te e inevitable que un curso escolar en la materia que nos ocupa, tenga que darle un vistazo a sus elementos constitutivos, a las proposiciones simples y los conectivos que forman nuevas proposiciones, a la argumentación, a las reglas de inferencia, a la deducción y a la prueba de teoremas. Pero la propuesta didáctica es llevar esta introducción más allá; ya que el sabor de la lógica matemática está en la construcción de lenguajes –fórmulas, proposiciones-, en los sistemas axiomáticos –argumentación, deducciones-, y en su interpretación en modelos y estructuras matemáticas que les sirven de contexto.

Esto quiere decir que el contenido del Curso rompe la tradición de los textos escolares que presentan a la lógica matemática, como ya hemos anunciado, dividida en solo dos partes: cálculo proposicional y cálculo de predicados, optando por la más moderna y conveniente introducción de los lenguajes de primer orden y los sistemas axiomáticos, precedidos por una introducción del cálculo proposicional. Un poco más detalladamente, el orden de exposición de los conceptos que nosotros seguimos es el de argumentación lógica, validez, deducción y prueba, mostrando la distinción entre unos y otros, donde la deducción es la argumentación con reglas de inferencia, mientras que la prueba de teoremas es una deducción muy particular que requiere axiomas.

Símbolos en la construcción de esquemas Splitting

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

DEISSY MILENA NARVÁEZ, Estudiante Coinvestigador (dmnarvaez@gmail.com)
EVANS LEONARDO URRUTIA, Estudiante Coinvestigador (urrutia10@gmail.com)
JAIME ROMERO, Profesor Director (jaimeedumat@udistrital.edu.co)

En este artículo analizamos momentos y actividades de aula en los que junto con treinta niños de 4° (8-11 años) construimos de manera consensuada algunos símbolos para la exponenciación de enteros positivos; asimismo pretendemos destacar uno de los papeles más relevantes del símbolo en la posibilidad de comprender matemáticas: la reelaboración de esquemas mediante categorización de éstos en un nuevo esquema de orden superior.

Algunas consideraciones teóricas

Para Skemp (1993,p.42-47) un esquema es una estructura mental de conocimiento organizada en la que el nuevo conocimiento y la nueva experiencia deberían encajar.

La ampliación o de reelaboración de esquemas puede deberse a categorizaciones de esquemas de orden menor que inicialmente pueden estar disconexos, pero que una vez que para el individuo aparezcan con alguna conexidad, se puede decir que ha ocurrido una construcción de un esquema de orden una unidad superior a los categorizados. En palabras de Tall y Davis (2002)

Un esquema de acción (o esquema de orden 0) es una secuencia de acciones realizadas para alcanzar una meta.	Un esquema de orden $n^{ésimo}$ es una categorización de esquemas de orden más bajo.

Las investigaciones de Tall y Davis (2002) sobre esquemas han evidenciado que para los niños las operaciones quedan fuera de sus conciencias, por lo tanto los niños no podrían elaborar las operaciones más allá de formas primitivas sin el uso de los símbolos, en sus palabras: *"la idea de que las operaciones están deliberadamente fuera de la conciencia hasta que se desarrolla un* ***'exhibidor interior',*** *o símbolo mental sobre el que las operaciones puedan actuar mentalmente es de importancia crítica en el desarrollo de esquemas matemáticos"*

En esta experiencia, fijamos nuestra atención en la identificación de las acciones primitivas que los estudiantes usan al abordar situaciones asociadas al concepto Splitting (Confrey,1994) -repartir, doblar simétricamente, ampliar,…- que les permitieran construir un ***exhibidor interior*** (símbolo mental) asociado a la acción sucesora usada en la estructura Splitting. Comprender de manera simbólica el signo implica que éste condense desde las acciones primitivas, las representaciones, la operación misma, y la elaboración del signo.

Acerca de la secuencia de actividades

En una **primera fase**, las actividades enfocaron el uso de acciones concretas como doblar, repartir y encajar (actividades: Tira de papel y Triángulos). Luego en la **profundización** el énfasis fue predecir sucesos de las situaciones anteriores en los que el material concreto no era suficiente para modelarlos desde la acción misma (actividades: Predicción de cantidades de triángulos, Número de partes, Número de dobleces, Organización de la información). La búsqueda de distintas formas de representar las situaciones guió la **segunda fase** de las actividades y generó una mirada más estructural sobre las situaciones -resaltamos la importancia de la transición desde representaciones tabulares a diagramas de árbol- (actividades: Agrupación de granos, Viaje a Egipto). En la **tercera fase**, el foco fue el aparecimiento de la conciencia de la clase de situaciones: la identificación de un procedimiento matemático común a todas las de esta clase, fue útil para la construcción, durante la **socialización,** de un esquema de orden superior por categorización (actividades: Historias -conservando representación en diagrama de árbol y operación-, La escuela), pero la construcción de un signo cuya forma gráfica, en tanto marca en un papel, no evoca la categoría de situaciones modeladas, y por otro lado, se manifieste a los estudiantes como representación pertinente de cada situación, fue crucial para estabilizar la categorización y tomarla como un objeto manipulable, tratable en aritmética.

Acerca de la secuencia de símbolos

Para extraer la secuencia de símbolos, linealizamos la forma de ocurrencia de hechos de clase. De otra forma habría bucles y rizos.

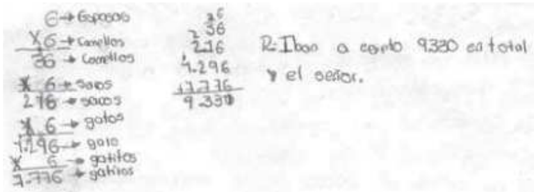
FASE		SIMBOLO	ESQUEMA
Primera	Inicialización	*Se dobla en dos la tira anterior.*	De acción: *igualdad por coincidencia* Conteo Aditivo
	Profundización	*Duplicamos, triplicamos por tres...*	Conteo Aditivo Multiplicación por 2, 3: Sin integración entre ellos Con integración regida por adición
Segunda		*Multiplicar seis veces por dos. "6 veces X 2"*	Coordinación de unidades aditivas y multiplicativas Unidades recurrentes particulares
Tercera		2(v3), 2^3, 2v (3) y 3^{v2}	Coordinación de unidades aditivas y multiplicativas Unidades intensivas, recurrentes y generalizadas m.n-Split
Socialización		2^3	

Presentamos evidencias que soportan lo dicho en el cuadro anterior:

Juan C: *"162 es porque son tres veces que se multiplica por tres o se triplica" "Porque habían seis mujeres por eso multiplico por seis por eso lo multipliqué así de seis también los animales se (dividen) están en seis por eso lo multipliqué por seis"*

Isabel A: *"Triplicamos por tres porque de cada dos dobleces salen tres partes"*

Marcia G: *"Como eran 6 esposas y cada esposa tenía 6 camellos entonces multipliqué 6 X 6 y me dieron 36 camellos, como son 36 camellos y cada camello tiene 6 sacos multipliqué 36 X 6 y me salieron 216 sacos y cada saco tiene 6 gatos entonces multipliqué 216 X 6 y me dieron 1296 gatos y por último…Multipliqué por 6 porque todos eran de a 6".*



En la tercera fase encontramos que partiendo de la expresión: *"Esto es multiplicar 6 veces por dos", "6 veces X 2",* los estudiantes proponen las cuatro formas de simbolizar el proceso y siendo conscientes de la equivalencia de las cuatro escogen una como la más conveniente. *"Lo símbolos sirven para indicar el momento... y hay cuatro símbolos más 2(v3), 2^3, 2v (3) y 3^{v2} y también sirve apara indicar una cosa ejemplo: de una célula salen dos células y ellas se van aumentando. Los símbolos sirven para indicar o expresar el momento que nos toca resolver y también más fácil. Los símbolos son números que nos indican el momento y se aumenta"*

No fue necesario insistir en las propiedades de la operación, el símbolo final que los estudiantes construyeron es operativo en sí mismo porque en él están vinculadas las situaciones concretas y la secuencia de símbolos usados para referir cada esquema y su posterior categorización.

Caso 1 *Marcia G*

- "5 veces X 2 no da igual que 2 veces X 5, porque si multiplico 2 X 2 me da 4 y si sigo multiplicando por 2 me da 32 5 veces X2 y si multiplico 2 veces X 5 me da 25 y entonces no es igual."

- "La forma más rápida para escribir las operaciones es 4 veces X 2, porque 4 veces X 2 lo multiplico y me da el resultado que necesito. Ejemplo 2 X 2 X 2 X 2 = 16"

Caso 2. *Isabel A*

- "5 veces X 2 es igual a 2^5 2 X 2 = 4; 4 X 2 = 8; 8 X 2 = 16 16 X 2 = 32. y 2 veces X 5 es igual a 5^2 5 X 5 = 25; 25 y 32 no son iguales porque son diferentes los resultados de 5 veces X 2 y 2 veces X 5"

Caso 3 *Selio B*

- "para pasar del 8 al 32 puedo usar la operación 2^3x2^2, 8x4=32. Del 9 al 729; 3^2x3^4 9x81=729"

Para el caso 1 y 2, ellas reconocen que no es igual 5 veces X 2 que 2 veces X 5 y lo sustentan realizando cada una de las operaciones y si los resultados finales no coinciden entonces no son iguales. Observamos que una de las estrategias que sigue Marcia es utilizar los procesos iniciales usados en el problema (regresión) multiplicando recursivamente como si se tratara de niveles en una situación concreta. Y en el caso 3 el símbolo se hace consistente con la manera de operar y es usado para sintetizar un proceso. Luego, en la socialización de las maneras de simbolizar propuestas, los niños escogieron de cuatro opciones, la más conveniente para representar la situación, llegando al acuerdo de usar en adelante la expresión 2^6 y la llamaríamos como dos elevado a la seis.

Conclusiones

1. Hubo siete momentos determinantes en el proceso de construcción del símbolo: El **primero** basado en las preguntas que recaen sobre la acción (Ej.*¿Qué le pasa a cada parte cuando se realiza un nuevo doblez?*). Este tipo de pregunta generó en los estudiantes expresiones como *se duplica, triplicamos...* El **segundo** dedicado a la construcción de la representación en diagrama de árbol en la que se diferencian los momentos en la acción y se hace explícita la relación multiplicativa, utilizando expresiones como "*yo cogí y dibuje el hombre, las mujeres con los dos camellos,... y por último los gatitos con los dos ojos*"para describir el proceso de construcción de la representación. En el **tercero** el proceso se hace reversible y los niños empiezan a tener conciencia de que la relación determina el tipo de situación *–una escuela tiene 5 salones, un salón tiene 2 sillas, 1 silla tiene 3 niños, 1 niño tiene 1 pupitre, 1 pupitre tiene 2 lápices-*. En el **cuarto** usan la expresión *"multiplicar tantas veces por…"* para referirse a todo el procedimiento realizado para encontrar la cantidad de objetos que hay en cada nivel. En el **quinto** los estudiantes proponen maneras de expresar simbólicamente la operación y se da paso en la negociación a la institucionalización de la expresión simbólica más conveniente "*2^4 me parece la forma más sencilla porque es más fácil representar 4 veces x2"* y *"las operaciones que realizamos más rápido o sencilla es la de 2^4 porque es la más cortita"*. En el **sexto**, se ahonda la conciencia de la relación que existe entre el ordinal, que indica el nivel, con el número de veces que se multiplica la unidad que representa la acción sucesora (Ej. *Reconocen el momento 0 como válido para la situación, porque el objeto inicial permanece intacto*). El **séptimo** momento comprende todas las situaciones que no son de este tipo, las cuales los estudiantes reconocen como distintas aunque algunos hacen acomodaciones a su esquema que les permite abordar con éxito la situación.

2. Cuando se construye, para una operación, un referente basado en las acciones, la posibilidad de comprender el objeto matemático es mayor, el símbolo representa una posibilidad de externalizar un conjunto de acciones realizadas a propósito de dominar un conjunto de situaciones, esto permite asumir desde ese referente la operación como diferente de otras. El referente basado en la acción permitió construir una estructura para la multiplicación independiente de la suma, logrando eliminar posibles dificultades como $2^3 = 6$ ampliamente reportada.

3. Este trabajo permite elaborar un sentido útil del símbolo, por ejemplo Antonio afirma: "*Los símbolos sirven para indicar el momento... y hay cuatro símbolos más 2(v3), 2^3, 2v (3) y 3^{v2} y también sirven para indicar una cosa ejemplo: de una célula salen dos células y ellas se van aumentando. Los símbolos sirven para indicar o expresar el momento que nos toca resolver y también más fácil. Los símbolos son números que nos indican el momento y se aumenta"*

AGRADECIMIENTOS: Este artículo se produjo en el marco de la investigación *Pensamiento multiplicativo. Una mirada a su complejidad y densidad de su desarrollo en el aula*, cofinanciada por la Universidad Distrital, COLCIENCIAS e IDEP, por lo tanto en su elaboración estuvieron presentes otros miembros del grupo MESCUD. A los niños de 4° de la Sede B, del Colegio Restrepo Millán y a Aurora Urrego, profesora titular, de ellos aprendimos mucho.

Referencias bibliográficas

CONFREY, J. (1994) Splitting, Similarity and Rate of Change: A New Approach to Multiplication and Exponential functions. In: The Development of MULTIPLICATIVE REASONING in the Learning of Mathematics. Albany: New York press. pp. 291-330.

DAVIS, G. & TALL, D. (2002) *What is a scheme?* In: Intelligence Learning and Understanding –A tribute a Richard Skemp (Tall y Thomas, Eds.) pp. 141-160. Disponible en www.postpressed.com.au

SKEMP, R. (1993) *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.