías, formas de racionalidad, sistemas de verdad, etc. que se consideran culturalmente válidos. El trasfondo cultural que regula las formas de la *praxis* se configura como una superestructura simbólica que Radford (2003,

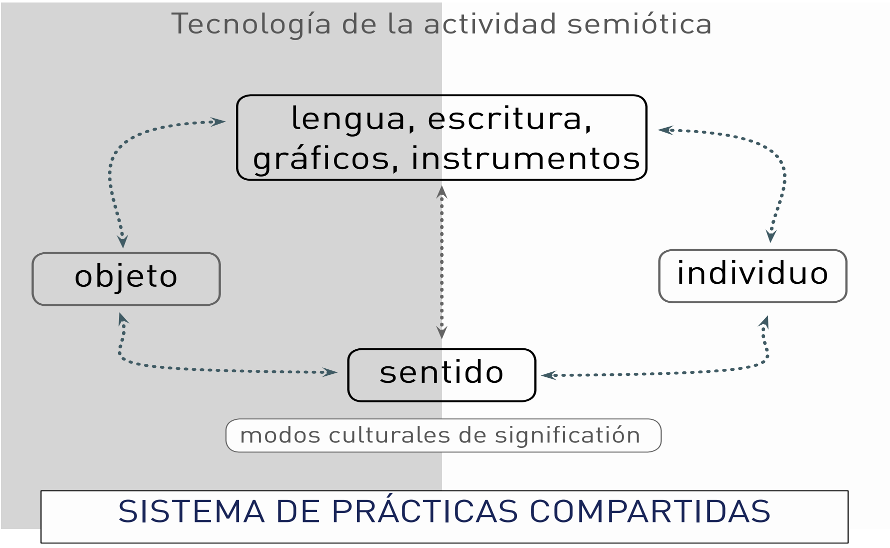

Figura 1: La noción de praxis como dialéctica entre dimensión objetiva y subjetiva

2008) llama *sistemas semióticos de significación cultural* (SSSC).

- La actividad está *mediada* por artefactos que materializan el pensamiento y extienden la actividad más allá de la dimensión puramente mental para incluir la percepción, el movimiento, las sensaciones y la dimensión afectiva. Los artefactos condensan el desarrollo histórico y cultural del saber matemático y son portadores de una inteligencia interpersonal que ha evolucionado a lo largo de los siglos.
- La actividad es *reflexiva* en el sentido que el individuo, a través de artefactos, está en una relación dialéctica con su realidad histórica. La reflexión es *compartida socialmente*, ya que la interacción con los otros (que saben cómo reconocer la inteligencia histórica contenida en los artefactos) le permite al individuo interactuar dialécticamente con la realidad histórica de acuerdo con las normas establecidas por los SSSC.

Partiendo de la noción de actividad reflexiva mediada, la TO delinea con precisión los objetos matemáticos, así como el pensar, conocer y aprender en matemática.

Los objetos matemáticos "son patrones fijos de la actividad reflexiva humana incrustados en el mundo continuamente cambiante de la práctica social mediada por artefactos" (Radford, 2008, p. 222). Reconocemos en esta definición el eco de los invariantes operatorios de Vergnaud descritos anteriormente.

De manera coherente con el programa pragmatista, la TO identifica el *significado* en matemática con la actividad reflexiva mediada en su carácter histórico-cultural y social. Radford (2006) considera el significado como un constructo con dos caras, como las dos caras de la misma moneda, que expresa la relación reflexiva entre el individuo y su realidad cultural: una cara se refiere al *significado subjetivo* que se deriva de la experiencia personal del individuo, la otra cara se refiere al *significado cultural* que se reifica en la cultura como un patrón fijo de la práctica social. Esta naturaleza doble del significado amplía y profundiza las aproximaciones hacia el significado en matemática que, desde diferentes puntos de vista, ya habían sido introducidas por Chevallard (1992) y por Godino y Batanero (1994).

Pensar y conocer son prácticas de pensamiento precisamente en el sentido de una actividad reflexiva mediada. Pensar y conocer no se consideran ya como procesos individuales, así como eran consideradas en las posiciones racionalistas que han dejado de lado los aspectos culturales y sociales, relegando el pensamiento y el conocimiento a algo "interno" a la mente humana, sino que ahora es intrínsecamente social y vinculado a toda la riqueza del ser humano que no solo está hecho de mente sino también de cuerpo, sentir y afectividad.

La TO considera el *aprendizaje* como una acción reflexiva particular que permite a los individuos dar significado, de acuerdo con las posibilidades de los medios semióticos que median la actividad, a los objetos matemáticos histórica y culturalmente constituidos (Radford, 2008). La TO considera esta actividad específica un proceso de *objetivación* la cual, en el sentido etimológico del término, le permite al estudiante tomar conciencia del saber matemático. Los

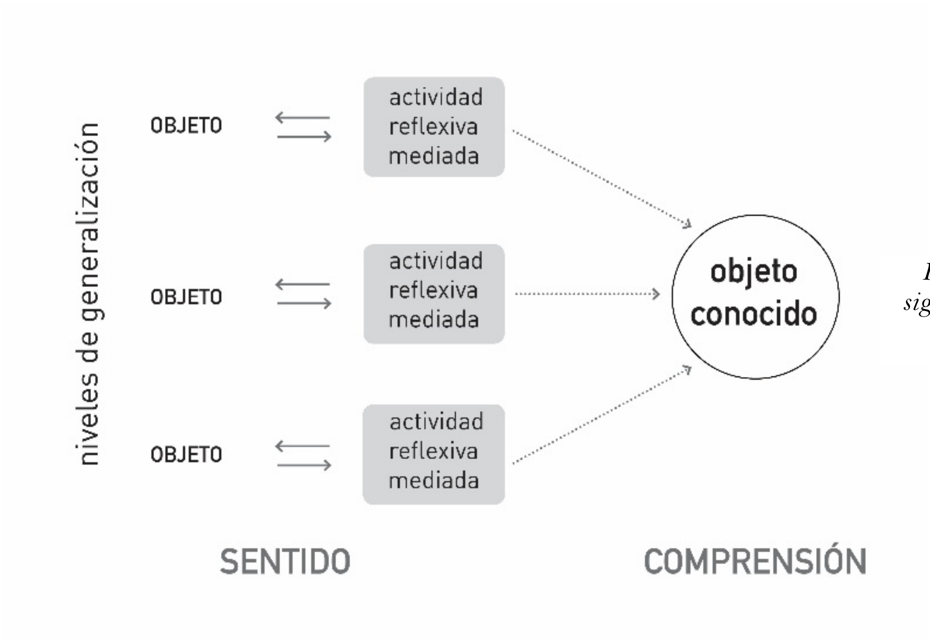

Figura 2: Convergencia entre significado personal y significado cultural.

artefactos que median la actividad reflexiva, en el caso del aprendizaje, se denominan *medios semióticos de objetivación*. Especificamos que este "poner ante" no es un acto mental y autónomo. Por un lado, es cierto que la objetivación es un movimiento, en un sentido fenomenológico, de la flecha intencional hacia el objeto del conocimiento, pero este movimiento no es un acto puro de conciencia, ya que ocurre en la práctica que entrelaza dialécticamente el sujeto, los artefactos y los SSSC. Por otro lado, la objetivación es el resultado de una labor conjunta (*joint labour*) que involucra a estudiantes y maestro en el objetivo común de producir conocimiento matemático.

La sutil distinción entre pensar y aprender identificada por la TO tiene importantes consecuencias desde un punto de vista epistemológico y educativo. En el desarrollo histórico de la matemática, los objetos matemáticos emergen de la actividad reflexiva mediada, no teniendo ninguna existencia a priori y objetiva. En la fase de aprendizaje, los objetos matemáticos existen, no en el sentido del realismo conceptual descrito anteriormente, sino en la dimensión histórico-cultural del estudiante. El aprendizaje, por lo tanto, no puede ser solamente un proceso de construcción de un objeto/concepto matemático, sino un proceso de significación, en el cual, a través del trabajo conjunto que involucra al maestro y los estudiantes, el significado personal del estudiante se alinea con el significado cultural de la matemática. (Véase Figura 2).

El propósito educativo de la enseñanza de la matemática es ubicar al estudiante en su dimensión cultural y social, respetando su sensibilidad y su historia personal. Esta ubicación es dinámica, capaz de acoger la transformación continua de la realidad individual y social a la cual pertenece. En este sentido, la *objetivación* está dialécticamente vinculada a la *subjetivación* entendida como el posicionamiento del individuo en el mundo social, de acuerdo con las posibilidades y límites de los SSSC que regulan la práctica reflexiva en la cual está involucrado.

D'Amore (2005) y D'Amore y Godino (2006) muestran cómo las teorías realistas y pragmáticas no están en contradicción, sino que se complementan entre sí. Por un lado, los objetos matemáticos no tienen un carácter a priori y objetivo y no tienen significado por fuera de la actividad reflexiva. Por otro lado, en cuanto esquemas fijos, adoptan una forma de existencia autónoma e interpersonal, no en un dominio ideal sino en la cultura. Para superar la dicotomía entre realismo y pragmatismo, debemos repensar la ontología de los objetos matemáticos, cuyo carácter ideal no se encuentra en el mundo de las ideas platónicas o en las ideas absolutas del racionalismo. Con respecto a esto, Ilyenkov (1977) observa:

> La "idealidad" es más bien como un sello impreso en la esencia de la naturaleza por la actividad social de la vida humana, una forma del funcionamiento de lo físico en el proceso de esta actividad. Así que todas las cosas involucradas en el proceso social adquieren una nueva "forma de existencia" que no está in-

cluida en su naturaleza física y difiere completamente de ella – [esta es] su forma ideal. (Ilyenkov, p. 86)[9]

Después de haber mostrado cómo la TO, en una perspectiva sociocultural, establece la complementariedad entre las teorías realistas y pragmáticas, describimos cuál es la actitud necesaria que se debe tener frente a la semiótica, mostrando cómo la rama de estudio de los triángulos semióticos no puede eliminarse a favor de los medios semióticos de objetivación. En los niveles más altos de generalización matemática, como en el álgebra, es necesario establecer una semántica referencial (a la manera de Duval) entre el signo y el objeto matemático (objeto interpersonal e ideal que existe en la cultura) en una red de transformaciones de tratamiento y conversión. Wittgenstein (1953) señala que el carácter denotativo del lenguaje es uno de los posibles "usos", uno de los posibles juegos lingüísticos que podemos traducir en la terminología de la TO como una posible actividad reflexiva mediada. Desde un punto de vista didáctico, es fundamental exponer al alumno a los dos tipos de significado, para que él, en su camino de aprendizaje, llegue a alinear el significado personal y el significado cultural. Si se excluye la dimensión pragmática del significado, el estudiante, víctima de la paradoja cognitiva de Duval (1995) (véase también: D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Matteuzzi, 2015), resultará manipulando símbolos vacíos de significado que tratará como *los* objetos matemáticos concretos. Si, en cambio, se excluye la dimensión realista del significado, el estudiante no podrá realizar las manipulaciones simbólicas que están en el corazón de la matemática. D'Amore y Fandiño Pinilla (2007) expresan esta doble naturaleza del significado:

> El proceso de dotación de significados se mueve al mismo tiempo dentro de varios sistemas semióticos, activados simultáneamente; no estamos tratando con una dicotomía clásica pura: tratamiento/conversión, que deja el significado prisionero de la estructura semiótica interna, sino con algo mucho más complejo. Idealmente, desde un punto de vista estructural, el significado debe venir del interior del sistema semiótico en el cual estamos inmersos. Por lo tanto, [...] el paso puro de $(n-1)+n+(n+1)$ a 3n debe situarse en la categoría: transformación semiótica de tratamiento. Pero lo que sucede en la práctica del aula, y no sólo con los principiantes en el álgebra, es diferente. Existe todo un camino por recorrer, que parte de los significados específicos únicos culturalmente asignados a los signos del lenguaje algebraico ($3n$ es el triple de algo; $101{\times}50$ es un producto, no una suma). Por lo tanto, hay fuentes de significados relativos al lenguaje algebraico que se anclan a significados culturalmente construidos, previamente en el tiempo; tales significados a menudo tienen que ver con el lenguaje aritmético. Desde un punto de vista, por así decirlo, "externo", nos podemos remontar a ver los diferentes escritos algebraicos como equisignificantes, ya que se pueden obtener a través de un tratamiento semiótico, pero desde el interno esta visión es casi imposible, ligada como lo es a la cultura construida en el tiempo por el individuo. En otras palabras, podemos decir que los estudiantes (no sólo los novatos) encuentran límites a las fuentes de significado que no pueden ser simplemente gobernadas por la sintaxis del lenguaje algebraico. Cada pasaje da lugar a formas o símbolos a los cuales se les reconoce un significado específico debido a los procesos culturales a través de los cuales se ha introducido. (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007, págs. 2-3)[10]

[9] 'Ideality' is rather like a stamp impressed on the substance of nature by social human life activity, a form of the functioning of the physical thing in the process of this activity. So, all the things involved in the social process acquire a new 'form of existence' that is not included in their physical nature and differs from it completely – [this is] their ideal form. (Ilyenkov, p. 86)

[10] The process of meanings endowment moves at the same time within various semiotic systems, simultaneously activated; we are not dealing with a pure classical dichotomy: treatment/conversion, that leaves the meaning prisoner of the internal semiotic structure, but with something much more complex. Ideally, from a structural point of view, the meaning should come from within the semiotic system we are immersed in. Therefore, [...] the pure passage from $(n-1)+n+(n+1)$ to $3n$ should enter the category: treatment semiotic transformation. But what happens in the classroom practice, and not only with novices in algebra, is different. There is a whole path to cover, that starts from

D'Amore (2006b), D'Amore y Fandiño Pinilla (2007), Santi (2011a, 2011b) y Rojas (2012) muestran cómo el enfoque con el que se aborda el significado en la TO interpreta eficazmente el fenómeno de la pérdida del sentido de los objetos matemáticos que se manifiesta incluso solo cuando la manipulación de signos se reduce a la aplicación de reglas de codificación y decodificación.

4 Más sobre el concepto de "labor conjunta"

En Radford (2016b) encontramos la descripción más simple y convincente de cómo debe ser entendido el concepto de "labor conjunta" en el aula, en la relación comunicativa docente-alumno y en el intercambio cultural, social y de aprendizaje que hace real el proceso de enseñanza-aprendizaje:

> El concepto de labor conjunta, que en la teoría de la objetivación juega un papel central, ofrece una re-conceptualización de la enseñanza y del aprendizaje. En el trabajo conjunto el papel de los alumnos no se reduce a ser sólo sujetos cognitivos. No asumen el papel de sujetos pasivos que reciben el conocimiento ni el de sujetos auto-contenidos que construyen su propio conocimiento. De igual forma, los docentes no se reducen al papel de agentes tecno-lógicos y burócratas-guardianes e implementadores del currículo. No son los poseedores del saber que consignan o transmiten el conocimiento a los estudiantes directamente o a través de estrategias de sostenimiento estructurado. La noción de labor conjunta sugiere adoptar una perspectiva educativa en la cual se concibe la enseñanza y el aprendizaje no como dos actividades separadas sino como una sola y la misma actividad: aquella en la cual los docentes y los alumnos, incluso si no hacen las mismas cosas, se esfuerzan juntos, intelectual y emotivamente, en la realización de una labor en común. (Radford, 2016b, pp. 4–5)

En esta larga y densa frase hay que resaltar varios aspectos (D'Amore, 2015).

El primero es la idea hegeliana de *obra común* o *trabajo común* (Hegel, 1837/2001). Tomando desde Hegel (1820/1979, 1807/1995), se puede afirmar que la labor tiene su base en el reconocimiento del "ser para sí", es decir la persona. La persona es al mismo tiempo trabajadora y consumidora y esto es reconocido por la persona misma y por los otros; esta voluntad-deseo de ser reconocida como tal en estos dos aspectos al tiempo, Hegel la llama "abstracción general del ser para-sí". Obtener este reconocimiento es una existencia de voluntad, que pone el individuo en relación con su existencia singular, pero también en relación con los demás. El trabajo transforma y forma el sí mismo individual y el otro en personas, mejor: en personas para cada uno y para el otro: el "hacer" se puede entonces interpretar como un "hacer respecto al otro". Así que la labor ya no es un hecho singular, sino algo común.

El segundo aspecto que hay que resaltar tiene que ver con la primera parte de la frase anterior de Radford:

> La noción de labor conjunta sugiere adoptar una perspectiva educativa en la cual se concibe la enseñanza y el aprendizaje no como dos actividades separadas sino como una sola y la misma actividad: aquella en la cual los docentes y los alumnos, incluso si no hacen las mismas cosas. (Radford, 2016b, pp. 4–5)

Esta tiene como base la idea que la labor conjunta necesita y se basa sobre la pluralidad de los que trabajan ya no individualmente sino coralmente; y en este trabajo coral, por supuesto, como es característica del ser humano, se pueden generar incomprensiones, tensiones, faltas de consenso y contradicciones. Lo veremos otra vez dentro de poco.

single specific meanings culturally endowed to the signs of the algebraic language ($3n$ is the triple of something; 101×50 is a product, not a sum). Thus, there are sources of meanings relative to the algebraic language that anchor to meanings culturally constructed, previously in time; such meanings often have to do with the arithmetic language. From a, so to speak, "external" point of view, we can trace back to seeing the different algebraic writings as equisignificant, since they are obtainable through semiotic treatment, but from inside this vision is almost impossible, bound as it is to the culture constructed by the individual in time. In other words, we can say that students (not only novices) turn out bridled to sources of meaning that cannot be simply governed by the syntax of the algebraic language. Each passage gives rise to forms or symbols to which a specific meaning is recognized because of the cultural processes *through* which it has been introduced. (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007, pp. 2-3)

Tercera y última nota, a propósito de la segunda parte de la frase de Radford: "se esfuerzan juntos, intelectual y emotivamente, en la realización de una labor en común" (Radford, 2016b, p. 5).

Hay que recordar que para Hegel (1837/2001) lo que cuenta en la vida de un individuo es su actividad conjunta con otros seres humanos en el proceso de producción; el ser humano coincide con lo que produce en esta labor conjunta. Él, en su existencia, acepta no tanto una labor individual, sino una labor conjunta en cuanto quiere mostrarse al mismo tiempo productor y consumidor. Naturalmente, en cuanto seres humanos, una labor conjunta nos impulsa a actuar, pensar, reflexionar, operar en una posible comunalidad con otros individuos, lo cual lleva a realizar sí una obra común, pero son posibles discusiones, desacuerdos, discordancias, tensiones, ocasiones de desequilibrio. Pero es precisamente todo esto lo que crea la obra común para Hegel y que nosotros aceptamos como modelo de lo que sucede en la labor conjunta en un aula escolar.

Las concepciones de labor y labor conjunta expresan la relación dialéctica entre subjetivismo y objetivismo (D'Amore, 2018).

Dado que se citan "elementos objetivos", entramos en primer lugar en la eterna confrontación filosófica entre "objetivismo" y "subjetivismo".

Se habla normalmente de elementos objetivos a propósito de la realidad en la cual se desarrolla una determinada acción humana y en la que dicha acción se manifiesta; el ambiente real y las formas de presentación de estas. Objetivismo es entonces la toma de consciencia de los elementos objetivos.

Se habla de elementos subjetivos cuando se hace referencia a una actividad (teórica o práctica) de un individuo específico o del grupo al cual pertenece o a la cual el individuo hace referencia en el curso de dicha actividad. Subjetivismo entonces es la toma de consciencia de los elementos subjetivos.

Los términos "objetivismo" y "subjetivismo" aparecen generalmente en contraposición en cuanto complementarios, pero determinan la historia juntos y no separadamente, ya se trate de la historia objetiva de los hechos, de los eventos, del pensamiento, de los procesos y de los fenómenos, o de la historia de cada uno de los sujetos que están participando. Esto muestra la estrecha relación entre los dos términos.

Precisamente, estableciendo una relación entre objetivismo y subjetivismo, Marx (1852/1944) escribe: "Los hombres hacen su propia historia, pero no la hacen de forma arbitraria, en circunstancias elegidas por ellos mismos, sino en las circunstancias que ellos encuentran inmediatamente delante de sí, determinadas por los hechos y por la tradición" (p. 9).

Gracias a estas consideraciones e interpretando de forma oportuna la idea de historia, se puede evidenciar cómo la situación concreta en la cual actúa un individuo no es autónomamente describible sin centrar la atención en el sujeto; y, por el contrario: el sujeto resulta determinado también por la situación objetiva en la cual está inmerso.

Sujeto y objeto están, por tanto, fuertemente relacionados y condicionados, siendo difícilmente separables.

Si tenemos un sujeto y una situación, entonces los objetos y las acciones o las actividades que conforman la situación son vistos, considerados, analizados, hechos parte propia por los mismos sujetos; es esta, según nuestro punto de vista, una forma oportuna de presentar el proceso de objetivación.

Desde el punto de vista marxista, el ejemplo más conocido es el del trabajo, entendido como actividad humana en la que los sujetos se ocupan al interior de una situación objetiva: el trabajo se objetiva en su producto. Es muy conocido que este análisis lleva a Marx a las ideas de alienación y distanciamiento. De hecho, no es casualidad que también Radford estudie estos procesos:

> La alienación consiste [...] en el hecho preciso de que el objeto producido ya no es la *expresión del individuo*. [...] Lo que es alienante aquí es, por lo tanto, la pérdida de la expresividad de la vida en el objeto. Para decirlo sucintamente, la alienación es la pérdida de la objetivación. La pérdida de objetivación, es decir, la pérdida de la auto-expresión en el objeto, sólo puede ser alienante para una especie, como la nuestra, para la cual la objetividad es parte de su naturaleza. En lugar de expresión, logro y autorrealización, tenemos un producto que se convierte en una cosa. (Radford, 2016a, p. 261)[11]

[11] Alienation consists [...] in the precise fact that the produced object is no longer the *individual's expression*. [...] What is

5 Conclusiones

La TO ha jugado un papel muy importante en la evolución y en la problematización de algunos aspectos fundamentales para la educación matemática.

Ha contribuido a ampliar la perspectiva semiótica en la educación matemática, mostrando cómo el enfoque estructural de la semiótica no es suficiente para enmarcar el aprendizaje en su dimensión sociocultural, a través de la activación de recursos semióticos que pueden ser de una naturaleza muy diferente a la de aquellos comúnmente aceptados por el lenguaje matemático, como lo pueden ser gestos, ciertos artefactos materiales, ritmo, etc. Al mismo tiempo, hemos mostrado que, con respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, el enfoque sociocultural "semióticamente extendido" a todos los medios semióticos con los cuales los individuos interactúan dialécticamente, en los que se basa la teoría de la objetivación de Radford, no está en antítesis con el enfoque cognitivo semióticamente relacionado a la teoría de los registros semióticos para el análisis del funcionamiento cognitivo del pensamiento y la conceptualización en matemática, en el que se basa el enfoque semio-cognitivo de Duval, en el momento en que el objeto matemático puede considerarse como realmente existente y semióticamente accesible en la dimensión histórico-cultural del alumno.

En la TO, pensar y conocer no son solo actividades reflexivas mediadas, también son actividades intrínsecamente sociales que involucran al ser humano en su totalidad como ser social. El aspecto sociocultural que representa la base misma de la TO determina, junto con el aspecto semiótico, la concepción misma del aprendizaje vista como una acción reflexiva particular mediada por artefactos, que permite a los individuos darle significado, recurriendo a medios semióticos de objetivación, a los objetos matemáticos histórica y culturalmente constituidos. La cuestión ontológica en la TO es objeto de una profunda transformación con respecto a una posición realista, colocando el objeto matemático en el centro de la actividad humana, de la cual este emerge como un esquema fijo, reconocible y objetivable, pero muy lejos del realismo conceptual de las concepciones platonistas.

Sin embargo, la TO no se limita a la redefinición de los aspectos semióticos y ontológicos; va más allá, al rediseñar la idea misma de aprender en un contexto mucho más amplio, que implica la subjetivación, entendida como la dimensión que contempla la posición del individuo en la sociedad y determina su forma de considerar e interpretar la realidad histórica y cultural en la cual está inmerso. Esto no significa, sin embargo, que los resultados obtenidos por la (o a través de la) TO sean sólo locales, es decir, no prolongables más allá de los límites, por indefinidos que sean, de una sociedad específica o de una cultura específica. Los factores invariantes que la TO resalta no están en realidad relacionados con la forma en la cual un individuo específico evoluciona al interior de su hábitat histórico, cultural y social como también semiótico, sino que son invariantes relacionados con los conceptos mismos de historia, de cultura, de sociedad y de producción semiótica. De hecho, la TO es sin duda un ejemplo muy significativo de lo que Assude, Boero, Herbst, Lerman y Radford (2008) llaman *grandes teorías* (*grand theories*), es decir, teorías cuyo objetivo es proporcionar respuestas a preguntas como *¿Cuál es el campo de la educación matemática?* (*¿What is the mathematics education field?*), aunque algunos aspectos están relacionados con aquellas *teorías* que los mismos autores llaman *de rango medio* (*middle range theories*), cuya característica es la de responder a preguntas tales como *¿Qué es la enseñanza de matemáticas en el aula?* (*¿What is classroom mathematics instruction?*) junto con las *teorías* que llaman *locales* (*local theories*), cuya característica es la de responder a preguntas como *¿Qué niveles de desarrollo existen en el aprendizaje de las fracciones por parte de los estudiantes?* (*¿What levels of development exist in students' learning of fractions?*) (Assude et al., 2008, p. 3). En efecto, la TO proporciona respuestas relacionadas con el aprendizaje de contenidos matemáticos específicos (por ejemplo, extraídos del álgebra), tanto en relación con lo que debe entenderse con actividades formativas en la clase de matemática (especialmente a través del concepto de trabajo conjunto),

alienating here is hence the loss of expressivity of life in the object. To put it succinctly, alienation is the loss of objectivation. The loss of objectivation – i.e., the loss of self-expression in the object – can only be alienating for a species, like ours, for which objectivity is part of its nature. Instead of expression, achievement, and self-realization, we have a product that becomes a thing. (Radford, 2016a, p. 261) como en relación con asuntos relacionados con preguntas como: ¿qué es la didáctica de la matemática como disciplina?, (por ejemplo, a través de los conceptos de objetivación, subjetivación y alienación). Por lo tanto, el individuo al cual hace referencia la TO y que es social y culturalmente determinado a través de la producción semiótica de su propia cultura y pertenencia social, es un individuo *genérico*, inmerso en una cultura y en una práctica social *genéricas*, pero que se pueden especificar cuando sea necesario.

Al mismo tiempo, sin embargo, en la TO, la acción misma del individuo no puede separarse de la situación concreta en la que tiene lugar y que a su vez determina su modo de ser, convirtiéndola así en una acción dialéctica que une sujeto y objeto en una actividad de constante codeterminación. Es precisamente en este contexto que la naturaleza del aprendizaje auténtico y significativo para el individuo se vuelve clara, un aprendizaje que produce competencia, en oposición a un aprendizaje puramente nocional: la objetivación tiene lugar y, en consecuencia, puede dar lugar a la subjetivación, solo si su producto es una expresión auténtica de la vida del ser y no un objeto, una *cosa*.

Sin embargo, considerar la TO solo desde el punto de vista de los aspectos particulares a cuya evolución contribuyó sería reductivo para una teoría que marcó un punto de inflexión de época en la educación matemática. De hecho, desde un punto de vista global, uno de sus aspectos más interesantes tal vez radica en su enfoque sistémico del aprendizaje, en el cual este se define a niveles cada vez mayores de complejidad. En particular, la TO parece proponerse ella misma como un sistema autopoiético, es decir, un sistema que produce sus propios elementos básicos que a su vez reproducen recursivamente los elementos que los producen (Varela, Maturana, & Uribe, 1974; Maturana & Varela, 1980). Aunque sea claro que dicho sistema no puede aislarse del entorno en el cual está inmerso (y el hecho de que los sistemas de instrucción están fuertemente determinados por factores sociales, culturales y políticos es un testimonio de ello), es un sistema completamente determinado por sus propias estructuras. Por lo tanto, el "sistema TO" se presenta como una estructura "viva", capaz de filtrar las influencias externas y de transformarlas sobre la base de sus necesidades determinadas por la interacción entre sus elementos. Se trata de un sistema con una coherencia interna, independiente del contexto en el cual está inmerso, pero que produce ciertos "comportamientos" en función del entorno en el que está inmerso y que él mismo contribuye a modificar a través de su propia acción. Desde el punto de vista global, por lo tanto, la TO puede verse como un "organismo" abstracto que representa el aprendizaje en su complejidad; una estructura "viva" que puede encontrar su propia interpretación tanto en términos de aprendizaje auténtico como en términos de aprendizaje alienante, incluyendo todos los matices posibles entre estos dos extremos, dependiendo del contexto en el que está inmersa y con el que se comunica.

Quizás es precisamente la necesidad de que esta perspectiva global sobre la TO la que aclara en qué sentido está muy lejos de ser (incluso y especialmente en sus desarrollos más recientes) una utopía del aprendizaje más que una epistemología del aprendizaje. De hecho, una perspectiva global así deja en claro la necesidad de distinguir entre una dimensión normativo-explicativa, por un lado, y una descriptivo-explicativa, por el otro, de una teoría en la educación matemática. La TO no surge de una descripción del aprendizaje, tal como este se delinea por lo general en un aula de matemática; sus referencias no son a clases o alumnos en entornos educativos estándar, cuyo aprendizaje se trata de estudiar, describir y teorizar. En la TO no se buscan, para estudiar, entornos educativos estadísticamente representativos, como garantía de su posible generalización en contextos más amplios. En la TO, el entorno educativo, incluidas las modalidades de interacción entre los actores involucrados, se crea *ad hoc*, como elemento de un modelo de la teoría misma, un modelo dinámico del aprendizaje, muy plausible debido a su alta coherencia interna, más allá de su puesta a prueba en la realidad. La TO, a diferencia de otras teorías en educación matemática, no nace de un análisis con fines de diagnóstico, sino que surge como un análisis de la naturaleza misma del aprendizaje, independientemente del contexto educativo en el cual está inmerso, destacando sus características intrínsecas.

¿La TO, entonces, no puede considerarse solo de una manera autorreferencial? ¿No es posible una coordinación con otras teorías u otros enfoques? A primera vista, parece que la respuesta a esta pregunta debe ser afirmativa: la TO es autosuficiente y si hay preguntas a las cuales no puede proporcionar una respuesta, las posibles respuestas deben buscarse en todo caso dentro de ella y no a través de la coordinación forzada con otras teorías. De hecho, esta respuesta estaría en línea con el concepto de sistema autopoiético al cual nos hemos referido anteriormente para proporcionar una posible descripción de la TO desde un punto de vista global. Sin embargo, también hemos destacado el hecho de que un sistema autopoiético interactúa con el ambiente y es natural que estas interacciones produzcan reacciones y un intercambio de información.

Es natural que la TO pueda combinarse (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008) con otras teorías en educación matemática, ya que en este caso se trata simplemente de yuxtaponer las teorías con el objetivo de optimizar el estudio de un determinado fenómeno, sin tener por esto que buscar una coherencia completa entre sus primeros principios. Sin embargo, quizás incluso una posible coordinación (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008) entre la TO y otras teorías en la educación matemática no debería necesariamente examinarse en términos estructurales, que requieren un examen de los primeros principios y de los componentes empíricos o praxeológicos de las teorías, destinado a verificar su compatibilidad; en este caso, se trataría de un enfoque estático del problema que solo puede proporcionar respuestas lapidarias. Quizás debería buscarse una alternativa en este sentido en términos de un posible *diálogo en clave hermenéutica* entre las teorías, en la cual los significados de las construcciones teóricas en ambas (la TO y otra teoría que se pretendiera involucrar) se redefinan, de ser necesario, a través de un enfoque interpretativo en el cual las teorías son vistas como sistemas que interactúan al interpretar sus respuestas de acuerdo con la epistemología de su estructura interna. Por lo tanto, no se trataría de una simple contraposición o de una yuxtaposición de teorías, pero tampoco de su coordinación en sentido estricto; sin embargo, las teorías se colocarían en una posición de diálogo entre ellas. Por ejemplo, el concepto del contrato didáctico de la teoría de las Situaciones (TS) no tiene sentido en la TO porque es una señal de la presencia de un entorno que corre el riesgo de ser alienante, ya que no es coherente con la idea de fondo de labor conjunta entre profesor y estudiantes. Sin embargo, la investigación en educación matemática ha mostrado y continúa mostrando (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2019) que el contrato didáctico es una realidad concreta cuya presencia en el aula no se puede negar, callar o evitar por completo. Por lo tanto, parece que la TO niega la existencia de un problema real; es como si estuviera cerrada en sí misma, de manera semejante a una terapia médica capaz de tratar solo aquellas enfermedades que ella misma produjo. Sin embargo, la contradicción que parece surgir aquí puede resolverse utilizando lo que hemos definido previamente como una dimensión normativo-explicativa y una dimensión descriptivo-explicativa de las teorías en la educación matemática. Dado que la TO es una teoría normativo-explicativa y el TS es una teoría descriptivo-explicativa, que surge del estudio concreto de las situaciones en el aula, su comunicación es posible en términos de la *posibilidad de convergencia* de las actividades compatibles con los principios de la una (la TS) hacia el modelo de los resultados de la otra (la TO), más bien que en términos de la compatibilidad de sus primeros principios. Volviendo al ejemplo del contrato didáctico, este constructo podría considerarse, por ejemplo, como un instrumento para medir la distancia de la situación concreta en el aula de lo deseable según la TO, así como un instrumento de acción para su reducción.

Nos parece posible, por lo tanto, afirmar que, además de representar un hito en la evolución epistemológica de la educación matemática como ciencia autónoma, la TO, en cuanto teoría normativo-explicativa, también puede proporcionar un punto de partida para una interpretación alternativa de las relaciones entre teorías y enfoques en educación matemática.

6 Bibliografía

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. En L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *9*(1), 267–299.

Assude, T., Boero, P., Herbst, P., Lerman, S., & Radford, L. (2008). The notions and roles of theory in mathematics education research. En M. Santos & Y. Shimizu (Eds.), *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education* (ICME, pp. 338-356). Monterrey, Mexico: ICMI. Disponible desde https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/About_ICMI/Publications_about_ICMI/ICME_11/Assude.pdf

Bateson, G. (1973). *Steps to an ecology of mind: Collected essays in anthropology, psychiatry, evolution and epistemology.* Frogmore: Paladin.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche antropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), 73–112.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática.* México: Reverté.

D'Amore, B. (2006a). *Didáctica de la matemática.* Bogotá: Magisterio.

D'Amore, B. (2006b). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica.* *20*(4), 557–583.

D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: Una contribución a la teoría de la objetivación. En L. Branchetti (Ed.), *Teaching and Learning Mathematics. Some Past and Current Approaches to Mathematics Education* (pp. 151–171). *Isonomia-Epistemologica. Online philosophical journal of the University of Urbino "Carlo Bo".* Disponible en http://isonomia.uniurb.it/archive_epistemologica_special/201509

D'Amore, B. (2018). Puntualizaciones y reflexiones sobre algunos conceptos específicos y centrales en la teoría semiótico cultural de la objetivación. *PNA*, *12*(2), 97–127.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2003). "Competenze": obiettivo per chi costruisce il proprio sapere. *La matematica e la sua didattica*, *17*(3), 327-338.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations: How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. Rome, *Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI*, March 2008. WG5: *The evolution of theoretical framework in mathematics education.* Disponible en www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2018). Su alcuni termini che hanno avuto ampia rilevanza agli albori della costruzione scientifica della didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, *26*(2), 247–291.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2019). Un effetto del contratto didattico: Immaginare obblighi imposti anche nei "compiti di realtà". *La matematica e la sua didattica*, *27*(2), 161-196.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *18*(2), 177–212. http://www.clame.org.mx/relime.htm doi: 10.12802/relime.13.1822

D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión meta-didáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, *28*(2), 49–77.

D'Amore, B., & Godino, J. D. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, *20*(1), 9–38.

D'Amore, B., & Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *10*(2), 191–218.

D'Amore, B., Godino, J., & Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Competencias y matemática.* Bogotá: Magisterio.

D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos.* Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. T. (2007). *Obstáculos epistemológicos y perspectiva socio-cultural de la matemática.* Colección "Cuadernos del Seminario en educación". Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

De Saussure, F. (1915). *Cours de linguistique générale.* Paris et Lausanne: Payot.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*(1), 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne, Peter Lang.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *16*(3), 349–382.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? En L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Número especial]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *9*(1), 45–81.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations.* Cham: Springer International Publishing.

Ernest, P. (2018). The ethics of mathematics: Is mathematics harmful? En P. Ernest (Ed.), *The Philosophy of Mathematics Education Today* (pp. 187–216). Cham: Springer.

Fandiño Pinilla, M. I. (2003). "Diventare competente", una sfida con radici antropologiche. *La Matematica e la sua didattica*, *17*(3), 260–280.

Geertz, C. (1973). *The interpretation of cultures: Selected essays.* New York: Basic Books.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Hegel, G. W. F. (1995). *Fenomenologia dello spirito.* Milano: Rusconi. (Edic. original 1807).

Hegel, G. W. F. (1979). *Lineamenti di filosofia del diritto.* Roma-Bari: Laterza. (Edic. original 1820).

Hegel, G. W. F. (2001). *The philosophy of history.* Kitchener, ON: Batoche Books. (Edic. original 1837).

Ilyenkov, E. V. (1977). The concept of the ideal. En R. Daglish (Ed.), *Philosophy in the USSR: Problems of dialectical materialism* (pp. 71–91). Moscow: Progress Publishers.

Maturana, H. R., & Varela, F. J. (1980). *Autopoiesis and cognition: The realization of the leaving.* En R. S. Cohen & M. W. Wartofsky (Eds.), *Boston Studies in the Philosophy of Science* (Vol. 42). Dordrecht: Springer Netherlands.

Marx, K. (1944). *Il 18 Brumaio di Luigi Bonaparte.* Roma: De Luigi Editore. (Edic. original 1852).

Merleau-Ponty, M. (1945). *Phénoménologie de la perception.* Paris: Gallimard.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education*, *40*(2), 165–178.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 26–33.

Radford, L. (2000a). Students' processes of symbolizing in algebra: A semiotic analysis of the production of signs in generalizing tasks. En T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81–88). Hiroshima Japan: Hiroshima University.

Radford, L. (2000b). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *42*(3), 237–268.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, *22*(2), 14–23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37–70.

Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*, *18*(1), 4–23.

Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, *19*(2), 191–213.

Radford, L. (2006). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 39–65.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. En L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 215–234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación: El caso de la didáctica de las matemáticas. En J. Vallès, D. Álvarez, & R. Rickenmann (Eds.), *L'activitat docent intervenció, innovació, investigació* (pp. 33–49). Girona, Spain: Documenta Universitaria.

Radford, L. (2012). Education and the illusions of emancipation. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(1–2), 101–118.

Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(1), 7–44.

Radford, L. (2016a). On alienation in the mathematics classroom. *International Journal of Educational Research*, *79*, 258–266.

Radford, L. (2016b). Mathematics education as a matter of labor. En M. A. Peters (Ed.), *Encyclopedia of Educational Philosophy and Theory. Section: Mathematics education philosophy and theory* (pp. 1–6). Singapore: Springer.

Rojas, P. (2012). *Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos* (Tesis doctoral). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Recuperado de: http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/Phd/Rojas%20Garzon/Tesis%20Pedro%20Rojas.pdf

Santi, G. (2011a). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2–3), 285–311.

Santi, G. (2011b). Meaning of mathematical objects: A comparison between semiotic perspectives. En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-7)* (pp. 2503–2512). Rzeszów, Polonia: University of Rzeszów.

Valero, P. (2012). Researching research: Mathematics education in the political. *Educational Studies in Mathematics*, *80* (1–2), 9–24.

Varela, F. J., Maturana, H. R., & Uribe, R. (1974). Autopoiesis: The organization of living systems, its characterization and a model. *Biosystems*, *5*(4), 187–196.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2–3), 133–170.

Vygotskij, L. S. (1962). *Thought and language.* Cambridge, MA: MIT Press.

Vygotsky, L. S., & Luria, A. (1994). Tool and symbol in child development. En R. Van Der Veer & J. Valsiner (Eds.), *The Vygotsky reader* (pp. 99–174). Oxford: Blackwell Publishers.

Wertsch, J. V. (1991). *Voices of the mind: A sociocultural approach to mediate action.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophische Untersuchugen.* Oxford: Blackwell.

Zinchenko, V. P. (1985). Vygotsky's ideas about units for the analysis of mind. En James V. Wertsch (Ed.), *Culture, communication, and cognition: Vygotskian perspectives* (pp. 94–118). Cambridge (NY): Cambridge University Press.

Traducción: Martha Isabel Fandiño Pinilla y Francisco Vargas

Como citar este artículo:

Asenova, M., D´Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Santi, G. (2020). Análisis de algunos aspectos de la teoría de la objetivación. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa.* 5 (2), pp. 33-50.

Presentado: 25/octubre/2019
Aprobado: 13/abril/2020
Publicado: 23/Agosto/2020