RECME Editorial Smart Smath Alianza ASOCOLME - Grupo Editorial GAIA
Revista Colombiana de Matemática Educativa

La relación de dependencia entre variables: Un análisis desde la teoría de la objetivación

Rodolfo Vergel; Liliana González; Isaías Miranda
rodolfovergel@gmail.com; liligonc16@gmail.com; imirandav@ipn.mx
Universidad Distrital Francisco José de Caldas; Universidad Distrital Francisco José de Caldas; Instituto Politécnico Nacional
Colombia; México

Resumen

La reflexión sobre la emergencia y el desarrollo de procesos de generalización, en el marco del álgebra escolar, es un tema relevante en educación matemática. Desde un análisis de tipo microgenético y multimodal estudiamos los procesos de generalización asociados a la relación de dependencia entre variables en un grupo de estudiantes de grado 10° (15-16 años) a partir de una tarea sobre secuencia figural. Usando herramientas analíticas provenientes de la Teoría de la objetivación de Radford analizamos la manera en que los estudiantes *encuentran* la relación de dependencia entre las variables involucradas. Más específicamente, los resultados de los análisis sugieren dos tipos de generalización algebraica (contextual y simbólica) con respecto a la relación de dependencia entre variables, en los cuales identificamos la emergencia y evolución de medios semióticos de objetivación.

Palabras clave: Análisis multimodal, Generalización algebraica simbólica, Generalización algebraica contextual, Medios semióticos de objetivación, Relación de dependencia.

La relación de dependencia entre variables: Un análisis desde la Teoría de la Objectification

Abstract

Reflection on the emergence and development of generalization processes, within the framework of school algebra, is a relevant topic in mathematics education. From a microgenetic and multimodal analysis, we study the processes of generalization of the relationship of dependence between variables in a group of students of grade 10 (15-16 years old) from a task on figurative sequence. Using analytical tools from Radford's theory of objectification, we analyze how students *find* the relationship of dependence between the variables involved. More specifically, the results of the analysis suggest two types of algebraic generalization (contextual and symbolic) regarding the relationship of dependence between variables, in which we identify the emergence and evolution of semiotic means of objectification.

Keywords: Multimodal analysis, Symbolic algebraic generalization, Contextual algebraic generalization, Semiotic means of objectivation, Dependency relationship.

A relação de dependência entre as variáveis: Uma análise da Teoria da Objetificação

Resumo

A reflexão sobre a emergência e o desenvolvimento de processos de generalização, no âmbito da álgebra escolar, é um tema relevante na educação matemática. A partir de uma análise microgenética e multimodal, estudamos os processos de generalização da relação de dependência entre as variáveis em um grupo de estudantes de grau 10 (15-16 anos de idade) de uma tarefa em seqüência figurativa. Usando ferramentas analíticas da teoria da objetificação de Radford, analisamos como os estudantes *encontram* a relação de dependência entre as variáveis envolvidas. Mais especificamente, os resultados da análise sugerem dois tipos de generalização algébrica (contextual e simbólica) em relação à relação de dependência entre variáveis, na qual identificamos o surgimento e a evolução dos meios semióticos de objetivação.

Palavras-chave: Análise multimodal, Generalização simbólica algébrica, Generalização contextual algébrica, Meios semióticos de objetivação, Relação de dependência.

1 Introducción

La propuesta curricular Álgebra temprana sugiere incorporar el pensamiento algebraico de modo coherente y con diferentes grados de profundidad a partir de los primeros años de la educación formal dentro de los currículos de matemáticas (Carraher & Schliemann 2007; Kaput, 1995, 1998, 2000; Radford, 2010a, 2018a; Vergel, 2010). En otras palabras, sugiere facilitar el encuentro de los estudiantes jóvenes con formas de pensar algebraicamente en las cuales el recurso a la simbología alfanumérica estándar propia del álgebra no resulta ser una condición necesaria o suficiente para abordar tareas con contenido algebraico. Esta postura toma distancia de la perspectiva según la cual la actividad simbólica es algebraica (Kaput, Blanton & Moreno, 2008).

De acuerdo con Carraher & Schliemann (2007), el estudio del álgebra con estudiantes jóvenes requiere enfoques diferentes a los usados en secundaria. Estos autores llaman la atención a que expresiones numéricas, gráficos y estructuras lingüísticas especializadas también pueden expresar ideas algebraicas y que el campo de las funciones brinda oportunidades para resaltar el carácter algebraico de diversas situaciones.

La visión acerca del álgebra desde la perspectiva del Álgebra temprana, de acuerdo con Blanton & Kaput (2011), abarca el estudio de: estructuras y sistemas extraídos de cálculos y relaciones (generalización de patrones); relaciones, funciones y variación conjunta y aplicación de un lenguaje simbólico para expresar y apoyar el razonamiento sobre situaciones que se están modelando. Bajo esta perspectiva pueden discernirse las razones que han llevado a mover el foco de atención de los estudios relacionados con las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes en la comprensión del significado del concepto de función (Thomas, 1971; Dreyfus & Eisenberg, 1982; Janvier, 1987; Sierpinska, 1992; Hitt, 1996, 1998) a analizar el surgimiento del pensamiento funcional (Warren & Cooper, 2005; Kaput, 2008; Blanton & Kaput, 2011).

En relación con el estudio de las relaciones de tipo funcional, Blanton & Kaput (2004) sugieren que las maneras en que los estudiantes recurren a descripciones de las relaciones funcionales, las diferentes formas de rastrear y organizar los datos en una situación específica, el uso de operaciones matemáticas para reconocer e interpretar relaciones funcionales y los modos como es expresada la co-variación y la correspondencia entre magnitudes, pueden ser estructuradas desde los primeros grados.

Coincidimos con Cañadas y Molina (2016) respecto que:

> Cuando el foco matemático del pensamiento algebraico se sitúa en las funciones, se habla del enfoque funcional del early algebra. En este enfoque el concepto de función, las relaciones entre las cantidades involucradas, y la variación conjunta entre cantidades son contenidos clave que permiten desarrollar el pensamiento algebraico en estudiantes de primeros niveles educativos. (p. 210)

Al respecto, Radford (2011, p. 23; citado en Vergel y Rojas, 2018, p. 49) plantea que "el pensamiento algebraico temprano se considera que está basado en las posibilidades del estudiante para comprender patrones en formas co-variacionales desarrolladas culturalmente y usarlos para tratar con cuestiones de términos lejanos o no especificados". Luego, parece que, un escenario potencial para motivar el desarrollo del pensamiento algebraico en general y el pensamiento funcional en particular puede ser el trabajo con generalización de patrones (Stacey, 1989; Mason, 1996; Kaput, 1998; Warren & Cooper 2006; Blanton & Kaput, 2011; Radford, 2003, 2008, 2010b; Vergel, 2015a, 2015b, 2016; Vergel y Rojas, 2018) que permita establecer relaciones y poner a prueba propiedades matemáticas promoviendo así la observación, predicción, modelación, argumentación, comprobación de hipótesis, entre otras, que acerquen a los estudiantes a expresiones de generalidad. Al respecto, las investigaciones adelantadas por Radford, (2008, 2009, 2010a, 2010b, 2010c, 2018a) han sugerido una tipología de expresiones de generalidad que pueden verse como ejemplos de formas de pensamiento algebraico (factual, contextual y simbólico) las que retomaremos más adelante.

Es así que, siguiendo a Radford (2010b, p. 55), "la actividad de generalización de patrones ha sido justamente considerada como una de las rutas destacadas para introducir el álgebra en la escuela". Consideramos que posibilitar el estudio de patrones en la clase de matemáticas proporciona elementos de exploración para el reconocimiento de la variación, las regularidades presentes en ellos y la manera en que se relacionan las magnitudes involucradas, las cuales, además, podrían ser expresadas de múltiples maneras. Esta multiplicidad de expresiones juega un rol epistemológico clave en el trabajo con patrones:

> [...] diferentes tipos de representaciones como los gestos, el lenguaje ordinario o técnico, las numéricas (tablas), las gráficas (diagramas) y las icónicas, [...] actúan como intermediarias en la construcción general de los procedimientos, algoritmos o fórmulas que definen el patrón y las respectivas reglas que permiten reproducirlo. (MEN, 2006, p. 67)

La idea de intermediación en la cita anterior la entendemos en el sentido de que las diferentes representaciones semióticas son constitutivas de la actividad y del pensamiento. Por tanto, tareas sobre generalización de patrones vinculadas a secuencias figurales con apoyo tabular resultan ser una fuente de indagación en un esfuerzo por rastrear evidencias que nos permitan reconocer la emergencia de formas de pensar acerca de la relación de dependencia entre las variables asociadas como una de las características del objeto función (como una sucesión de $\boldsymbol{N} \rightarrow \boldsymbol{N}$), desde el estudio de patrones en contextos matemáticos.

Dado que en la actividad matemática se pone de manifiesto que "los procesos de producción de saber están incrustados en sistemas de actividad que incluyen otros medios físicos y sensuales de objetivación (como las herramientas y el discurso) que le dan forma corpórea y tangible" (Radford 2003, p. 41), nuestro interés central corresponde a inquirir acerca de las maneras en las que los estudiantes refieren la relación de dependencia y sus características asociadas a través del uso de diferentes representaciones semióticas.

Este artículo documenta la movilización de recursos cognitivos, físicos y perceptuales que se manifiestan durante la actividad matemática de estudiantes de grado décimo[1] (15 y 16 años), al abordar una tarea que involucró una secuencia figural con apoyo tabular. Tomamos en consideración los elementos funcionales asociados a ella como el reconocimiento de la variación, tipos de variable que intervienen (dependiente-independiente), el establecimiento de una regla general (criterio de correspondencia) y representación simbólica (expresión de tipo funcional), en el proceso de objetivación de la relación de dependencia como una de sus características asociadas.

2 Consideraciones teóricas

2.1 *Sobre la Teoría de la Objetivación (TO)*

La Teoría de la Objetivación (TO), como una perspectiva teórica de la Educación Matemática, sugiere considerar el proceso de enseñanza-aprendizaje como un proceso histórico-cultural, y considera que la acción del docente y la del alumno corresponden a una misma *labor*, esto es, una "*forma social de acción conjunta*"[2] (Radford, 2014a, p. 137). Esta idea pretende subrayar que lo que se produce en la sala de clase, así como las personas que lo producen son todos a la vez componentes de una actividad única.

El pensamiento, según Radford (2010a), se encuentra en estrecha relación con el contexto y la cultura, como una praxis histórica, una práctica social, tangible, mediada por el cuerpo, los signos y los artefactos. En consecuencia, el aprendizaje de los objetos matemáticos se concibe como "la adquisición comunitaria de una forma de reflexión del mundo guiada por modos epistémico-culturales históricamente formados" (Radford, 2006a, p. 124), en ese *proceso de objetivación* entendido, inicialmente, como el punto en que el signo y el pensamiento concurren para dotar de sentido a los objetos conceptuales que los individuos encuentran en su cultura, específicamente, siguiendo a Radford (2014a): "*La objetivación es el proceso social, corpóreo y simbólicamente mediado de toma de conciencia y discernimiento crítico de formas de expresión, acción y reflexión constituidas históricamente y culturalmente*"[3] (p. 141); la objetivación "son los procesos sociales a través de los cuales los estudiantes se *encuentran* frente a formas de pensamiento y acción histórica y culturalmente constituidas y se familiarizan gradualmente con ellas, de una manera crítica" (Radford, 2018b, p. 67). Destacamos aquí la idea de *encuentro* en este proceso de objetivación:

> Cuando encontramos y tomamos conciencia del saber, que, en su independencia con el sujeto, aparece como objekt, nuestra conciencia

[1] De acuerdo con los niveles de la educación formal (preescolar, básica y media) contemplados en el artículo 11 de la ley 115 de febrero 8 de 1994 (Ley general de educación colombiana), los grados décimo y undécimo (10° y 11°) conforman el nivel de educación media.

[2] Énfasis del original

[3] Énfasis del original

> lo aprehende como algo determinado desde el punto de vista de nuestra conciencia de sujeto concreto, como algo significante desde nuestro punto de vista subjetivo. El saber (como objekt) se transforma en actualidad, en un objeto de conciencia. Utilizando estos términos podemos decir que la objetivación es ese movimiento de transformación del objeto cultural en sí (objekt), no reconocido o encontrado hasta entonces, en objeto de conciencia (gegenstand). (Radford, 2018b, p. 67)

Por consiguiente, los objetos conceptuales son producto de la actividad matemática del sujeto, un sujeto concreto y real permeado por las ideas de otros sujetos, de su cultura y su historia (Radford, 2013c), mientras que el "saber corresponde a un proceso de elaboración activa de significados" (Radford 2006a, p. 113), que para su adquisición acude a signos y medios para ello. Bajo estas consideraciones, la TO alude a dos fuentes de elaboración de significados. En primer lugar, el *saber depositado en los artefactos culturales* del entorno los cuales son portadores del saber histórico de la dinámica cognitiva de generaciones anteriores; en segundo lugar, para lograr hacer visible la sabiduría histórica materializada en los artefactos culturales, se requiere ponerlos en acción en situaciones y espacios de interacción directa con otros individuos. De esta manera, *la interacción social* resulta ser esencial para el aprendizaje. Advertimos aquí que la primera responde al carácter material del aprendizaje, entretanto, la segunda brinda rasgos enmarcados en la dimensión social.

Subrayamos el hecho de que los objetos conceptuales de las matemáticas resultan ser entes simbólicos y abstractos, razón por la cual sus diferentes representaciones semióticas son fundamentales e imprescindibles para su comprensión de manera que cada una de ellas pone de relieve atributos diferentes a propósito del objeto matemático. Sin embargo, consideramos también los argumentos respecto a que las representaciones semióticas parecen no ser suficientes para dar cuenta de la complejidad de los procesos de objetivación en situaciones de enseñanza-aprendizaje en el aula de clase dado que las personas tienen a su disposición una amplia gama de medios físicos y sensuales que dan forma tangible al pensamiento convirtiéndolos en constituyentes del acto cognitivo, de la actividad matemática misma, denominados desde la TO *medios semióticos de objetivación* (MSO). La idea de nodo semiótico como segmento de la actividad semiótica quiere destacar el hecho de la coordinación de varios MSO en el trabajo con ideas matemáticas. Más específicamente, esta categoría refiere a un segmento de la actividad semiótica en la que signos provenientes de diferentes sistemas semióticos (Radford, 2003) se complementan para generar una toma de conciencia de la manera en que un problema matemático puede ser abordado.

Nos parece pertinente indicar que el trabajo de Radford (2010a, 2010b) ha indagado en el campo del pensamiento algebraico respecto al tratamiento de la indeterminación y muestra que el recurso a los símbolos alfanuméricos propios del álgebra corresponde a una de las formas en que puede ser expresada la indeterminancia abriendo otras posibilidades para la significación de ésta por parte de los estudiantes. En particular, siguiendo a Radford (2010b) y Vergel (2015a, 2015b), asumimos el pensamiento algebraico como una forma particular de reflexionar matemáticamente. Según Vergel (2015a), el pensamiento algebraico puede considerarse como un sistema de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente, así:

> En términos epistemológicos es aceptado que los modos de conceptualizar, conocer y pensar no pueden ser adecuadamente descritos solamente en términos de prácticas discursivas. Es importante considerar los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes movilizan cuando trabajan con ideas matemáticas. (Vergel, 2015b, p. 9)

Para el caso del estudio que presentamos en este artículo, sugerimos pensar algebraicamente la función centrando la atención analítica en una de sus características (la relación de dependencia entre variables de naturaleza distinta) como un modo de reflexión acerca de este objeto conceptual.

De acuerdo con Radford (2010b), una caracterización de este tipo de pensamiento está constituida por tres componentes: (a) el sentido de indeterminancia (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetros) como aquello opuesto a la determinancia numérica; (b) la analiticidad, como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos; y (c) la designación simbólica o expresión semiótica de sus objetos, esto es, la manera específica de nombrar o referir los objetos. En el marco de la TO (Radford, 2010b), se propone una tipología de formas de pensamiento algebraico de acuerdo con los medios semióticos de objetivación y el rol que cumplen los vectores o componentes analíticos que caracterizan este tipo de pensamiento:

Pensamiento algebraico factual. Los medios semióticos de objetivación movilizados son los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras. En este estrato de pensamiento, la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación, pues se expresa en acciones concretas, por ejemplo, a través del trabajo sobre números. Por esto, podemos afirmar que en este estrato la indeterminancia queda implícita.

Pensamiento algebraico contextual. Los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios semióticos de objetivación tales como frases "clave". En este estrato de pensamiento la indeterminancia es explícita, se vuelve objeto del discurso. La formulación algebraica es una descripción del término general.

Pensamiento algebraico simbólico. Las frases clave son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra. Por ejemplo, mediante expresiones como: $n + (n - 1)$ ó $2n - 1$. En este estrato de pensamiento "hay un cambio drástico en la manera de designar los objetos del discurso", a través de signos alfanuméricos del álgebra, lo cual hace pensar en otro estado del proceso de objetivación de contracción semiótica (Radford, 2010a, p. 8).

La tipología de formas de generalización algebraica (factual, contextual y simbólica) se entiende como ejemplos de formas de pensamiento algebraico. De esta manera, se puede percibir cómo la generalización adquiere un carácter relevante en la introducción del álgebra en el ámbito escolar, puesto que posibilita a los estudiantes acercarse a situaciones de variación desde la identificación de características comunes sobre elementos además de posibilitar el establecimiento de una expresión general.

El trabajo de generalización de patrones requiere precisar lo que llamamos una generalización algebraica. De acuerdo con Radford (2013d), este tipo de generalización de patrones comporta:

1. Capturar o identificar una comunalidad o característica común, notada sobre algunos elementos de una secuencia. Esta toma de conciencia de una propiedad común se nota a partir de un trabajo en el terreno fenomenológico de observación sobre ciertos términos particulares (por ejemplo, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$). La generalización o aplicación de esta comunalidad a todos los términos de la secuencia que está en consideración, es decir, a los términos subsecuentes de la secuencia $(p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \dots)$, y
2. La capacidad de usar esa propiedad común a fin de *deducir una expresión directa* que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia.

La identificación de la característica común o comunalidad requiere, según Radford (2013d), hacer una elección entre determinaciones sensibles potenciales. "La generalización de la característica común (que puede ser una o varias) corresponde a lo que Peirce llama una abducción, esto es, algo que es solamente plausible" (Radford, 2013d, p. 6). De acuerdo con Radford (2013d, p. 7):

> Para que la generalización sea algebraica se requiere [...] que la abducción que se hace de la característica común sea utilizada de manera *analítica.* Esto quiere decir que la abducción será utilizada ya no como simple posibilidad, sino como principio asumido para deducir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier término. Como vemos, el punto crucial corresponde al papel epistemológico que desempeña la característica común, C, extraída durante el trabajo efectuado en el terreno fenomenológico. C pasa de entidad plausible a principio asumido, esto es hipótesis, H.

2.2 *Sobre la relación de dependencia entre variables en el contexto de secuencias figurales*

Adoptamos de un lado el planteamiento de Vergel (2015a) referido al pensamiento algebraico "como una forma particular de reflexionar matemáticamente. [...] como un sistema de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente" (p. 196); y de otro las ideas de Radford (2013a) respecto al saber como un sistema de acciones culturalmente codificadas, esto es, formas de hacer, pensar y reflexionar como formas ideales que han quedado codificadas en la memoria cultural como una patrón o secuencia de acciones y su existencia está determinada al convertirse en objeto de conciencia[4] de los sujetos a través de la actividad; en el caso aquí reportado, alrededor del objeto función vinculado a una secuencia figural con apoyo tabular. De esta manera, como hemos venido discurriendo a lo largo del documento, el proceso de objetivación del saber (en nuestro caso como formas de acción y reflexión en torno a la función como relación de dependencia) corresponde a esa "[...] toma de conciencia en el curso de un proceso social, emocional y sensible, mediatizado por la cultura material (signos, artefactos, lenguaje, etc.), los sentidos y el cuerpo (a través de los gestos, acciones kinestésicas, etc.)" (Radford, 2014a, p. 142).

Esperamos entonces que los estudiantes tomen conciencia de una forma algebraica de percibir aspectos relacionados con secuencias figurales con apoyo tabular en términos funcionales toda vez que este se corresponde a "un largo proceso de refinamientos y concreciones que puede ser expresado de diferentes maneras (lenguaje natural, simbolismo alfanumérico, gráficos, etc.) y codificado en la memoria y las prácticas culturales" (Radford, 2013a, p. 16).

Dada la complejidad del proceso de toma de conciencia de una forma algebraica de abordar las secuencias figurales, en este punto, notamos la importancia de introducir paulatinamente en el aula situaciones en donde las variables puedan adoptar valores discretos (solamente), esto es, en el conjunto de los números naturales (como es el caso de la tarea que presentamos en este artículo), que muestre la existencia de dos magnitudes variables y una relación de dependencia entre ellas. Abordamos, entonces, la idea funcional vinculada a secuencias de tipo figural en donde las configuraciones geométricas propuestas se presentan como una función que relaciona las posiciones con la cantidad de elementos presentes en la configuración de cada una, siendo en ambos casos valores restringidos al conjunto de los números naturales.

3 Consideraciones metodológicas

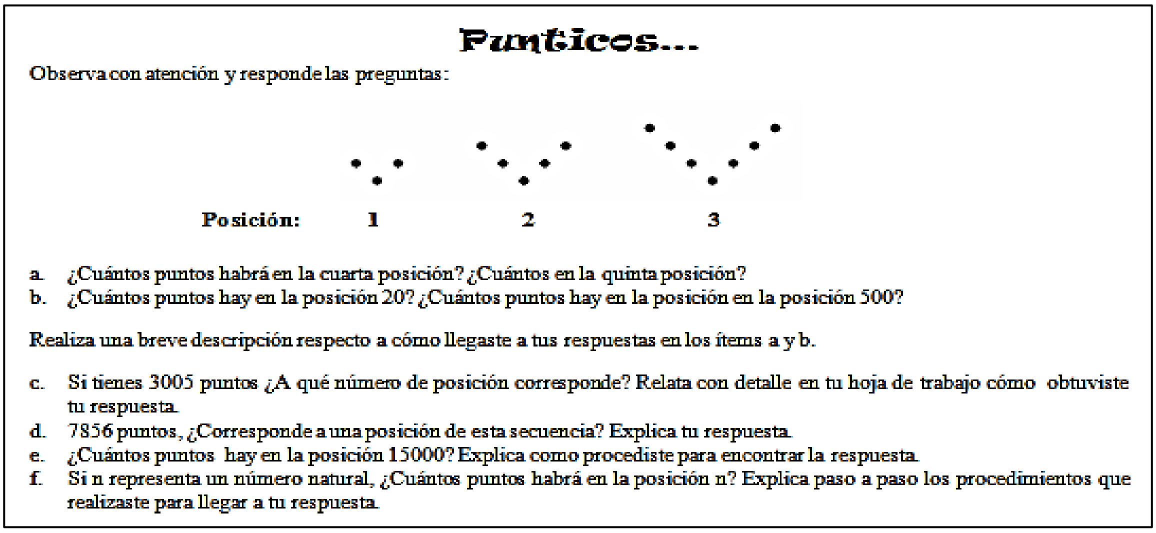
Planteamos el estudio desde un enfoque de investigación cualitativo de carácter descriptivo e interpretativo (Ernest, 1991). La investigación en este enfoque constituye una profusa descripción del fenómeno bajo estudio en procura de establecer comprensiones e interpretaciones de las acciones llevadas a cabo por los estudiantes al abordar una tarea que involucró una secuencia figural con apoyo tabular.

Nuestros análisis de tipo microgenético (Vygotsky, 1978) siguen la metodología multi-semiótica propuesta por la TO (Radford, 2015). De esta manera, concentramos la atención analítica en la emergencia, en ciertos momentos de la actividad semiótica, de los gestos, el habla, la escritura, y el movimiento corporal, que son activados por los estudiantes para evidenciar y materializar su pensamiento al abordar una situación de tipo matemático. La metodología multi-semiótica considera, por un lado, que el aprendizaje puede ser definido como un proceso semiótico social en donde "acciones sensuales, perceptuales, kinestésicas, gestuales, lingüísticas y simbólicas" (Radford, 2015, p. 561) emergen en la actividad siempre en movimiento. De otro lado, brinda una explicación psicológica de los signos (que pueden ser escritos y orales, como también signos encarnados como los gestos y la postura del cuerpo). Aquí se pone de relieve cómo los signos significan (Eco, 2000), y cómo se constituyen en herramientas de reflexión que permiten a los individuos planificar sus acciones (Radford & Sabena, 2015).

Enfatizamos que nuestro propósito principal se constituyó en el análisis articulado de los recursos semióticos movilizados por los estudiantes durante la actividad matemática, en consideración a la naturaleza multimodal del pensamiento humano (Radford, Edwards & Arzarello, 2009). Según Arzarello (2006), este análisis debe tener en cuenta la relación de los diferentes recursos semióticos movilizados (lenguaje escrito, lenguaje hablado, gestos, acciones, etc.), lo que según Vergel (2016, p. 97) llamaríamos "un espectro de recursos semióticos que se movilizan sincronizadamente o no".

Dentro del diseño metodológico, consideramos cuatro fases i) Revisión y análisis documental ii) Adaptación de tareas iii) Intervención de aula (recolección de información) iv) Análisis de datos. La uni-

[4] "No consideramos la conciencia como entidad metafísica. Estamos hablando de conciencia desde un punto de vista dialéctico-materialista, esto es, como un caso particular de la experiencia social" Vergel, (2016, p. 54). Esto es, "[...] la conciencia es relación al mundo-relación concreta" (Radford 2014, p.142).



Punticos...

Observa con atención y responde las preguntas:

Posición: 1 2 3

a. ¿Cuántos puntos habrá en la cuarta posición? ¿Cuántos en la quinta posición?
b. ¿Cuántos puntos hay en la posición 20? ¿Cuántos puntos hay en la posición en la posición 500?

Realiza una breve descripción respecto a cómo llegaste a tus respuestas en los ítems a y b.

c. Si tienes 3005 puntos ¿A qué número de posición corresponde? Relata con detalle en tu hoja de trabajo cómo obtuviste tu respuesta.
d. 7856 puntos, ¿Corresponde a una posición de esta secuencia? Explica tu respuesta.
e. ¿Cuántos puntos hay en la posición 15000? Explica como procediste para encontrar la respuesta.
f. Si n representa un número natural, ¿Cuántos puntos habrá en la posición n? Explica paso a paso los procedimientos que realizaste para llegar a tu respuesta.

Figura 1: Tarea "Punticos".

dad de análisis se constituyó en la actividad matemática de cuatro estudiantes quienes adelantaban grado décimo (15-16 años) al abordar la tarea propuesta vinculada a una secuencia figural con apoyo tabular y los elementos funcionales asociados en términos de relación de dependencia. En ella analizamos el recurso a medios semióticos de objetivación, su posible emergencia sincrónica y potencial evolución.

En consecuencia, la recolección de información fue realizada a través de: a) instrumento físico "Punticos", b) video grabación (selección y transcripción de los episodios), c) entrevistas (basadas en la tarea). Previo al análisis, constituimos los datos de investigación a través del contraste de las fuentes de recolección de información que evidenciaran la actividad matemática de los estudiantes y brindaran posibilidades de interpretación respecto a la movilización de medios semióticos de objetivación y el desarrollo de procesos de objetivación en el abordaje de la tarea.

En el análisis propiamente dicho centramos la atención en la idea multimodal del pensamiento humano (Radford, Demers, Guzmán & Cerulli, 2003; Arzarello, 2006), al considerar la emergencia de recursos semióticos, esto es, según Vergel (2016), "que en nuestros actos de conocimiento, diferentes modalidades sensoriales, tales como la táctil, la perceptual, la kinestésica, etc., *llegan a ser partes integrales de nuestros procesos cognitivos*"[5] (p. 96).

3.1 *La tarea de punticos*

La tarea que hemos denominado "*Punticos*" (Ver figura 1) corresponde a la adaptación de una tarea propuesta por Radford (2008, p. 3). Aquí propusimos a los estudiantes responder unas preguntas que tenían la intención de verificar la identificación de imagen y pre-imagen (en términos funcionales) con el propósito de lograr que los estudiantes avanzaran en el proceso de identificación y posterior concreción de la relación funcional puesta en juego. El último ítem pretendía que el estudiante llegara a identificar y diferenciar tanto los tipos de variable involucradas en la situación, así como establecer una regla de asignación entre ellas $f(n) = 2n + 1$, $f(n)$ número de puntos y n número de posición u otras equivalentes que denotaran dependencia entre ellas (figura 1).

Con esta tarea buscábamos que los jóvenes manifestaran a través de recursos gestuales, verbales y/o escritos, cómo de manera progresiva realizaban acercamientos al establecimiento de algún patrón identificando posibles variables, su comportamiento y la forma en que éstas se relacionaban. En términos de Radford "[…] esperamos que los estudiantes entren en relación con una forma de saber sobre secuencias aritméticas, históricamente constituido. […] tomen conciencia de una forma algebraica de percibir, reflexionar e investigar secuencias, que se remonta a tiempos antiguos" (Radford, 2017, pp. 102-103).

3.2 *Análisis multimodal*

A continuación, se presentan las explicaciones de dos estudiantes: Pao (ver figuras 2 y 3) y Dany[6] (ver figura 6). El primer medio semiótico movilizado por Pao fue encerrar ("encerramiento") los puntos del lado derecho de cada figura (figuras 2).

[5] Énfasis del original
[6] De acuerdo con el consentimiento informado (firmado por los tutores) y para preservar la confidencialidad de los participantes, los nombres de los sujetos son ficticios.

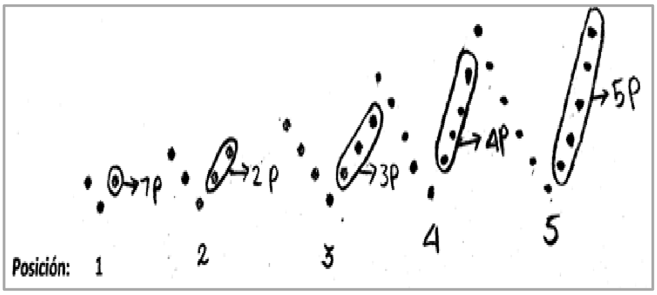


Figura 2: Encerramiento realizados por Pao en su hoja de trabajo.

Pero este encerramiento no fue fortuito. En la entrevista, ocurrida después de haber encerrado los puntos, Pao aseguró haberse dado cuenta no sólo de que siempre hay un punto que hace que el arreglo sea simétrico, ella nombró a este punto "puntito central", sino de que el número de puntos al lado derecho e izquierdo de ese punto central correspondía con el número de la posición (ver figura 2). La explicación de Pao fue la siguiente: "*Pues siempre hay un putito* [puntito] *central y luego según el numero* [número] *de la posición, hay el mismo número de puntitos de lado a lado entonces 4+4=8 + el puntito central = 9. Lo mismo que en la primera solo que 20 + 20 = 40 + el puntito central = 41*" (ver figura 4).

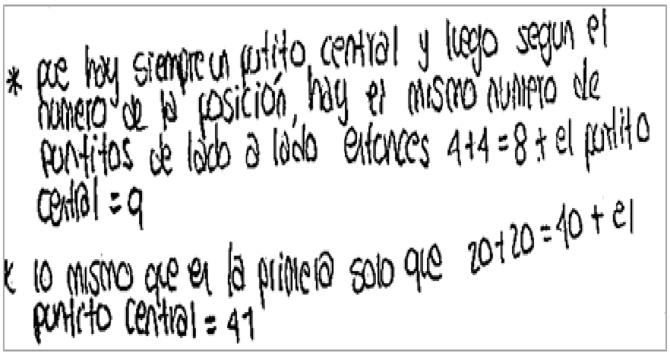
En la figura 3 se observa cómo Pao expresa a través de su cuerpo (usando sus manos y el dedo índice) la comunalidad percibida en la secuencia. Lo gestuado por la estudiante puede considerarse como un signo en el aire, concibiendo el signo según lo propuesto por Eco (2000, p. 22) "como cualquier cosa que pueda considerarse como substituto significante de cualquier otra cosa", para el caso, en correspondencia a un objeto material (configuración de puntos), dentro de un contexto social y cultural en el que tiene lugar la experiencia. Su pensamiento trasciende el campo meramente mental y pasa a un plano material, corpóreo, visible a otros. En términos más precisos, el pensamiento de Pao puede considerarse, desde la perspectiva de la TO, como una actividad reflexiva sensual, mediatizada por signos y materializada en su corporeidad con acciones y gestos.

Figura 3: Gesto de Pao en un proceso de generalización.

En la explicación de Pao aparece una descripción ligada a la organización espacial de los puntos de la tarea (puntito central, lado y lado). En esta producción se observa que Pao verbaliza la relación existente entre la posición y el número de puntos, distinguiéndolas como variables diferentes. Para esta estudiante, la identificación de la expresión "*puntito central*" resulta clave para determinar el cambio del número de puntos en relación con la posición; pues, por un lado, nota que este punto se encuentra presente en todas las configuraciones a través del uso del deíctico temporal *siempre* ("*pues hay siempre un puntito central*"), proporcionando una evidencia de haber advertido un comportamiento común. Al notar los atributos comunes de las figuras mostradas, Pao los utiliza como un patrón para construir expresiones de los elementos de la secuencia no dibujados en la tarea. La generalización de la característica común (abducción en el sentido de Peirce) es usada aquí para *deducir* una formulación que autoriza encontrar cualquier elemento de la secuencia.

Pao proyecta la distinción de dos variables mediante el uso de las palabras *según* y *hay* ("*según el número de la posición hay el mismo número de puntitos a lado y lado*"); es decir, consigue a través del uso del lenguaje esbozar una relación de dependencia. En este caso, la relación de dependencia se encuentra en un *nivel contextual de generalización algebraica* (Radford, 2010a), expresado por la formulación que corresponde a la descripción en el intento de ir más allá de las figuras particulares, de modo que la indeterminancia queda explícita, es decir, es objeto de discurso.

Pao establece una relación entre estos números a través de una expresión que vincula números, palabras y signos matemáticos (ver la expresión


* pue hay siempre un putito central y luego segun el numero de la posición, hay el mismo numero de puntitos de lado a lado entonces 4+4=8 + el puntito central = 9

* lo mismo que en la primera solo que 20+20=40 + el puntito central = 41

Figura 4: Producción de Pao apoyada en dos recursos: puntito central y la simetría.

4+4=8 + el puntito central = 9; figura 4), como un esfuerzo por comunicar lo detectado en el comportamiento de la secuencia. La producción de Pao evidencia un despliegue de la actividad perceptiva acompañada de palabras y encerramientos. Este nodo semiótico (Radford, 2003) pone de presente, una vez más, cómo distintos MSO se complementan para generar una toma de conciencia de la manera en que la situación matemática es abordada desde un punto de vista algebraico. Frente a la pregunta propuesta en la tarea acerca de cuántos puntos habría en la posición *n* (figura 5), Pao alcanza un *nivel simbólico de generalización algebraica* con respecto a la relación de dependencia entre las variables. Sin embargo, en la regla de asignación la diferenciación de variables es poco clara. Las variables número de posición y número de punticos son designadas indistintamente con la letra "*n*". Pao se percata de la dificultad, así que escribe justo debajo de la expresión una nota aclaratoria. El proceso de identificación de la relación de dependencia, llevado a cabo por la estudiante, expresa una idea de generalidad, algo que sigue más allá de las posiciones particulares ofrecidas en la tarea, en el espacio y en el tiempo.

Aquí hay un cambio importante en el modo de designación de los objetos del discurso, pues aparece una designación simbólica de las variables, de esta manera, emerge una fórmula que involucra el uso de los símbolos alfanuméricos del álgebra. Para Radford (2010a, p. 11):

> [...] la fórmula es un ícono, una especie de descripción geométrica de una figura. [...] la fórmula no es un resumen simbólico sino más bien una historia que narra, de una manera altamente condensada, la experiencia matemática de los estudiantes. En otras palabras, la fórmula es una narrativa.

En esta producción vemos un reconocimiento de lo indeterminado y de su carácter operatorio.

En la producción escrita de Dany (figura 6), las configuraciones de puntos que aparecen fueron utilizadas como medio para sustentar sus hipótesis (en todos los casos en los que los estudiantes usaron las configuraciones se conservó la distribución de los puntos propuestas en la tarea). Dany realiza encerramientos de los puntos a la derecha y a la izquierda de la distribución para mostrar la instanciación de una relación entre las variables evidenciando distinción entre una y otra.

Dany realiza gráficamente las configuraciones correspondientes a las posiciones 1, 5 y 20 respectivamente. En la parte inferior de la configuración indica el número de la posición y muestra concordancia de este número en relación con los puntos que se encuentran a cada lado de la configuración dejando aparte un punto. En la parte superior de cada configuración indica el número total de puntos poniendo un número acompañado por la letra "*p*". Los números, letras y encerramientos, utilizados por Dany son signos cargados con una intención comunicativa que arrastran la huella de una forma de pensar acerca de la secuencia. Siguiendo a Vergel (2014, p. 66):

> El signo cumple el papel de una operación significativa. Aún más, los signos no se limitan únicamente a su función representativa, la elección de ellos no es neutra o independiente y dicha elección orienta el destino en el cual se expresa el pensamiento, el destino de la comunicación.

La enunciación "*Tome* [Tomé] *un lado de la figura formada por los puntos y me di cuenta que en la posición indicada se suman los dos lados más el punto que sobra*", sugiere que Dany se está implicando en un proceso de objetivación a través del cual *se encuentra* (se topa) con una forma de pensamiento histórica y culturalmente constituida, como lo es la relación de dependencia entre dos cantidades variables de naturaleza diferente (el número de puntos en concordan-

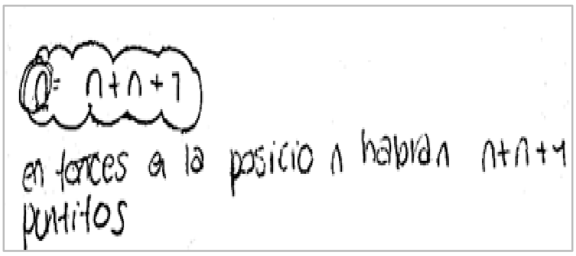


Figura 5: Producción de Pao que devela una relación de dependencia entre variables.

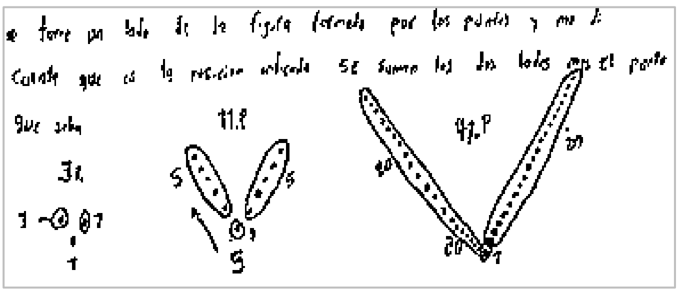


Figura 6: Producción de Dany sobre la tarea.

cia con el número de la posición que ocupa cada configuración). En términos más específicos, la producción de Dany sugiere un *nivel contextual de generalización algebraica*, pues la indeterminancia queda explícita y la analiticidad/deducción presente en su escrito queda evidenciada en la forma de proceder que funciona para cualquier posición que se indique "*en la posición indicada se suman los dos lados más el punto que sobra*".

En lo concerniente a la interacción con otros, la incorporación del cuerpo para poner de manifiesto las conclusiones e ideas matemáticas, los dibujos y los algoritmos utilizados, jugaron un papel relevante en el desarrollo de la tarea, en la cual, la relación de dependencia entre variables no se dio inmediatamente, más bien fue revelándose progresivamente. Según Radford (2009), resulta fundamental en la producción del saber la experiencia del individuo en el acto de conocer, por tanto, dicha experiencia se encuentra mediada por el propio cuerpo de modo que diferentes modalidades (sensoriales -táctil, perceptiva, cinestésica, etc.) se tornan en partes integrantes de los procesos cognitivos.

Presentamos el siguiente apartado en donde intervienen Miguel y Nicolás, quienes han trabajado juntos en relación con la secuencia propuesta en la tarea. Miguel evidencia verbalmente una diferenciación entre las indeterminadas, sin embargo, el argumento dado resulta poco claro, al referir un total de puntos como configuración de la posición nueve. Es así como Nicolás interviene con un ejemplo. Nicolás se refiere a la posición nueve (posición que se encuentra fuera del plano perceptual de la hoja de trabajo) manteniendo la organización de los puntos sugerida en la tarea. Mantener dicha configuración geométrica al parecer promueve justamente una forma de pensar respecto del comportamiento de la secuencia por parte de Nicolás y Miguel. En las imágenes se muestran señalamientos y apuntamientos realizados por Nicolás con su dedo para centrar la atención en elementos diferentes que constituyen la configuración de una posición específica. Estos señalamientos son gestos puestos en funcionamiento por Nicolás para comunicar cómo se comporta la secuencia. Dichos gestos acompañan el discurso de Nicolás.

0:00:01 L1. Miguel: Nosotros llegamos a la conclusión que la posición depende de los puntos y que los puntos son independientes.

0:00:09 L2. Profe: Los puntos son independientes, ¿por qué?

0:00:13 L3. Miguel: Porque nosotros miramos la cantidad de puntos que nos dan [toma un marcador y dibuja una configuración en el tablero (Foto 1)]…porque si los puntos fueran independientes de la posición ehhh digamos nueve puntos ponemos la posición nueve entonces pues uno asimila que son nueve puntos y los pone así, de este modo sin que sepa lo que ya hemos analizado de la guía.

0:01:25 L4. Nicolás: Digamos pues la novena posición supuestamente 9, es el punto base [*señala con el dedo el punto dibujado sobre en número nueve* (Foto 2)], que nosotros dijimos que era siempre iba a haber una simetría, que acá iban a haber 9 puntos y 9 puntos [*acompañando lo hablado con señalamientos con el dedo, con toques al lado izquierdo y derecho del punto dibujado* (foto 3)], o sea el doble de eso [*señalando con el dedo el número nueve, referenciando la posición*], o sea que siempre los puntos de acá arriba [*acompañando lo hablado con señalamientos con el dedo, con toques al lado izquierdo y derecho del punto dibujado* (foto 4)] no dependen de esto [*señalando el número nueve que representa la posición*] sino al revés, la posición depende de los puntos (Foto 5).

Fuente 1: Archivo: 07_25_6 Grado 10° Tarea Punticos (Ver figura 7).

El diálogo anterior ilustra la idea según la cual los medios para alcanzar el objeto de una actividad son aquellos que mediatizan en un plano material la actividad misma: objetos, instrumentos, signos, el lenguaje, etc., se convierten en herramientas psicológicas (Radford, 2006b, p.10). Así, "signos y artefactos no son simplemente elementos periféricos de la actividad" (Wertsch, 1981, citado en Radford, 2006b, p.10). Su valor no se encuentra en facilitar, en cierto sentido, la actividad sino en convertirse en parte constitutiva de la misma" (Radford, 2006b). En L4 Nicolás enuncia *"Siempre iba a haber una simetría"*. La palabra *siempre* está poniendo de presente una comunalidad identificada por los estudiantes, que parece poder ser extrapolada a cualquier posición. De otro lado, la palabra *simetría* así como la movilización de medios kinestésicos (apuntamientos con el dedo en ausencia de un dibujo completo de la configuración en cuestión – foto 3 y 4, figura 7) parecen estar motivados por la disposición espacial de los puntos, pues Nicolás inicialmente menciona y señala

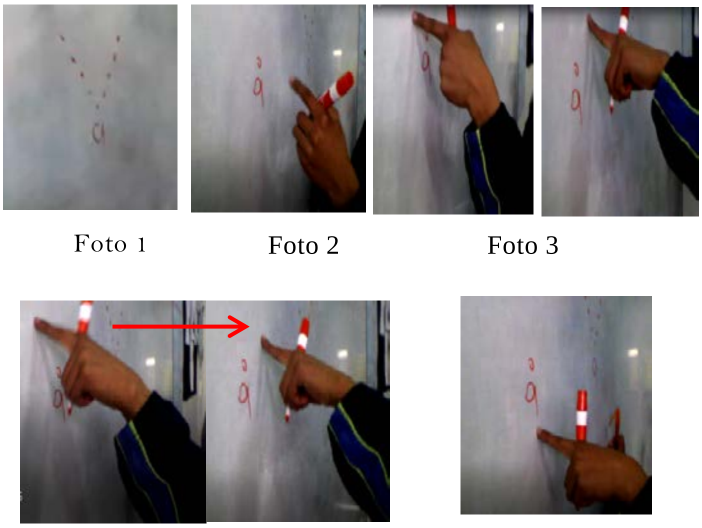


Figura 7: Secuencia de señalamientos y apuntamientos realizados por Nicolás en la tarea de punticos.

lo que él ha denominado "el punto base" (foto 2, figura 7) como referente para mostrar cierta correspondencia entre el número de puntos que estarían a derecha e izquierda de dicho punto recurriendo también al uso de los deícticos espaciales *acá* y *acá arriba*.

Este segmento de actividad semiótica constituye un nodo semiótico puesto que aparecen de manera simultánea múltiples modalidades de expresión como la percepción, la palabra, el gesto y el movimiento corporal. Según Radford (2003), estas funciones modales son utilizadas intencionalmente y actúan juntas para instaurar formas estables de conciencia, evidenciar sus intenciones y orientar sus acciones en procura de alcanzar el objeto de la actividad. En particular, en L4, vemos cómo Nicolás complementa la argumentación de Miguel. Según Radford (2014b), el sujeto necesita del otro para desarrollarse. Miguel es en tanto la actuación de Nicolás, esto es, existe un sujeto determinado por el discurso y por las actuaciones del Otro. Vergel (2014) sostiene que la intersubjetividad reside en la medida en que los interlocutores de una situación comunicativa comparten una perspectiva.

Ante la argumentación de Nicolás, Pao reacciona y también con un ejemplo muestra cuál es la variable dependiente y cuál la independiente, esto es, mostrando una idea de simetría presente en la situación.

0:02:48 L5. Profe: ok, por acá iban a decir otra cosa.

0:04:48 L6. Pao: Digamos estamos hablando de ejes de simetría ¿no?, se supone que sean a cada lado,

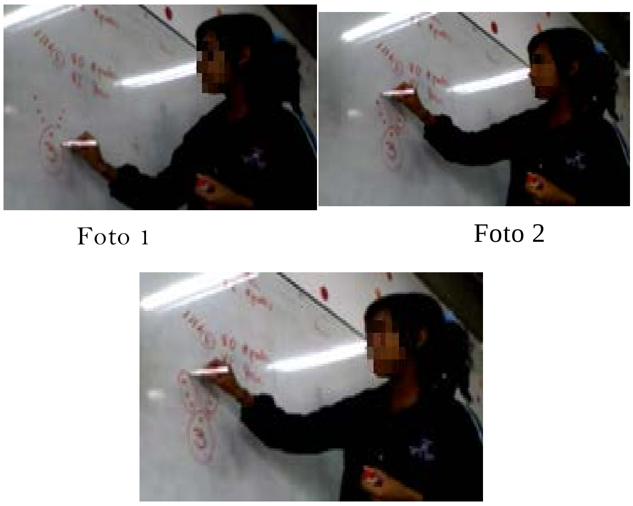


Figura 8: Explicación de Pao sobre la simetría en la secuencia

entonces nos dan un punto base que sea el independiente.

0:04.56 L7. Profe: Voy a hacer una posición cualquiera por ejemplo la posición 3 que tiene 5 puntos, tú me hablas de una simetría. Ven me muestras.

0:05.13 L8. Pao: Estamos hablando de un eje de simetría y siempre nos ponen una base, entonces listo, nos pusieron esta base digamos esta es la base [*al tiempo encierra uno de los puntos junto con el número de la posición en este caso 3*] (Foto 1), y nos hablan de simetría entonces irían tres a un lado y tres al otro [*encierra uno los puntos del lado izquierdo y dereecho de la configuración*] (Foto 2 y 3).

Fuente 2: Archivo: 07_25_6 Grado 10° Tarea Punticos (Ver figura 8).

Los recursos de simetría y puntito central juegan un papel importante en el proceso de generalización que ha seguido Pao. Éstos han pagado tributo, inicialmente, a su actividad perceptual y le han permitido notar la comunalidad y transformarla en hipótesis para luego aplicarla a los términos siguientes, incluso en aquellos que se encuentran fuera de su campo perceptual. La inclusión del cuerpo en el acto de conocer se reconoce como una tendencia reciente en el que el saber es mucho más que el resultado de los mecanismos formales deductivos abstractos y que resulta crucial la experiencia individual en el acto de conocer y el hecho de que esta experiencia está mediada por el propio cuerpo (Radford, 2009).

En el espacio destinado en la clase a la socialización, identificamos algunos MSO que fungen como parte constitutiva del pensamiento de los estudiantes.

Foto 1

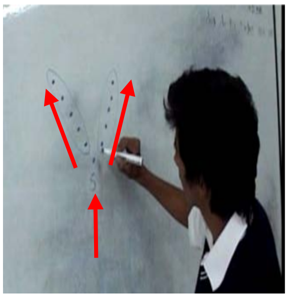


Foto 2

Figura 9: Producción de un estudiante haciendo encerramientos en la secuencia de punticos.

En las Fotos 1 y 2 (ver figura 9) se muestra cómo este estudiante recurre primero a dibujar algunas configuraciones en el tablero y posteriormente realiza sobre ellas encerramientos laterales dejando un punto libre. Aquí el recurso semiótico emergente "encerrar" se convierte en un medio semiótico de objetivación que ayuda al estudiante no solo a contar los puntos de las configuraciones, sino que le permite la identificación gráfica de una simetría que es relacionada posteriormente con la posición, esto es, hay una instanciación de las ideas de variable dependiente e independiente. Estos medios semióticos de objetivación, como señalar y encerrar, fueron utilizados por varios estudiantes.

Esta sincronización de varios MSO constituye un nodo semiótico (Radford, 2009, p. 7) que caracteriza la actividad reflexiva del estudiante. En la Foto 1 (ver figura 9) es importante destacar el rol del apuntamiento del dedo índice de la mano izquierda en tanto identificación de la variable independiente. Él fija la atención en el número de la figura y luego con el marcador cuenta el número de punticos, evidenciando la variable dependiente. Es clave anotar aquí cómo la dimensión gestual le sirve de apoyo al estudiante para coordinar las dos variables en una especie de co-variación.

En la Foto 1 (ver figura 10) se muestra un algoritmo como intento por rastrear un patrón haciendo uso de operaciones matemáticas con números naturales, relacionando número de puntos y número de posición; mientras que en la Foto 2 de esta figura, mediante la realización de un listado exhaustivo, parece mostrar cierto tipo de regularidad (a la izquierda número que representa la posición y a la derecha número que indica los puntos que se encuentran en dicha posición vinculados mediante el uso del signo igual). Ambos medios semióticos movilizados

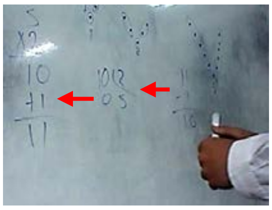


Foto1

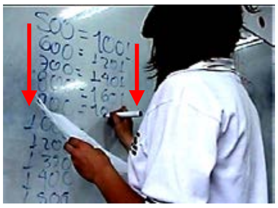


Foto 2

Figura 10: Producción de un estudiante en forma de algoritmo.

para *encontrar* la variación en la secuencia de configuraciones dada muestra actividad sobre números.

En las Fotos 1 y 2 (ver figura 11) aparecen representaciones de tipo algebraico utilizando símbolos alfanuméricos y palabras clave para la identificación tanto de la variable dependiente como independiente. En la foto 2 se restringe el conjunto numérico a los números naturales. Estas producciones emergentes en la socialización pagan tributo al contexto histórico-cultural de la clase en el cual profesor y estudiantes han trabajado juntos participando en la idea de hacer circular los saberes culturales, en este caso asociados a la relación de dependencia entre variables.

Aun cuando no hay distinción entre las denotaciones correspondientes a las variables dependiente e independiente en la Foto 1, esta dificultad se supera en la producción mostrada en la Foto 2. La toma de conciencia del grupo de estudiantes al notar la distinción entre las denotaciones de las variables, evidenciada en la producción de la foto 2, sugiere lo que en la TO llamamos aprendizaje.

4 Síntesis y comentarios finales

El proceso de identificación de los MSO, a partir del análisis microgenético y multimodal, precisa la emergencia de inscripciones (describir, listar, encerrar, símbolos alfanuméricos), signo al aire (señalamiento, gesto "punto central"), uso de artefactos, palabra escrita-hablada (uso de deícticos), así como

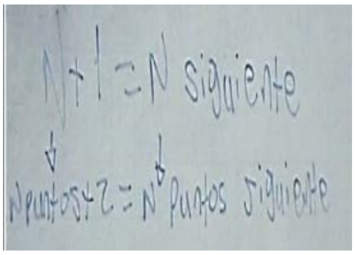


Foto 1

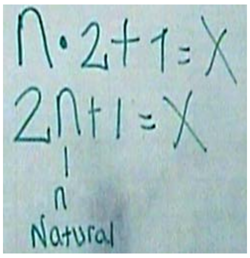


Foto 2

Figura 11: Producción de algunos estudiantes en relación con la tarea de punticos evidencias de la conjugación de MSO, tales como señalar y contar, habla y movimiento, que se constituyen como nodos semióticos. En relación con la evolución de los MSO emergentes en la tarea propuesta, podemos señalar que al principio se presentaron descripciones realizadas por los estudiantes con palabras del lenguaje cotidiano y acciones exhaustivas sobre números (listados, algoritmos), posteriormente pasaron a la utilización de palabras clave y finalmente a representaciones mediante expresiones simbólicas.

En este sentido, las producciones de los estudiantes se enmarcan en formas de generalización algebraica contextual y simbólica con respecto a la relación de dependencia (como una característica del objeto función) sugerida en la tarea propuesta. Los estudiantes lograron establecer un criterio para encontrar el número de puntos para cualquier posición, sin embargo, en algunas ocasiones la distinción entre los tipos de variables (dependiente e independiente) resultaba poco clara. También se revelaron expresiones y palabras clave que permitieron a los estudiantes centrar su atención en las particularidades de la secuencia. Los recursos de *puntico cen*tral y *simetría* fungieron como elementos clave en el proceso de generalización algebraica de los estudiantes con respecto a la relación de dependencia.

Si bien no ha sido objeto de estudio en este trabajo los procesos de subjetivación, es decir, aquellos procesos a través de los cuales los estudiantes se van transformando (Radford, 2018b), estamos concibiendo el aprendizaje matemático, en este caso sobre la relación de dependencia entre variables, como una de las características del objeto función, "en términos de procesos que son al mismo tiempo procesos de objetivación y procesos de subjetivación" (Radford, 2018b, p. 75). Valdría la pena, en consecuencia, estudiar con mayor detalle los procesos de subjetivación a través de categorías que nos permitan identificar aquellos procesos de transformación de los estudiantes en la clase de matemáticas, procesos a través de los cuales los estudiantes se afirman como sujetos históricos y culturales.

Queda también abierta la discusión respecto a las precisiones acerca de la manera en que pueden ser evaluados los procesos matemáticos en un ambiente como el abordado en este artículo; es más, si bajo estas condiciones es válido hablar de evaluación. Si aceptamos la idea de evaluación, estaríamos lejos de asumirla en el sentido positivista, más bien la posicionaríamos como *una reflexión crítica y retrospectiva de la labor conjunta*, lo cual implica tomar conciencia sobre varios hechos, por ejemplo, qué tan solidarios fuimos todos, profesor y estudiantes, en la labor, qué realmente aportaron las tareas diseñadas, qué tan responsables fuimos unos con otros. De acuerdo con Radford (2013b), tendríamos que pronunciarnos en relación con ciertas expectativas que se pueden formular en términos de una ética comunitaria en la que los miembros del aula (estudiantes y profesor): "participan activamente en el espacio público, muestran apertura de espíritu en las discusiones y debates, se muestran solidarios con los otros alumnos y laboran hacia la constitución de una conciencia crítica" (p. 8). Nos atrevemos a plantear que la idea de "evaluación" debería estar permeada por estas características de la ética comunitaria.

5 Referencias Bibliográficas

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial sobre semiótica, cultura y pensamiento matemático (editores invitados: L. Radford y B. D'Amore), *9*(1), 267-300

Blanton, M. & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Hoines y A. Fuglest ad (Eds.), *Proceedings of the International 28th conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135–142). Bergen, Norway: Bergen University College.

Blanton, M. & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A Global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-23). Berlin, Germany: springer.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: NCTM.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(5), 360–380.

Eco, U. (2000). *Tratado de Semiótica General*, (Carlos Manzano, trad.). Barcelona, España: Lumen. (Obra original publicada en 1976).

Ernest, P. (1991). *The philosophy of Mathematics Education.* London: Falmer Press.

Hitt, F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 245-264). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt, F. (1998). Dificultades en la articulación de diferentes representaciones relativas al concepto de función. *Journal of Mathematical Behavior, 17* (1), 123-134.

Janvier, C. (1987). Translation process in mathematics education. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1995). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum.* Paper presented at the Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Boston, MA.

Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding.* Dartmouth, MA: National Center for Improving Student learning and Achievement in mathematics and Science.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum.* Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J., Blanton, M., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D.W. Carraher, & M.L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19–55). New York: Routledge.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 65-86). Dordrecht, The Neth- erlands: Kluwer Academic Publishers.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia-MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y competencias ciudadanas.* Bogotá: Magisterio.

Radford, L. (2003). Gestures,speech and the sprouting of signs:A semiotic-cultural approach to student's Types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. En: *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial sobre semiótica, cultura y pensamiento matemático (editores invitados: Radford, L. & D´Amore, B.), pp. 103-129.

Radford, L. (2006b). Semiótica cultural y cognición. In R. Cantoral, O. Covián, R.M. Farfán, J. Lezama, & A. Romo *(Eds.) Investigaciones sobre Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano* (pp. 669-689). México: Diaz de Santos.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM-Mathematics Education, 40* (1), 83-96.

Radford, L. (2009). "No! She starts walking backwards!": interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM-Mathematics Education, 41*(4), 467-480.

Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19.

Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2010c). Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello, F. (Eds.), *Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 6)* (pp. XXXIII – LIII). Université Claude Bernard, Lyon, France.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 303-322). Berlin, Alemania: Springer-Verlag.

Radford, L. (2013a). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 7-44.

Radford, L. (2013b). Sumisión, alienación y (un poco de) esperanza: hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas. In A. Ramírez y Y. Morales (Eds). *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe.* Santo Domingo, República Dominicana, noviembre 6-8, 2013. Conferencia plenaria.

Radford, L. (2013c). Prefacio. En B. D'Amore, M. Fandiño y M. Iori, *La semiótica en la didáctica de la matemática* (11-14). Bogotá: Magisterio.

Radford, L. (2013d). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, España: Comares

Radford, L. (2014a). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(2), 132-150.

Radford, L. (2014b). On teachers and students: An ethical cultural-historical perspective. In Liljedahl, P., Nicol, C., Oesterle, S., & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36 (Plenary Conference)* (pp. 1-20). Vancouver,Canada: PME.

Radford, L. (2015). Methodological Aspects of the Theory of Objectification. *Perspectivas da Educação Matemática, 8*(18), 547-567.

Radford, L. (2017). Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En B. D'Amore y L. Radford (Eds.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos.* Bogotá: Editorial UD.

Radford, L. (2018a). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 3-25). New York: Springer.

Radford, L. (2018b). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. *PNA, 12*(2), 61-80.

Radford, L., Demers, S., Guzmán, J., & Cerulli, M. (2003). Calculators, Graphs and theProduction of Meaning. In en N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27* Conference of the *international group for the psychology of mathematics education* (PME27 –PMENA25), University of Hawaii, *4*, 55-62.

Radford, L., Edwards, L., & Arzarello, F. (2009). Beyond words. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 91-95.

Radford, L. & Sabena, C. (2015). The Question of Method in a Vygotskian Semiotic Approach. In Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., & Presmeg, N. (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 157-182). New York: Springer.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the concept of function. The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, (vol. 25, pp. 25-58). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147-164.

Thomas, H. L. (1971). The concept of function. Paper presented at annual meeting of the American Educational Association, february 4-7, New York. (Eric Document Reproduction Services No. ED. 049926). York.

Vergel, R. (2010). La perspectiva de cambio curricular early-algebra como posibilidad para desarrollar el pensamiento algebraico en escolares de educación primaria: una mirada al proceso matemático de generalización. *Memoria 11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa.* Bogotá: Asocolme.

Vergel, R. (2014). El signo en Vygotski y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. *FOLIOS, 39(1)*, 65-76.

Vergel, R. (2015a). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193-215.

Vergel, R. (2015b). ¿Cómo emerge el pensamiento algebraico? El caso del pensamiento algebraico factual. *UNO- Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (68), 9-17.

Vergel, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria.* Bogotá: Editorial U.D.

Vergel, R. y Rojas P. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José De Caldas.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, MA, E.U.: Harvard University Press.

Warren, E. & Cooper, T. (2005). Introducing Functional Thinking in Year 2: a case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood, 6*(2), 150-162.

Warren, E. & Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom, 11*(1), 9-14.

Wertsch, J. V. (1981). The concept of activity in Soviet psychology: An Introduction. En J. V. Wertsch (ed), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 3-36). New York: M. E. Sharpe.

Como citar este artículo:

Vergel, R., González, L., Miranda, I. (2020). La relación de dependencia entre variables: Un análisis desde la teoría de la objetivación. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa.* 5 (2), pp. 67-81.

Presentado: 26/octubre/2019
Aprobado: 15/junio/2020
Publicado: 23/agosto/2020