DISCURSOS DEL ALUMNO Y DEL PROFESOR EN CLASE DE MATEMÁTICAS

DISCOURSES OF THE LEARNER AND OF THE TEACHER IN THE MATHEMATICS CLASSROOM

Núria Planas[1], Judit Chico[1], Itziar García-Honrado[2], Alberto Arnal-Bailera[3]

[1] *Universitat Autònoma de Barcelona,* [2] *Universidad de Oviedo,*
[3] *Universidad de Zaragoza*

RESUMEN

La práctica profesional del profesor de matemáticas es en gran medida una práctica discursiva configurada por la práctica discursiva del alumno. Por ello, resulta esencial indagar relaciones entre el discurso del alumno y el del profesor en clase, junto con explorar aspectos del contexto de cultura que pueden estar regulando dichas relaciones. En este capítulo, primero presentamos una propuesta de análisis textual situado en el contexto de cultura y aplicado al discurso matemático del alumno, que luego aplicamos al análisis del discurso matemático del profesor. Acabamos reflexionando sobre el papel de la cultura del aula de matemáticas en la producción de relaciones entre discursos de alumno y de profesor. Adoptamos principios de las teorías sociales de la actividad humana que sustentan la noción de discurso como fenómeno de la comunicación y de la cultura.

Palabras clave: *aula de matemáticas, alumno, profesor, discurso, contexto de cultura.*

Planas, N., Chico, J, García-Honrado, I, Arnal, A.(2019). Discursos del alumno y del profesor en clase de matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 19-41). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

ABSTRACT

The professional practice of the mathematics teacher is largely a discursive practice configured by the discursive practice of the learner. It is thus essential to examine relationships between the discourse of the learner and of the teacher in the class, along with exploring features of the context of culture that may be regulating these relationships. In this chapter, we first introduce a proposal of textual analysis situated in the context of culture and applied to the mathematical discourse of the learner, which is then applied to the analysis of the mathematical discourse of the teacher. To finish, we reflect on the role of the culture of the mathematics classroom in the production of relationships between the discourse of the learner and the teacher. We adopt principles of the social theories of human activity underlying the notion of discourse as a phenomenon of communication and culture.

Keywords: *mathematics classroom, learner, teacher, discourse, context of culture.*

UN DISCURSO DE AULA CON VARIOS DISCURSOS

¿Existe un discurso de aula? ¿Existen un discurso del alumno y uno del profesor? ¿Tiene el aula de matemáticas un discurso específico? Dada la producción cultural e histórica del aprendizaje y de la enseñanza (de las matemáticas) como realidades distintas (Roth y Radford, 2011), se suele responder en positivo a todo esto. Es habitual la posición dual sobreentendida que distingue entre discurso del profesor y del alumno. Si tomamos la idea amplia de discurso como «los múltiples procesos mediante los cuales las personas se comunican entre ellas para comunicar» (Planas, Arnal-Bailera y García-Honrado, 2018, p. 46), encontramos sin embargo un escenario más complejo con discursos sobre los modos de hablar y de hacer adecuados para enseñar matemáticas en la escuela (i.e., discursos sobre el discurso del profesor), o bien sobre los modos de hablar y de hacer adecuados para aprender matemáticas en el aula ordinaria y en sistemas paralelos de escolarización (i.e., discursos sobre el discurso del alumno). Aprovechamos la escritura de este capítulo para dar valor a una complejidad, la del discurso, que no siempre se incorpora en la reflexión didáctica ni en el análisis investigativo de la práctica profesional del profesor de matemáticas. Esto no deja de ser sorprendente si tenemos en cuenta que esta práctica profesional es en gran medida una práctica discursiva dado que implica la producción e interpretación de textos orales y escritos.

Aun cuando a veces se omite el carácter discursivo de la práctica profesional del profesor de matemáticas, la investigación sobre educación matemática y discurso lleva ya un largo recorrido bajo las tradiciones denominadas 'micro' y 'macro' en Planas y Valero (2016). Mientras que la tradición macro examina el impacto de la estructura social en la configuración de la educación matemática (e.g., estudio de discursos sobre el profesor de matemáticas), la micro trabaja con contextos próximos de comunicación en entornos de práctica matemática, mayormente aulas (e.g., estudio de discursos –hablados, escritos, visuales, corporales…– de un profesor de matemáticas en una secuencia de enseñanza). La atención a la actividad humana en el contexto próximo ha dado lugar a perspectivas distintas según la acepción de lo social (ver el análisis comognitivo del discurso en Gavilán, Sánchez-Matamoros y Escudero, 2014, el análisis crítico del discurso en Civil y Planas, 2004, o el de la interacción en Llinares y Valls, 2010). Así tenemos que:

> Una importante característica distintiva de las teorías sociales contemporáneas es la convivencia y articulación de las acepciones interaccionista y fuerte de lo social. Dentro de estas teorías, hay una variedad de matices y aproximaciones, todas ellas con el denominador común de comprender la inseparabilidad de la persona –que aprende, que enseña, que investiga…– y el contexto –en el que aprende, en el que enseña, en el que investiga…– (Planas, 2017, p. 92).

Desde los años noventa del siglo pasado, el área ha cambiado y la investigación en el seno del Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática (GIPEAM), al que pertenecemos, también. La atención a las teorías sociales de la actividad humana ha dejado de ser menor y foros como los congresos del *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (IGPME), de la *European Society for Research in Mathematics Education* (ERME) y de la *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM) han experimentado un aumento de referencias a estas teorías y de su utilización. Han contribuido las lecturas más precisas de lo social en la obra de Vygotsky, que han permitido superar la concepción de mente y pensamiento como eslabones de un orden lineal donde el aprendizaje se facilitaría en el grupo y se produciría en el individuo. Las teorías sociales suplen el supuesto de linealidad en el aprendizaje con la continuada constitución cultural y política de la matemática escolar, de la enseñanza, del aprendizaje y de la práctica profesional.

Tabla 1. Líneas de estudio sobre discurso en el equipo GIPEAM

<table>
<tr><td rowspan="4">Objeto paciente
Cultura</td><td>Actor</td><td>Actividad-Comunicar</td><td rowspan="4">Objeto agente
Matemáticas</td></tr>
<tr><td>Alumno de matemáticas</td><td>Discurso matemático del alumno</td></tr>
<tr><td>Profesor de matemáticas</td><td>Discurso matemático del profesor</td></tr>
<tr><td>Grupo clase de matemáticas</td><td>Discurso matemático del aula</td></tr>
</table>

Un equipo de GIPEAM estudiamos discursos en sesiones de clase de matemáticas en la etapa de secundaria. En los últimos años hemos impulsado tres líneas simultáneas de estudio (ver filas, Tabla 1) según el participante (*actor*) cuyo texto analizamos. Para cada línea, contamos con datos donde comunicar (*actividad*) funciona como transitivo con respecto al contenido matemático (*objeto agente*) y al contexto de la cultura (*objeto paciente*). Halliday (1978, 1993) utiliza las expresiones de objeto agente y objeto paciente para señalar el juego de opacidad y transparencia propio de la comunicación de los conocimientos y prácticas desarrollados en la cultura. Nuestra interpretación de la actividad de comunicar como fenómeno de la cultura con valor semántico (i.e., siempre se comunica algo) implica que, tras la comunicación de contenido matemático en clase, persiste un objeto 'paciente' –la cultura– que regula el discurso del aula y la fabricación de significado. En particular, cualquier práctica del profesor se produce en una situación próxima y un contexto de cultura determinados sin los cuales no se puede explicar su significado. En nuestros trabajos, tratamos con datos donde el contenido matemático se comunica de manera explícita en el texto como objeto agente (e.g., «Tenemos que relacionar los casos posibles con los casos favorables»), mientras que la cultura (i.e., conocimientos y prácticas) que da significado al contenido matemático se acostumbra a comunicar de manera transparente como objeto paciente (e.g., «La fórmula de Laplace es tan importante como el teorema de Pitágoras»). A lo largo del capítulo volvemos sobre este punto con datos de experimentos de aula.

Llevamos tiempo estudiando la 'transitividad' de comunicar mediante un programa de experimentos de enseñanza, variado en cuanto a contenido matemático y contexto de cultura (e.g., Arnal-Bailera y Planas, 2013; Boukafri y Planas, 2018; Chico, 2018; Chico, Planas, Morera y Fortuny, 2014; Ferrer, Fortuny y Morera, 2014; Ferrer, Fortuny, Planas y Boukafri, 2014; García-Honrado, Fortuny, Ferrer y Morera, 2016; Morera, Planas y Fortuny, 2013). Se considera la enseñanza de contenido matemático, primero en el diseño y desarrollo de experimentos y después en el análisis de discursos matemáticos del alumno y del profesor en interacción. Transformaciones geométricas, cálculo de probabilidades o generalización de patrones son contenidos curriculares cuya comunicación hemos investigado en entornos de clase. A modo de los ciclos de experimentos en el interaccionismo (Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer y Schauble, 2003; Cobb, Zhao y Dean, 2009), pretendemos modificar culturas de aula para mejorar la producción y distribución de oportunidades de aprendizaje matemático. Indagamos lo que es susceptible de ser modificado con la 'herramienta' del análisis del discurso. Esta herramienta es teórica y en nuestra investigación está guiada por las teorías sociales de la actividad humana y del aprendizaje (Planas, 2010, 2017; Planas, Morgan y Schütte, 2018). En las secciones 'Discurso matemático del alumno' y 'Discurso matemático del profesor' presentamos resultados de experimentos de enseñanza a fin de ilustrar el argumento sobre la complejidad del discurso y su papel en la comprensión de la práctica profesional del profesor de matemáticas en clase.

DISCURSO MATEMÁTICO DEL ALUMNO

En esta parte del capítulo, consideramos la práctica discursiva o discurso del alumno en clase por ser constitutivo del discurso del profesor en tanto que lo regula y contribuye a configurarlo. Cabe antes comentar la elección del singular para alumno y para discurso (Figura 1). Este singular va unido al reconocimiento de una pluralidad de alumnos y discursos. La alumna con una lengua dominante distinta a la de instrucción, por ejemplo, afronta retos de aprendizaje y de participación en el discurso del aula diferentes a la alumna cuya lengua coincide con la de instrucción (Civil y Planas, 2004; Planas y Civil, 2010). Con el número singular y de acuerdo con Austin y Howson (1979), señalamos la existencia de una epistemología del discurso del alumno, esto es, un conjunto de rasgos comunes constituyentes de los procesos en clase mediante los cuales los alumnos comunican contenidos del contexto de la cultura incluida la matemática escolar. En la base de esta epistemología está la producción cultural e histórica del aprendizaje –del alumno– y de la enseñanza –del profesor– con límites y separaciones. Al respecto son interesantes las analogías con la noción de género (Pimm, 1987) y con la epistemología del discurso de la novela (Bakhtin, 1981), que fundamenta el uso del singular en contraposición con el discurso del ensayo o el de la poesía.

Dicho lo anterior, pasamos a comentar la esencia de nuestros métodos. El propósito del capítulo es divulgativo y de reflexión por lo que no precisamos el detalle técnico de métodos ni resultados. A grandes rasgos, hemos desarrollado un análisis del discurso mediante caracterización narrativa por agrupación de códigos, que producimos por comparación constante y triangulación en seminarios del equipo. Los códigos son unidades de significado sobre interacción (e.g., iniciar respuesta; compartir explicación) y sobre contenido matemático (e.g., generalización algebraica; identificación de variable). Con ambos tipos intentamos dar cuenta del discurso del alumno durante la actividad matemática en sesiones de clase que son experimentos de enseñanza. Los códigos de contenido matemático se centran en el objeto declarado de la enseñanza y son un subtipo de los de interacción. Trabajamos por tanto con códigos que no aceptan oposición simple ni exclusión de unos por otros. La complejidad de cada código aumenta en la medida en que se combina con el resto, lo cual involucra la elaboración progresiva de narrativas. Una narrativa es un texto escrito donde nos referimos a otro texto, el discurso matemático del alumno, con el objetivo de referenciar conexiones entre códigos de contenido matemático en el transcurso de la interacción, a la vez que tratamos de averiguar el significado que la situación próxima y el contexto de cultura pueden estar aportando. En este sentido, las narrativas son funcionales ya que no pretenden realizar descripciones formales del texto sino estudiar su utilización y desarrollo en la producción de unos significados matemáticos concretos de entre los muchos que podrían haberse creado en relación con una cierta tarea.

Comunicar cultura	
Discurso del alumno en clase	*Comunicar matemáticas* Discurso matemático del alumno de matemáticas en clase de matemáticas

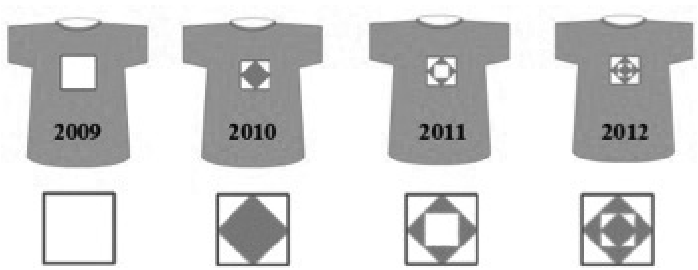
Figura 1. Línea de estudio sobre el discurso del alumno

Como indicábamos al inicio, para nosotros el discurso es un invariante de la comunicación y de la cultura donde se circunscribe la actividad de comunicar. Cualquier uso presuntamente intransitivo y culturalmente neutro de comunicar es una ficción. Siempre se comunica cultura, en particular modos de hablar y de hacer, porque siempre hay un contexto en el que se plantea la práctica y que facilita la comprensión acerca de la adecuación y relevancia de los textos. De ahí que el contexto de cultura deba ser tenido en cuenta en la producción, combinación y relación de códigos para la interpretación del discurso. Interpretar un discurso no implica ni presupone la creación de una narrativa inequívoca. Interrogamos los datos en la situación de proximidad, en un proceso inacabado que incorpora aquello a lo que tenemos acceso acerca del contexto y que puede no ser manifiesto en la literalidad del texto. Nótese que llamamos discurso a cualquier fragmento de habla independientemente de su duración y longitud o de la selección de conversaciones en torno a objetos matemáticos específicos.

ANÁLISIS TEXTUAL SITUADO EN EL CONTEXTO DE CULTURA

En este apartado, reproducimos resultados del análisis del discurso del alumno en interacción durante la resolución de la tarea de la Figura 2 en una sesión de clase en un centro de Barcelona. El detalle del análisis se documenta en Chico (2014) y los mismos datos han sido ilustrados en Chico y Planas (2018). Son datos orales que han pasado por modificaciones importantes al ser traducidos del catalán y luego transcritos. No entramos a discutir la conversión de discurso hablado en discurso escrito. Sí queremos, sin embargo, señalar la diferencia que esto supone con respecto a estudios que analizan datos de foros virtuales y chats que no requieren transcripción (ver, por ejemplo, Llinares, 2012, para análisis de datos donde profesores de matemáticas hablan por escrito en entornos de línea). Tampoco entramos a examinar el hecho de presentar datos en un único sistema lingüístico cuando se alternan varios en los datos originales. Modificar el carácter multilingüe y multimodal de los datos nos parece cada vez más problemático por el mensaje tácito que se envía sobre la irrelevancia del sistema lingüístico en el desarrollo de la actividad matemática. En los trabajos donde no estudiamos el impacto de la alternancia de lenguas y de las modalidades de comunicación en el discurso matemático del alumno, por cuestiones de espacio a menudo acabamos optando por mostrar datos «traducidos» a la vez que mencionamos la pérdida en términos de comprensión de la actividad. Hoy día, la posibilidad de depositar ficheros de audio y video en repositorios abiertos y de anexar archivos digitales a las publicaciones, tendrá que reducir los riesgos asociados a la simplificación de datos.

Desde 2009, una diseñadora hace una camiseta por año como insignia de su marca. Estos son los modelos correspondientes al primer, segundo, tercer y cuarto año:



La figura en cada camiseta sigue una serie: se toma un cuadrado blanco, se marcan los puntos medios de los lados, se unen y se pinta de gris el cuadrado resultante. Después se unen los puntos medios del cuadrado gris y se pinta de blanco, y así sucesivamente.
1. ¿Cuántos cuadrados blancos y cuántos grises tendrá la figura de la camiseta 2015?
2. ¿Cuántos de cada tipo tendrá una camiseta de cualquier año, la enésima camiseta?
3. ¿Cuántos triángulos blancos y cuántos grises tendrá la figura de la enésima camiseta?

Figura 2. Enunciado de la tarea en Chico y Planas (2018)

Producción de un discurso matemático hacia la generalización algebraica

Empezamos con datos de tres alumnos que discuten la segunda cuestión de la tarea de la Figura 2 sobre la cantidad de cuadrados blancos y grises de la enésima camiseta. Se suceden representaciones verbales aritméticas del caso general en relación con la identificación de la variable.

1. Cristina: Pues el año menos dos mil nueve es igual al año menos dos mil nueve partido entre dos más una blanca si fuera impar y sin una blanca si fuera par.
2. Jose: ¿Y la ene?
3. Cristina: El año, el año que estás buscando o sea el año que te dan.
4. Sara: El año que pone en la camiseta.

5. Jose:	No, porque la enésima camiseta, la ene no sería el año, es el número de camiseta. Claro, la enésima camiseta no es dos mil nueve o dos mil trece. ¿Qué sería la camiseta dos mil trece? No, es la sexta, la quinta…

Los códigos asociados al discurso del alumno –léase Cristina, Jose y Sara– son *generalización aritmética, identificación de la variable, iniciar resolución y solicitar clarificación*. El trabajo entre alumnos en una clase de matemáticas de un aula de secundaria obligatoria habituada a una práctica determinada (ver Chico, 2014) es la 'medida' de control para la asignación de significado a lo que se comunica en el contexto de cultura. Tenemos que Cristina inicia una respuesta al exponer su generalización aritmética donde la variable es el año de creación de la camiseta y no la posición que ocupa en la secuencia [1]. Cuando Jose solicita una clarificación acerca de la variable, cuya referencia está implícita en la generalización dada [2], Sara y Cristina identifican la variable con el año de la camiseta [3-4]. Entonces Jose explica que la variable *n* indica la posición de la camiseta en la secuencia y no el año de creación [5]. Se observa por tanto la atención simultánea a la identificación de la variable y a la palabra «enésima» del enunciado (ver también [8]). En este punto, la cultura del aula aparece como factor determinante en la comunicación. La petición de clarificación de Jose es clave para que se pongan de manifiesto dos interpretaciones de la variable e informa sobre los modos de hacer. En otras culturas de aula, la exposición de una solución de un problema por parte de una alumna no conlleva la revisión por parte de otros alumnos ya que esta es una actividad que se espera del profesor. Si nos fijamos en los modos de hablar, Jose comunica lo que considera una respuesta adecuada al enunciado en lo que se refiere al contenido matemático (*identificación de la variable*), pero también en lo que se refiere a la expresión literal («enésima»). Esto ocurre después de acordar la relación de dependencia entre año de la camiseta y posición en la secuencia:

6. Jose:	Yo lo único que digo es que no te dan el año, te dan el número de camiseta.
7. Maria:	Pero con el número de camiseta puedes saber el año.
8. Jose:	¿Y de qué te sirve calcularlo? Tú lo que quieres saber es el número de cuadrados, no el año. El enunciado te da la enésima camiseta.

Deben tenerse en cuenta varios aspectos del contexto de cultura del aula tales como la utilización restringida del registro escrito en los momentos de discusión entre alumnos, que facilitan el soporte y andamiaje de la oralidad de las explicaciones. Por otra parte, el reconocimiento del habla entre alumnos en la cultura del aula repercute con marcas específicas de oralidad en la representación escrita posterior de la solución a la tarea. Pero también ocurre que el enorme valor de la escritura en la escuela (materializada en nuestro ejemplo mediante la ficha en papel con la tarea impresa y el encargo último de cumplimentarla y entregársela al profesor al final de la sesión de clase para ser evaluada) es una influencia fundamental en la validación de modos de hablar. Si consideramos la asociación que se establece entre «enésima» y el significado de «ene» como calificador de camiseta, el uso de la palabra «enésima» es una marca de (re)conocimiento de la lengua especializada de la matemática escolar. No obstante, tiene sentido pensar que el uso de esta palabra es además una marca de escritura (ver enunciado en la Figura 2) y del contexto de cultura. Con esto, ponemos de relieve que nuestro análisis atiende al registro literal y extra-literal, ambos con impacto en la función comunicativa del texto (ver Halliday, 1978, para ejemplos de discursos distintos vinculados a textos literalmente iguales en una variedad de contextos de cultura; y Chico, 2014, para descripciones y articulaciones del contexto de cultura en el análisis de discursos de alumnos).

Veamos todavía otros datos de esta misma sesión de clase. Ahora dos alumnos, que habían trabajado en pareja el problema previamente, presentan y discuten la tercera cuestión de la tarea, sobre la cantidad de triángulos blancos y triángulos grises de una camiseta. Durante la discusión del rango de la variable independiente de la generalización que proponen, hablan de conexiones entre el valor de *n* y la posición de la camiseta en la secuencia:

9. Jose:	Nosotros hemos hecho, suponiendo que ene es el número de camiseta que nos dan, sabemos que ene, el número de camiseta es igual que el número de cuadrados que hay dentro. Porque en la primera camiseta hay un cuadrado, en la segunda hay dos, en la tercera hay tres… Entonces el número de camiseta menos uno, porque como ya se ha dicho hay un cuadrado que no genera triángulos, es el número de cuadrados que generan triángulos. Entonces lo multiplicamos por cuatro, porque cada cuadrado hace cuatro triángulos. Entonces obtienes el número total de triángulos. Si la ene es par, divides el número total entre dos y obtienes el número de triángulos cualesquiera porque hay el mismo número de triángulos blancos que grises. Porque cuando la ene es par hay el mismo número de cuadrados blancos que grises, como le has restado uno, te queda el mismo número de triángulos blancos que grises.
10. Gabriel:	No, esto es cuando la ene es impar, no.…sí, sí, cuando ene menos uno es impar.
11. Jose:	Sí, es ene menos uno que es impar…
12. Gabriel:	Es decir, cuando ene menos uno es impar… Nos hemos equivocado, cuando ene es impar es cuando hay un cuadrado más blanco y es lo que hace que haya el mismo número de triángulos blancos que grises.

13. Jose: Sí, claro. Cuando la ene es impar divides entre dos y te da el número de triángulos de los dos colores.

Generalización algebraica, rango de la variable, iniciar respuesta y compartir explicación son los códigos que agrupados y relacionados con sentido nos ayudan a comprender este discurso de alumno –léase Jose y Gabriel–. En nuestra narrativa, Jose inicia su respuesta hablando de n para indicar la posición de la camiseta en la secuencia. En su búsqueda de la cantidad desconocida de triángulos de cada color, explica la expresión $4(n\text{-}1)/2$ para el caso de n par [9]. A pesar de la confusión entre camisetas pares e impares, se llega a una generalización mediante terminología algebraica y con referencias veladas de apoyo visual ('los cuadrados que hay dentro de una camiseta') en los dibujos para casos particulares del enunciado (Figura 2). Gabriel revisa la explicación y la amplía al distinguir entre números pares e impares. Ninguno de ellos, sin embargo, menciona razones subyacentes a la distinción entre tomar n o $n\text{-}1$, tales como tomar 1 o 0 como valor inicial. Con base en el dibujo de la tercera camiseta, Gabriel [12] y Jose [13] concluyen con turnos que se completan entre ellos. Jose y Gabriel comparten la responsabilidad de comunicar al grupo la solución y los argumentos en el trabajo en pareja, incluida la responsabilidad de haberse equivocado. El contexto de trabajo previo en pareja da sentido a la identificación de actividad matemática compartida, mientras que el contexto de discusión entre alumnos da sentido a las evidencias de generalización algebraica que, solo con atención a los turnos de uno de los alumnos, no podrían inferirse.

Con este ejemplo, pretendemos señalar que el análisis del discurso matemático del alumno ha de tener en cuenta al menos dos dimensiones: el texto oral o escrito y el contexto de cultura, que influye en la realización e interpretación del texto y, más en general, de la práctica. En la siguiente sección, volvemos a plantear la atención a ambas dimensiones con datos del discurso matemático del profesor.

DISCURSO MATEMÁTICO DEL PROFESOR

Dentro de nuestro programa de experimentos de enseñanza, mantenemos una misma lógica de investigación en los trabajos sobre el discurso matemático del profesor y sobre el del alumno. Bajo una perspectiva social de la actividad humana que sitúa la actividad de comunicar en su contexto de cultura, que es el de interpretación de la lengua en uso (Halliday, 1978, 1993), consideramos que el texto del profesor no basta para estudiar su discurso. El contexto de cultura involucrado en la producción del discurso del profesor proporciona la clave para discernir modos naturalizados de hablar y de hacer matemáticas en clase que se están dando por sabidos en la práctica profesional.

Análogamente a lo explicado en la sección anterior acerca de los métodos, para el análisis del discurso matemático del profesor fabricamos códigos de interacción y de contenido matemático. Los primeros fijan la mirada en la función del discurso de comunicar cultura, mientras que los segundos se utilizan para explorar la función más específica de comunicar matemáticas (Figura 3). A fecha de hoy, estos trabajos están siendo revisados con la incorporación de nuevos indicadores orientados a la búsqueda de relaciones entre discurso del alumno y del profesor. Los indicadores actuales han surgido, por un lado, de buscar de manera reiterada relaciones ente narrativas producidas para alumnos y para profesores y, por otro, de estudiar las contribuciones al estudio del discurso del profesor de matemáticas de Adler y Ronda (2017). A lo largo de los años, se nos ha hecho evidente el uso abundante de ejemplos y de explicaciones en la organización de procesos matemáticos comunicados en la interacción entre discurso de profesor y de alumno. Con la inquietud de realizar un análisis más refinado de la comunicación de estos procesos matemáticos, en Planas, Fortuny, Arnal-Bailera y García-Honrado (2016), anticipamos indicadores relativos a la selección, secuenciación, explicación y adaptación de ejemplos y de explicaciones en la práctica profesional del profesor en clase.

Comunicar cultura	
Discurso del profesor en clase	*Comunicar matemáticas* Discurso matemático del profesor de matemáticas en clase de matemáticas

Figura 3. Línea de estudio sobre el discurso del profesor

En el inicio del capítulo escribíamos que la práctica profesional del profesor de matemáticas es en gran medida práctica discursiva, para luego añadir en la sección anterior que dicha práctica discursiva del profesor en clase está fuertemente configurada por la práctica discursiva del alumno. De ahí que el análisis textual situado en el contexto de cultura y aplicado al discurso matemático del profesor en clase implique referencias a la interacción con el discurso del alumno. El cuarto indicador de Planas, Arnal-Bailera y García-Honrado (2018), adaptación de ejemplos y de explicaciones, supone un avance en el estudio de las relaciones entre discursos del alumno y del profesor.

Análisis textual situado en el contexto de cultura

Para el análisis del discurso matemático del profesor en clase, hemos establecido cuatro indicadores y cuatro niveles por indicador (N0, N1, N2 y N3). Dado un contenido matemático de aprendizaje y una tarea de clase para la enseñanza, los indicadores se desglosan como sigue:

- Selección de ejemplos: N0. Solo variación simultánea de dos o más aspectos, N1. Solo variación de un aspecto con atención a similitud o contraste, N2. Al menos dos variaciones de aspectos distintos con atención a similitud y/o contraste, N3. Variación simultánea de dos o más aspectos con atención a similitud y contraste
- Secuenciación de ejemplos: N0. Sin cadena de complejidad creciente, N1. Cadena de complejidad creciente excepto por ejemplos intermedios, N2. Cadena de complejidad creciente excepto por un ejemplo, N3. Cadena de complejidad creciente sin excepciones
- Explicación de ejemplos: N0. Sin argumentos matemáticos, N1. Con argumentos matemáticos sin conexiones entre ellos, N2. Con argumentos matemáticos y conexiones solo entre algunos, N3. Con argumentos matemáticos conectados entre todos
- Adaptación de ejemplos y de explicaciones: N0. Sin respuestas a preguntas de alumnos, N1. Con respuestas a preguntas de alumnos sin elaboración posterior, N2. Con respuestas a preguntas de alumnos y elaboración posterior de algunas respuestas, N3. Con respuestas a preguntas de alumnos basadas en ejemplos previos o nuevos

A continuación, resumimos resultados del análisis de discursos matemáticos de dos profesoras en dos clases con alumnos de 14 y 15 años durante la resolución de la tarea de la Figura 4. El contenido matemático de aprendizaje que consideramos es el cálculo de probabilidades del suceso 'ganar la partida cuando un jugador tiene *a* puntos y el otro *b*'. De ahí que los ejemplos sean casos particulares de la generalidad 'ganar la partida cuando un jugador tiene *a* puntos y el otro *b*' (para una discusión de la riqueza de este problema, ver Goizueta, Mariotti y Planas, 2014).

Dos chicos juegan a lanzar una moneda de modo que uno gana 1 punto si sale cara y el otro 1 punto si sale cruz. Cada uno pone 3 € y deciden que el que gane 8 puntos se quedará con los 6 €. Sin embargo, la partida se interrumpe cuando uno ha ganado 7 puntos y el otro 5. ¿Cómo se repartirán el dinero?

Figura 4. Enunciado de la tarea en Planas, Arnal-Bailera y García-Honrado (2018)

Adaptación del discurso matemático de la profesora P1 a discursos de alumnos

En una de las clases, tras una propuesta de reparto proporcional, la profesora (P1) utiliza cuatro ejemplos: el primero es un caso extremo (a = 7, b = 0), el segundo es el dado en el enunciado de la tarea (a = 7, b = 5) y los dos últimos (a = 1, b = 0; a = 2, b = 0) surgen en interacción con el discurso de una alumna (A1). Se observa por tanto una primera cadena de ejemplos de complejidad monótona creciente con a = 7, que se interseca con otra cadena de ejemplos para b = 0 que tampoco se mantiene.

P1: Ahora imaginad que la partida se interrumpe cuando uno ha ganado siete puntos y el otro todavía ningún punto. ¿Cómo se reparten el dinero si ocurre esto? Según vuestro grupo, hay que repartir los seis euros entre... ahora no son doce tiradas con siete y cinco puntos, ahora son siete tiradas. Pues... [en la pizarra, 7/7·6=6, 0/7·6=0], aplico lo que me habéis dicho y va a pasar que uno se queda con los seis euros y el otro con nada.

A1: Pues claro, porque no ha sacado ni un solo punto y el otro casi ha ganado.

P1: O sea que vuestra manera os sigue pareciendo que funciona. ¿Y si la partida se interrumpe cuando uno ha ganado un punto y el otro está aún con cero puntos? ¿Entonces? Ahora no son ni doce ni siete tiradas... [en la pizarra, 1/1·6=6, 0/1·6=0]. Otra vez hay un jugador que se lleva todo el dinero, pero ahora ni siquiera estaba en la recta final para ganar.

A1: Ya, mala suerte. Solo han tirado una vez.

P1: Pero esto puede ocurrir, se puede interrumpir así de pronto. Incluso si solo da tiempo a dos tiradas y uno saca dos puntos, entonces hacemos lo mismo y... [en la pizarra 2/2·6=6, 0/2·6=0], un chico se lo va a volver a llevar todo, con solo dos puntos. ¡Solo ha conseguido dos puntos y los seis euros para él!

A raíz de los discursos de dos alumnos (A1 y A2), sigue un discurso de la profesora que alude a las posibilidades totales y favorables de ganar de cada jugador. De las explicaciones, inferimos los siguientes argumentos: todos los ejemplos se resuelven con un mismo razonamiento; el razonamiento de reparto proporcional no es válido; el razonamiento debe contemplar lo que falta por ganar; el cálculo de posibilidades totales de ganar es relevante; el cálculo de posibilidades favorables deriva del cálculo de posibilidades totales. Los tres primeros argumentos se complementan, mientras que los dos últimos se subordinan. Por otra parte, no se conectan ambas cadenas de argumentos ni se relacionan los puntos que faltan por ganar con cálculos de posibilidades ni con el de probabilidades.

P1: El mismo modo de repartir nos debería llevar a algo que fuera también bastante razonable. Pero seis euros para uno y nada para el otro, cuando apenas había empezado la partida, no sé, no veo que el mismo modo de proceder convenza por igual. Se saquen los puntos que se saquen y se interrumpa la partida cuando se interrumpa, deberíamos llegar a repartir el dinero siempre convencidos. ¿Qué se nos puede estar escapando? A lo mejor ni siquiera los dos coma cinco euros y los tres coma cinco deberían convencernos porque el modo de proceder luego nos lleva a seis y cero. Siempre debería funcionar.

A2: Pero… ¿cómo?

P1: ¿Alguien ha tenido en cuenta cuántos puntos les faltan para ganar la partida cuando uno lleva siete puntos y el otro cinco? ¿Y cuando uno de los chicos lleva un punto y el otro lleva cero puntos? Entonces, ¿cuántos puntos le faltan a cada uno para ganar? El chico que tiene solo uno y al que le queríais dar los seis euros solo le lleva un punto de ventaja al chico que no tiene ningún punto, ese que queríais dejar sin nada de dinero. Tenemos que conseguir verlo de otro modo para que funcione. ¿Por qué decidimos los euros con los puntos que tienen? ¿Por qué no estamos viendo los puntos que les faltan?

A1: Cuando solo le falta un punto por ganar, podemos verlo en negativo porque todavía se puede perder.

P1: Vamos a volver a pensar qué se interrumpe cuando uno ha ganado siete puntos y el otro ninguno. Al chico que le falta un punto por ganar, ¿cuántas posibilidades tiene de ganar? ¿Qué puede pasar? De todo lo que puede pasar, ¿qué le va bien a este chico?

Con respecto a la adaptación de ejemplos y de explicaciones, el discurso de la profesora responde a comentarios de una alumna hasta en tres ocasiones. Dos ejemplos tienen el efecto de refutar comentarios de A1, de inmediato y cuando la aproximación de esta alumna al problema se retoma. No obstante, la pregunta de A2 acerca de cómo proceder en la resolución no se responde ni se retoma más adelante. Sí hay indicios de que la respuesta a la alumna se comunica en el contexto de cultura donde supuestamente hay un significado para 'modos que sean bastante razonables' («El mismo modo de repartir nos debería llevar a algo que fuera también bastante razonable»). En síntesis, los niveles de selección, secuenciación, explicación y adaptación dan cuenta de una variación por contraste seguida de dos variaciones por similitud (N2), de una cadena de complejidad creciente con dos ejemplos que se separan de dicha cadena (N1), de argumentos matemáticos orientados a refutar las soluciones dentro del modelo proporcional y avanzar hacia el cálculo de posibilidades totales y favorables de ganar sin establecer conexiones entre ellos (N1) y, por último, de la influencia de discursos de alumnos (N2). No se observan argumentos sobre el cálculo de probabilidades que apoyen la conexión entre cálculo de posibilidades y cálculo de probabilidades. Esta conexión se comunica al escribir en la pizarra la fórmula laplaciana acompañada del comentario «Esto es lo que tenéis que recordar». No hay, por tanto, comparación de sucesos mediante el cálculo combinatorio de posibilidades favorables y desfavorables para dos ejemplos. De ahí que se concluya que el discurso matemático de la profesora no enlaza los ejemplos con la comparación de probabilidades y su cálculo.

El análisis del cuarto indicador sugiere relaciones entre discursos. Dadas las evidencias de comprensión mejorada de la tarea y de aproximación al cálculo de probabilidades (con un cambio de razonamiento determinista a especulativo), puede decirse que, por un lado, el discurso de la profesora proporciona la oportunidad de explorar la tarea desde la perspectiva de las posibilidades de ganar de cada jugador y, por otro lado, el discurso de la alumna proporciona la oportunidad de explicar argumentos introducidos en la puesta en común. Más en general, no obstante, consideramos que una mayor exposición del discurso de la profesora a discursos de alumnos hubiera permitido mejorar la comunicación de los procesos matemáticos involucrados en la resolución de la tarea.

Adaptación del discurso matemático de la profesora P2 a discursos de alumnos

Al igual que en el ejemplo anterior y dado el interés del capítulo por mostrar relaciones entre la práctica profesional del profesor de matemáticas en clase y el discurso del alumno, presentamos resultados de los cuatro indicadores mencionados con énfasis en el último. En la clase con la profesora P2, vemos la comunicación de cuatro ejemplos: $a = 7$, $b = 5$; $a = 7$, $b = 6$; $a = 7$, $b = 7$; $a = 3$, $b = 4$. Excepto por el último, se observa una cadena monótona de complejidad creciente al variar los valores de b, relacionados estos aspectos con la selección (N3) y secuenciación de ejemplos (N2). Hay además dos argumentos concatenados que involucran a todos los ejemplos: los ejemplos son matemáticamente resolubles; la situación de incertidumbre no es un obstáculo a la resolución.

P2:	Este problema histórico se puede proponer de muchas maneras. Como os lo doy: un jugador que ha llegado a siete puntos y otro que está con cinco. Pero también podría haber dicho que un jugador ha llegado a siete puntos y el otro está con seis, o que los dos jugadores están con siete puntos cuando se interrumpe la partida... Si queréis pues que ninguno esté a solo un punto, que uno tenga tres y el otro cuatro. En todos los casos se soluciona matemáticamente sin saber qué hubiera pasado de verdad si la partida hubiera continuado hasta el final (…)

A3:	Si no sabemos lo que va a pasar realmente, pues no se puede solucionar. O hay muchas soluciones...
A4:	Sí, porque lo que va a pasar puede ser o esto, o aquello, o aquello otro...
P2:	De acuerdo, no sabemos lo que va a pasar realmente, pero sabemos lo que seguro que no va a pasar en la tirada trece. No puede pasar que el jugador que tiene cinco puntos ya gané la partida.
A4:	Pero el jugador que tiene siete puntos ya podría ganar si le sale cara.
P2:	Pues eso, también podemos hablar seguro de lo contrario, de todo lo que puede pasar.
A4:	Me he hecho un lío... ¿cuántos puntos tiene el otro?
P2:	Los dos tienen siete. Aciertas seguro si dices todo lo que puede pasar.
A4:	Se acaba la partida en la tirada que viene porque o gana uno o gana el otro.
A3:	La mitad del dinero para cada uno. Hacemos el otro, que no es tan fácil.
P2:	Vamos poco a poco. Si ahora un jugador tiene siete puntos y el otro tiene seis, acierto si digo que puede pasar todo esto... [en la pizarra, dibujo de bifurcaciones].
A4:	O se acaba en seguida porque el de siete saca un punto más, o quedan empatados en la tirada trece y luego estamos como antes, o gana uno o el otro.
P2:	Vamos a ver, de aquí salen dos opciones, ocho y seis o siete y siete, y de aquí salen otras dos, ocho y siete o siete y ocho [dibujo de bifurcaciones]. Acierto seguro si digo que pasará realmente una de estas tres opciones. Al jugador con siete puntos, le encantan dos de estas tres opciones, y al que tenía seis puntos solo le encanta una de estas tres. ¿Sí? No sabemos lo que va a pasar, pero sabemos seguro todo lo que puede pasar y de todo esto sabemos seguro lo que le va bien a cada uno. De ahí sale una relación de dos tercios y un tercio. El segundo podría ganar, pero solo le va bien una de tres [escritura de 1/3]. ¿Sí? Al otro le van bien dos de tres [escritura de 2/3]. Es más, dos tercios que un tercio. Entonces es más probable que gane el primero. Sin saber qué pasará de verdad, hemos conseguido resolverlo matemáticamente.

Cuando dos alumnos (A3 y A4) solicitan ayuda, se produce una cadena de explicaciones con argumentos conectados: lo no posible es predecible con certeza; todo lo posible es predecible con certeza; todo lo posible y favorable es predecible con certeza; la relación entre posible y favorable es relevante; la comparación de esta relación es comparación de probabilidades. A pesar de que son argumentos válidos, notamos que para el ejemplo $a = 7$ y $b = 6$ se indica que hay tres posibilidades de desarrollo del juego que son equiprobables. Esto pasa inadvertido en este momento, pero al quedar escritas las probabilidades equivocadas en la pizarra

(2/3 y 1/3), el error se detecta y modifica poco más tarde. Con respecto a la adaptación de ejemplos y de explicaciones, el discurso de P2 incorpora apreciaciones que precisan cuestiones introducidas por discursos de A3 y de A4 (N3). Cuando se menciona el hecho de que no se puede predecir con certeza lo que va a pasar en las tiradas siguientes, desde el discurso de P2 se sigue con esta consideración, lo cual lleva a elaborar un argumento acerca de la posibilidad de predecir con certeza lo que no va a pasar. Por otro lado, cuando se comunica la posibilidad de ganar para el caso del jugador de un ejemplo, de nuevo se da continuidad y amplía esta consideración mediante un argumento acerca de la posibilidad de predecir con certeza todo lo que puede pasar. La relación entre discursos, con afirmaciones seguidas de argumentos, se mantiene habiendo también respuesta directa a una pregunta en el discurso de A4. Todo esto permite concluir sobre una elevada adaptación del discurso de la profesora, que debe sin embargo matizarse con la comunicación transparente de significados adecuados para el término «matemáticamente».

En el análisis del discurso matemático de esta profesora vemos un doble impacto: el producido en el propio discurso de la profesora durante la adaptación a discursos de alumnos y el producido en los discursos matemáticos de alumnos. Encontramos evidencias de cambio de comprensión de la tarea en los discursos de A3 y A4, que han sido influyentes en la elaboración de argumentos acerca de la noción de probabilidad. En el discurso de A3 se produce un cambio de considerarse la tarea irresoluble o bien con múltiples soluciones a comunicarse una solución para un ejemplo. Inferimos que los discursos de P2 y de A4 facilitan que se considere esta solución. Vemos una situación similar cuando se pasa de sugerir la multiplicidad de soluciones a mencionar las posibilidades de ganar con un razonamiento combinatorio aplicado a un ejemplo. El impacto del discurso de P2 en discursos de alumnos sugiere que la exploración del ejemplo $a = 7$ y $b = 7$ genera oportunidades de aprendizaje relevantes en la comprensión del cálculo de probabilidades. El impacto hubiera sido mayor, no obstante, si en las explicaciones finales se hubieran retomado los ejemplos a los cuales se ha dedicado tiempo en la presentación de la tarea o si se hubiera revisado su papel cuando se comunica que no se ha clarificado con qué ejemplo se va a trabajar. No se observan, por tanto, conexiones matemáticas entre todos los elementos (N2), ni tampoco parece sistemática la utilización de ejemplos. Como en el ejemplo anterior, volvemos a conjeturar que una mayor exposición a discursos de alumnos, hubiera podido mejorar el establecimiento de conexiones entre argumentos en el discurso de la profesora.

DISCURSO DEL AULA DE MATEMÁTICAS

Para la discusión de la práctica profesional del profesor de matemáticas, hemos reflexionado acerca de la práctica discursiva de este profesor en relación con el discurso del alumno en clase. Además, hemos resumido nuestra propuesta de análisis textual del discurso, del profesor y del alumno, situándolo en el contexto específico de cultura donde se produce. Este es el punto de partida de nuestra aproximación al discurso del aula de matemáticas. Tanto el discurso matemático del profesor como el del alumno en clase se desarrollan en la medida que son contestaciones a los discursos con los que interactúan; en este escenario de interacción, emerge la coordinación de textos y significados del aula de matemáticas. En particular, el discurso hablado del aula, tiene forma de conversación donde el cambio de actor es recurrente, el orden y la duración de discursos específicos no están unívocamente establecidos y el contenido de lo que se comunica se puede anticipar, pero no determinar.

La Figura 5 representa el discurso del aula de matemáticas en su actividad de comunicar matemáticas y la más general de comunicar cultura, esto es, modos de hablar y de hacer (matemáticas en el aula, en pareja y en grupo, en la escuela, en el sistema escolar con tecnología digital…) que se han ido construyendo como adecuados en el contexto y que a menudo son objeto paciente en el texto visible. Cuando un profesor dice a un alumno que «el triángulo está en lápiz», puede estar pidiendo que se dibuje con bolígrafo, lo cual ni el alumno ni el investigador pueden deducir solo a partir del texto. El contexto de cultura fija el significado. Cuando un profesor dice de un problema que se debe «resolver matemáticamente», la interpretación del calificador tiene que ver con los significados para hablar y hacer matemáticas fabricados en el contexto. En Planas, Arnal-Bailera y García-Honrado (2018), se ilustran discursos de profesor donde los modos de hablar y de hacer en la resolución de un problema de probabilidad se vinculan con un supuesto quehacer de la matemática escolar («En todos los casos se soluciona matemáticamente», p. 53; «Hemos conseguido resolverlo matemáticamente», p. 54) sin que dichos modos se comuniquen en el texto literal. También en Arnal-Bailera y Planas (2013) puede leerse sobre la comunicación transparente de los modos de utilizar la pizarra digital interactiva junto a programas de geometría dinámica en la resolución de problemas de matemáticas. El contexto de cultura se hace notar en la actividad matemática pero no se habla, ni se explica o prepara mediante textos ofrecidos en clase porque no se piensa como objeto de enseñanza.

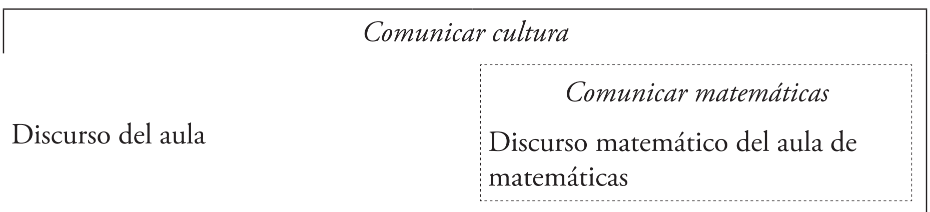


Figura 5. Línea de estudio sobre el discurso del aula

Dada la centralidad del contexto de cultura en la coordinación del discurso del alumno, del profesor y del aula de matemáticas, encaminamos estas últimas líneas a la necesidad de estudiar más a fondo aspectos de la cultura del aula. Cabe profundizar en aspectos que se acostumbran a manifestar de manera transparente –como objeto paciente de la comunicación– en la práctica profesional discursiva del profesor. Hace más de dos décadas, Yackel y Cobb (1996) se refirieron a: «las regularidades en la actividad comunitaria o colectiva del aula que pueden considerarse conjuntamente establecidas por profesor y alumnos como miembros de la comunidad del aula» [nuestra traducción del inglés] (p. 178). Nombraron normas sociomatemáticas a las regularidades particulares de la actividad matemática (e.g., qué cuenta como explicación en clase de matemáticas, como ejemplo de un objeto matemático, como demostración matemática) y alertaron sobre la escasa atención a su enseñanza en la práctica profesional, a pesar de la obligación exigida al alumno de reconocerlas, aprenderlas y utilizarlas. Una función de la práctica del profesor de matemáticas en su enseñanza es comunicar proposiciones declarativas (e.g., cuántos vértices tiene un cuadrilátero, cuáles son las ternas pitagóricas), pero también rutinas y obligaciones, que no son socialmente neutras, ni didácticamente adecuadas *per se*, sino fruto de la constitución naturalizada de modos de hablar y de hacer matemáticas en la escuela. Precisamente uno de nuestros aprendizajes ha sido descubrir discursos matemáticos de alumnos que retan y enriquecen el discurso del profesor con preguntas sobre contenidos que se empiezan considerando en el grupo próximo de alumnos y que incorporan dudas razonadas sobre cuáles son los modos adecuados de hablar y de hacer matemáticas en clase. En Civil y Planas (2004) relatamos situaciones donde los alumnos decidían sobre la adecuación de ciertos modos en función de quién era el alumno que los había introducido. Ya sea en el análisis de la adaptación a discursos de alumno o en el del discurso en interacción entre alumnos, la propuesta de estudiar el texto debe incorporar reflexiones acerca de lo que tiene significado y valor en el contexto. Estas reflexiones permiten concluir sobre la construcción conjunta de una generalización algebraica en la actividad de Jose y Gabriel, o bien sobre la existencia velada de significados para 'matemáticamente' en la comprensión del cálculo de probabilidades en el aula de P2.

Desde un punto de vista didáctico, el problema de la transparencia de las normas del aula está asociado a la concepción y al desarrollo de la práctica profesional del profesor de matemáticas. Si bien las normas sociomatemáticas se hacen notar en la enseñanza y son objeto de aprendizaje y evaluación, no se acostumbran a enseñar porque se suponen sabidas, compartidas y estandarizadas. Así, se espera del alumno que hable y escriba las matemáticas en clase como lo haría un profesor de matemáticas sin que haya habido una práctica profesional del profesor deliberada y sostenida en el tiempo al respecto. Se entra en un círculo complicado que dificulta suponer lo que haría el profesor de matemáticas. Como quiera que comunicar cultura y comunicar matemáticas no se pueden separar más que artificialmente, conviene formar al profesor en una interpretación amplia del contenido matemático que tiene que enseñar. Esto es, formarle en la producción, distribución y consumo de normas sociomatemáticas mediante la incorporación de textos visibles en el discurso del aula. Lo que en particular significa que, en lugar de darse por sentadas, las normas deben justificarse reflexivamente en relación con otras opciones de hablar y de hacer alternativas. Esto nos lleva finalmente a la cuestión del desarrollo profesional del profesor de matemáticas. Una consecuencia de la necesidad de explicar y justificar reflexivamente las normas es la demanda al profesor de sofisticadas habilidades dialógicas de adaptación y atención al discurso del alumno.

En varios de los proyectos en los que hemos participado, el discurso del profesor de matemáticas en clase ha sido investigado como objeto cualitativo de desarrollo profesional. En los capítulos de Hunter, Civil, Herbel-Eisenmann, Planas y Wagner (2018), se reconoce de manera recurrente el contexto de cultura y su influencia en la práctica profesional de aula. Ahí se relatan iniciativas –algunas basadas en experimentos de enseñanza– de deconstrucción de culturas del aula de matemáticas que relegaban sistemáticamente y de manera transparente ciertos modos de hablar y de hacer y, con ello, reducían la distribución equitativa de oportunidades de participación, entre alumnos y entre alumnos y profesor. Varios de los capítulos de ese volumen están escritos por equipos de investigadores universitarios y profesores de aula, que explican sus experiencias de desarrollo profesional en colaboración y de transformación de culturas de aula mediante la mejora de las habilidades dialógicas del profesor de matemáticas en su comunicación con los alumnos. También el caso de Brayan, en Arnal-Bailera y Planas (2013), es ilustrativo de una experiencia de enseñanza orientada a la deconstrucción de modos de hacer y de hablar matemáticas que excluían la participación de modos ajenos al capital social y cultural privilegiado por la institución escolar. En todos estos estudios, la 'adaptación de ejemplos y de explicaciones' es un indicador útil para identificar y evaluar la construcción compartida del discurso matemático del profesor y sus efectos.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado en el marco colaborativo de los Proyectos EDU2016-81994-REDT y EDU2015-65378-P, MINECO-Espana / FEDER-Europa, y con el apoyo del Grupo GIPEAM, SGR2017-101, AGAUR-Catalunya.

REFERENCIAS

Adler, J. y Ronda, E. (2017). Mathematical Discourse in Instruction matters. En J. Adler y A. Sfard (Eds.), *Research for educational change. Transforming researchers' insights into improvement in mathematics teaching and learning* (pp. 64-81). Londres, Reino Unido: Routledge.

Arnal-Bailera, A. y Planas, N. (2013). Uso de tecnología en el aprendizaje de geometría con grupos de riesgo: Un enfoque discursivo. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Actas del XVII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 157-164). Bilbao: SEIEM.

Austin, J. L. y Howson, A. G. (1979). Language and mathematical education. *Educational Studies in Mathematics, 10*, 161-917.

Bakhtin, M. M. (1981). *The dialogic imagination: Four essays* (Ed., M. Holquist; Trad., C. Emerson y M. Holquist). Austin, Estados Unidos: University of Texas Press.

Boukafri, K. y Planas, N. (2018). Métodos para el análisis de la lengua del profesor de matemáticas en clase. En L. J. Rodríguez, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, A. Bruno y F. J. García (Eds.), *Actas del XXIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 171-180). Gijón: SEIEM.

Chico, J. (2014). *Impacto de la interacción en grupo en la construcción de argumentación colectiva en clase de matemáticas*. Trabajo de tesis doctoral. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.

Chico, J. (2018). Impacto de la interacción en grupo en la producción de la lengua del álgebra en clase de matemáticas. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática, 14*, 31-47.

Chico, J. y Planas, N. (2018). Producción de la lengua de las matemáticas en clase durante la interacción en grupo. En L. J. Rodríguez, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, A. Bruno y F. J. García (Eds.), *Actas del XXIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 201-210). Gijón: SEIEM.

Chico, J., Planas, N., Morera, L. y Fortuny, J. M. (2014). Mathematical practices inside the classroom: An episode of cooperative interaction in pair work. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics), 22*(1), 403-407 (Actas 63 CIEAEM).

Civil, M. y Planas, N. (2004). Participation in the mathematics classroom: Does every student have a voice? *For the Learning of Mathematics, 24*(1), 7-12.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cobb, P., Zhao, Q. y Dean, C. (2009). Conducting design experiments to support teachers' learning: A reflection from the field. *The Journal of the Learning Sciences, 18*(2), 165-199.

Ferrer, M., Fortuny, J. M. y Morera, L. (2014). Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las Ciencias, 32*, 385-405.

Ferrer, M., Fortuny, J. M., Planas, N. y Boukafri, K. (2014). Modos de actuación e interacción y generación de oportunidades de aprendizaje matemático. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Actas del XVIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 297-305). Salamanca: SEIEM.

García-Honrado, I., Fortuny, J. M., Ferrer, M. y Morera, L. (2016). Análisis del aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje generadas en la discusión en gran grupo de un problema de transformaciones geométricas. En J. A. Macías y otros (Eds.), *Actas del XX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 253-263). Málaga: SEIEM.

Gavilán, J. M., Sánchez-Matamoros, G. y Escudero, I. (2014). Aprender a definir en matemáticas: Estudio desde una perspectiva sociocultural. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(3), 529-550.

Goizueta, M., Mariotti, M. A. y Planas, N. (2014). Validating in the mathematics classroom. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol y D. Allan (Eds), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (vol. 3, pp. 169-176). Vancouver, Canadá: PME.

Halliday, M. A. K. (1978). *Language as social semiotic: The social interpretation of language and meaning*. Londres, Reino Unido: Edward Arnold.

Halliday, M. A. K. (1993). Towards a language-based theory of learning. *Linguistics and Education, 5*(2), 93-116.

Hunter, R., Civil, M., Herbel-Eisenmann, B., Planas, N. y Wagner, D. (Eds.) (2018). *Mathematical discourse that breaks barriers and creates space for marginalised learners*. Rotterdam, Holanda: Sense Publishers (Brill).

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos de línea. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 2*, 53-70.

Llinares, S. y Valls, J. (2010). Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussions in a virtual video-based environment. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(2), 177-196.

Morera, L., Planas, N. y Fortuny, J. M. (2013). Design and validation of a tool for the analysis of whole group discussions in the mathematics classroom. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1506-1517). Antalya, Turquía: ERME.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically. Communication in mathematics classrooms*. Londres, Reino Unido: Routledge.

Planas, N. (2010). Las teorías socioculturales en la investigación en educación matemática: Reflexiones y datos bibliométricos. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Actas del XIV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 163-195). Lleida: SEIEM.

Planas, N. (2017). Aprendizaje matemático multilingüe: Qué se sabe y desde qué teorías. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Actas del XXI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 91-105). Zaragoza: SEIEM.

Planas, N., Arnal-Bailera, A. y García-Honrado, I. (2018). El discurso matemático del profesor: ¿Cómo se produce en clase y cómo se puede investigar? *Enseñanza de las Ciencias, 36*(1), 45-60.

Planas, N. y Civil, M. (2010). Discourse processes in critical mathematics education. En H. Alrø, O. Ravn y P. Valero (Eds.), *Critical mathematics education: Past, present and future. Festschrift for Ole Skovsmose* (pp. 45-59). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers (Brill).

Planas, N., Fortuny, J. M., Arnal-Bailera, A. y García-Honrado, I. (2016). El discurso matemático del profesor. Ejemplos, explicaciones y coherencia local. En A. Berciano, C. Fernández, T. Fernández, J. L. González, P. Hernández y otros (Eds.), *Actas del XX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 437-446). Málaga: SEIEM.

Planas, N., Morgan, C. y Schütte, M. (2018). Mathematics education and language. Lessons from two decades of research. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education. Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp. 196-210). Londres, Reino Unido: Routledge.

Planas, N. y Valero, P. (2016). Tracing the socio-cultural-political axis in understanding mathematics education. En Á. Gutiérrez, G. H. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education. The journey continues* (pp. 447-479). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers (Brill).

Roth, W. M. y Radford, L. (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning*. Rotterdam, Holanda: Sense Publishers (Brill).

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.