Miradas didácticas ad hoc en problemas específicos de la enseñanza y aprendizaje de la matemática

Marcela Parraguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen

Este artículo presenta desde una postura cognitiva y a través de ejemplos, distintas miradas didácticas a problemas concretos que emergen en enseñantes y aprendices respecto de tópicos matemáticos específicos. Cada ejemplo, es el resultado de una investigación, que se abordó desde una adhesión o variedad de la Teoría Modos de Pensar –Teórico y Práctico–, donde los elementos articuladores entre los Modos son los elementos principales de la mirada que se quiere establecer, para evidenciar la comprensión de los objetos matemáticos concretos que se abordan en cada uno de esos ejemplos.

Palabras clave: Teoría modos de pensamiento, articuladores y ejemplos.

Antecedentes

ELa teoría Modos de Pensamiento de Sierpinska (2000) se concibe en sus inicios solo en el contexto del álgebra lineal (AL), con la finalidad de hacer explícito el pensar teórico de esta rama de la matemática. En su trabajo con enseñantes y aprendices del AL, Sierpinska identificó tres tipos de pensamientos que ellos ponen en juego –como estrategia cognitiva–, cuando enseñan o aprenden el AL. Dos de ellos corresponden al pensar teórico y el otro al pensar práctico del AL.

El pensamiento teórico del AL. Se produce en el hecho puro de pensar las relaciones sobre sistemas de conceptos del AL, y que Sierpinska (2000) los explicita en los Modos de Pensar **Analítico-Aritmético (AA)** y **Analítico-Estructural (AE)**, donde los objetos del AL son dados indirectamente. Esto es, en el modo AA un objeto es definido por una fórmula que permite calcularlo, en cambio, en el modo AE, un objeto es definido a través de un grupo de determinadas propiedades.

El pensamiento práctico del AL. Se genera con el fin de obtener algo concreto en acciones sobre hechos determinados del AL y Sierpinska lo denomina Modo de pensar **Sintético-Geométrico (SG)**, donde los objetos del AL son dados directamente para ser descritos por la mente.

Estos tres modos de pensar el AL, –AA, AE y SG– hay que considerarlos igualmente útiles en una actividad matemática, porque cuando ellos interactúan –a través de elementos que se han etiquetado como *articuladores*–son muestra de comprensión del AL. También hay que destacar, que estos tres modos de pensar emergen en lo histórico-epistemológico del AL para abordar algunas posiciones dogmáticas opuestas, como, (1) que el AL rechaza los números dentro de la geometría o (2) que la intuición geométrica sea llevada a un dominio puramente aritmético.

En lo que sigue, se mostrarán una serie de ejemplos que se han agrupado en dos categorías: Cónicas y Sistemas Numéricos con la finalidad de mostrar cómo esta Teoría ha evolucionado, al interpretar ahora modos de pensar objetos matemáticos que no pertenecen al ámbito del AL, propiamente tal.

Cónicas

Indagación en el objeto cónicas (Astorga y Parraguez, 2014; Bonilla y Parraguez, 2013) a través de los modos de pensar: estuvo motivada en el hecho que las técnicas analíticas que utilizan los estudiantes, no son insuficientes para lograr una comprensión profunda del concepto.

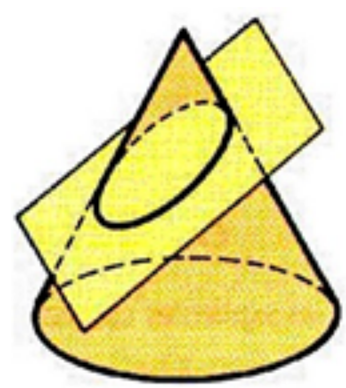
Modo de pensar AA-Elipse	Modo de pensar AE-Elipse	Modo de pensar SG-Elipse
Conjunto de pares ordenados que cumplen la ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ donde a y b son números reales distintos.	Lugar geométrico de todos los puntos del plano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es siempre constante positiva.	

Figura 1.Modos de pensar una elipse en el plano (Bonilla y Parraguez, 2014, p. 24).

En Bonilla y Parraguez (2014), se presentan los tres modos de pensar la elipse (Figura 1) y que, a través de la metodología de estudio de caso (Stake, 2010), se logró establecer que los articuladores que evidencian los estudiantes, tuvo su éxito en gran medida gracias al diseño de preguntas en la Geometría Discreta del Taxista (Krause, 1986). A continuación, se presenta una de las preguntas utilizadas en la investigación reportada.

Las tres imágenes de la Figura 2 representan elipses en "Geocity". Los puntos F y F´ se conocen como focos de la elipse. ¿Qué característica común tienen los puntos de la elipse en relación a los focos en cada uno de los casos?

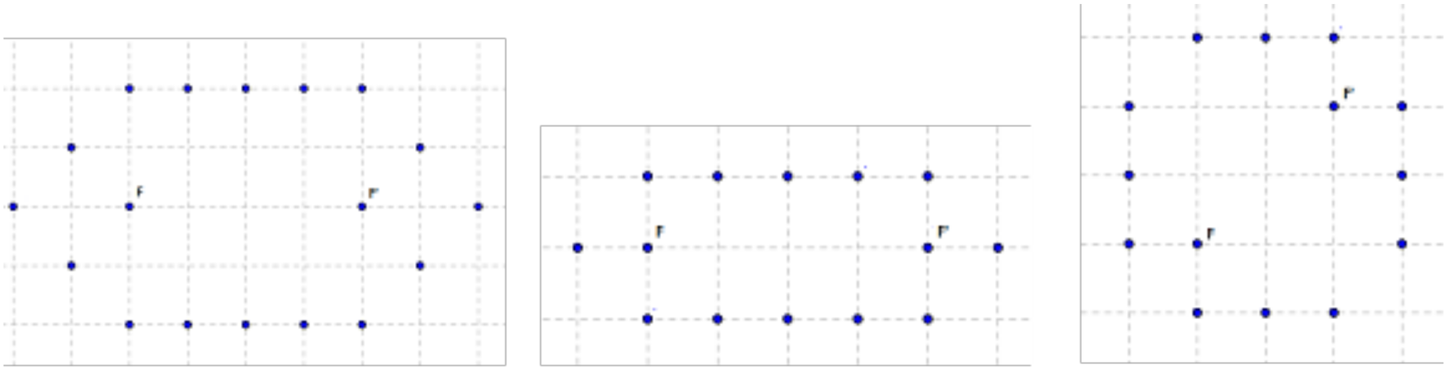


Figura 1.Modos de pensar una elipse en el plano (Bonilla y Parraguez, 2014, p. 24).

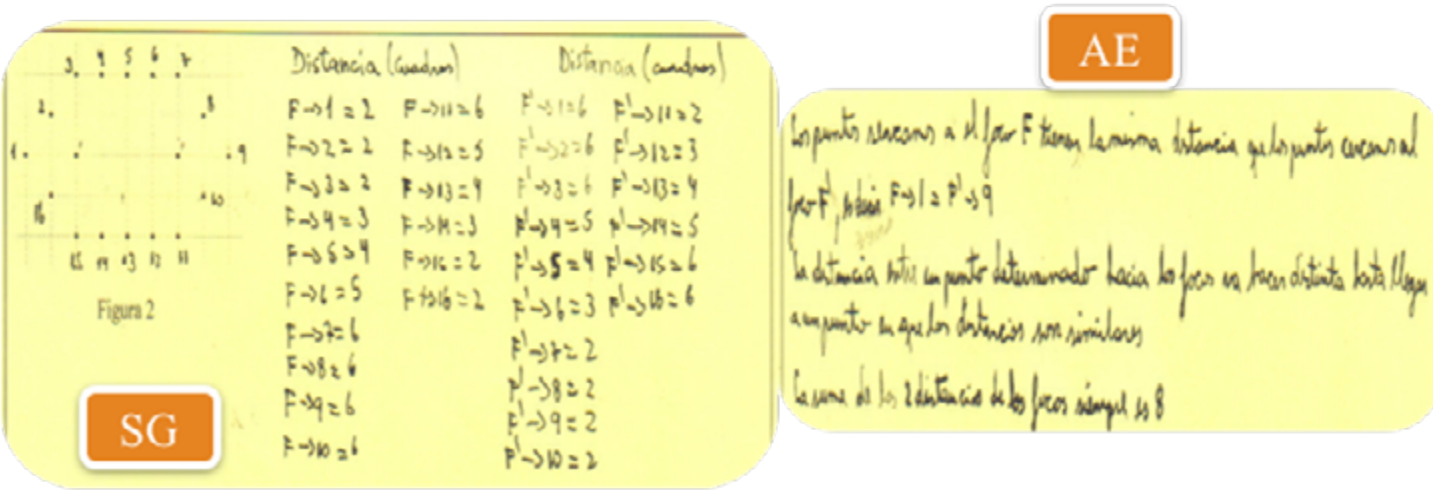


Figura 3. Argumento de SG-Elipse a AE-Elipse.

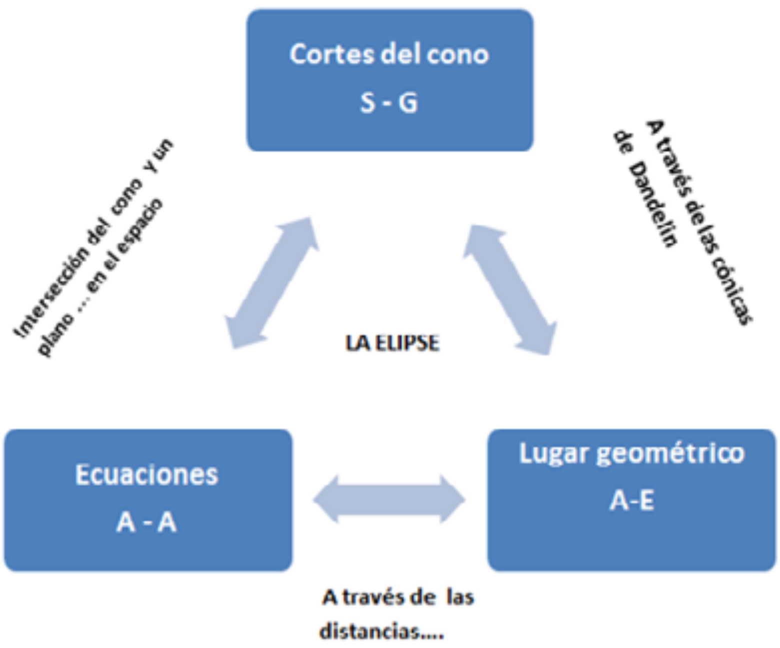


Figura 4. Elementos articuladores de los modos de pensar la Elipse.

Sistemas Numéricos

Otros tópicos que se han trabajado desde los modos de pensar son los sistemas numéricos (Randolph y Parraguez, 2015; Bonilla y Parraguez, 2015). Decimos sistema y no conjunto numérico, porque son conjuntos dotados de estructura. La motivación de estudiar estos tópicos, radica en la forma parcial que el currículo nacional propone trabajar los Sistema Numéricos, favoreciendo la operación algebraica de ellos y entendiendo a los números de estos Sistemas como entes simbólicos sin significado, y–no como un Sistema Numérico–.

A modo de ejemplo de los Sistemas Numéricos, en la Figura 5, se presentan los tres modos de pensar el Sistema de los Números Enteros.

AE

Z= $\{[(n,m)]_R : n,m \in N\}$
Donde $[(n,m)]_R$ es la clase de equivalencia del par (n,m)
R una relación de N x N, donde $(n,m) \wedge (p,q) \in$ N x N, tal que: $(n,m)R(p,q)$ *si y solo si* $n+q=p+m$.

AA

$$Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$$

SG

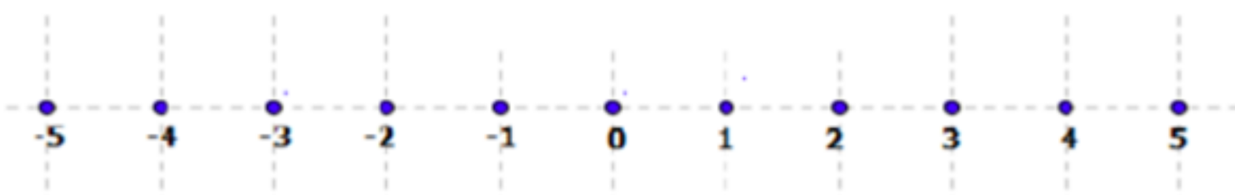


Figura 5. Modos de pensar el Sistema de los Números Enteros (Bonilla y Parraguez, 2015, p. 588).

Utilizando la metodología de estudio de caso (Stake, 2010), se logró evidenciar que los estudiantes de Enseñanza Media logran articular el modo SG-Sistema Z con el modo AE-Sistema Numérico Z, a través la correspondencia entre la recta que muestra los números enteros y su correspondiente clase de equivalencia. Esto último es muy importante de explicitar, ya que un conjunto de números (AE) se identifica con uno solo que lo representa (SG), lo que se muestra en la Figura 6.

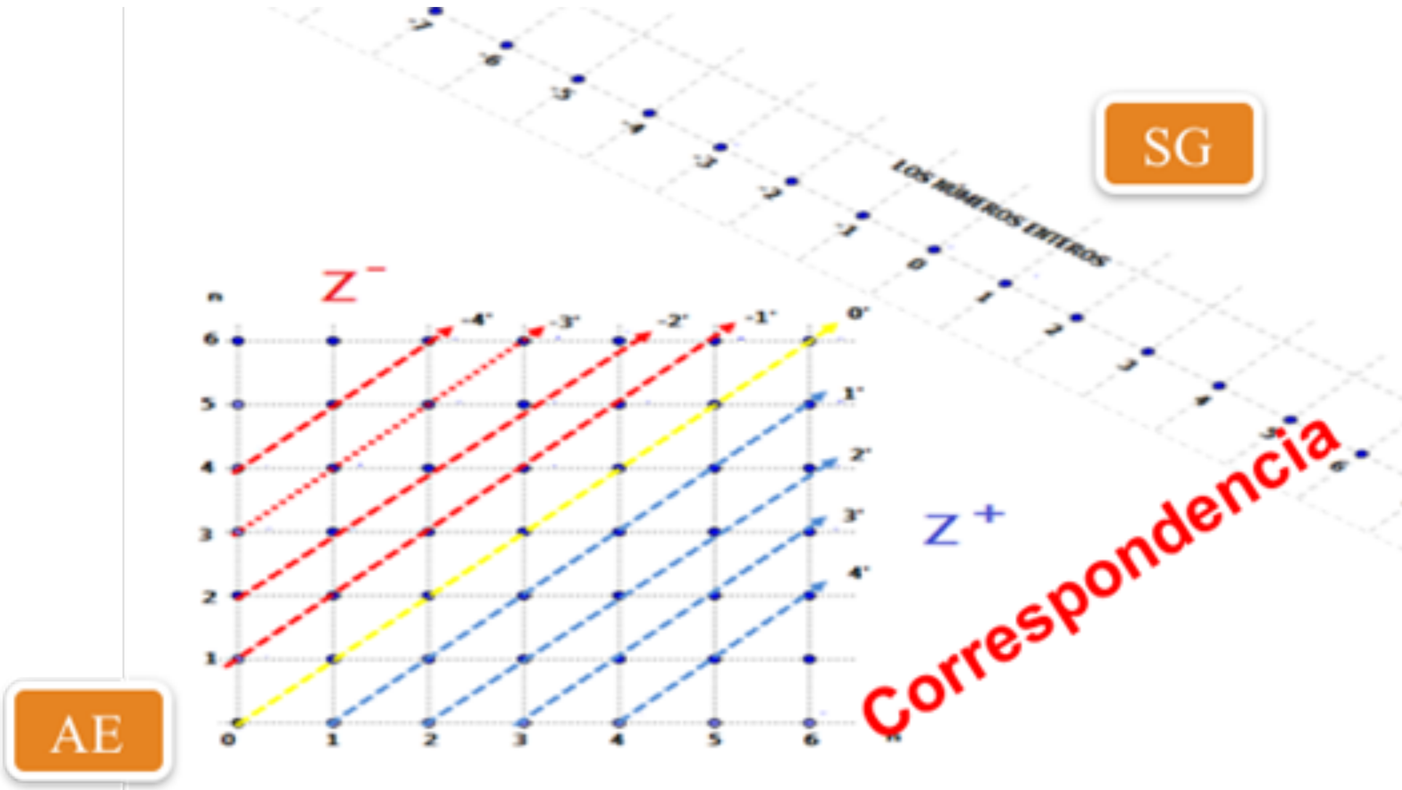


Figura 6. Articulación entre los modos AE y SG del Sistema de los Números Enteros.

Conclusiones

Estos ejemplos nos han mostrado explicaciones de la comprensión de objetos matemáticos desde lo Geométrico, lo Aritmético y lo Estructural, pero en interacción, haciendo explícito los articuladores, a través de evidencia empírica. También estos modos de pensar, han permitido desarrollar la investigación, no solo adheridos a un referente teórico, sino que a una variedad.

La investigación con los modos de pensar ha seguido desarrollándose en otras áreas, de hecho, ha incursionado en tópicos de Cálculo, explicitando los modos de pensar la derivada.

Referencias

Astorga, M. y Parraguez, M. (2014). Comprensión de las cónicas a través de los modos de pensamiento-Avance de Investigación. Revista Chilena de Educación Científica, 13(2), 19-24.

Bonilla, D. y Parraguez, M. (2015). Construcción Didáctica de los Números Enteros desde la teoría Modos de Pensamiento, 587-591. En C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandía y M. Parraguez (eds.), 2015. Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX. Villarrica: SOCHIEM.

Bonilla, D. y Parraguez, M. (2013). La elipse desde la perspectiva de la teoría los modos de pensamiento. Alemania: Editorial académica española. Recuperado de https://www.eaepublishing.com/catalog/details//store/es/book/978-3-8465-

6456-1/la-elipse-desde-la-perspectiva-de-la-teor%C3%ADa-los-modos-de-pensamiento

Krause, E. (1986). Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry. New York, United States of America: Dover Publications.

Pinto-Rojas, I. y Parraguez, M. (2017). Articulators for Thinking Modes of the Derivative from a Local Perspective. IEJME—MATHEMATICS EDUCATION, 12(10), 873-898.

Randolph, V. y Parraguez, M. (2015). Comprensión de los números complejos desde los modos de pensamiento. En R. Flores (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa nº 28, 401-409. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Disponible en: http://www.clame.org.mx/documentos/alme28.pdf

Sierpinska, A. (2000). "On some aspects of students' thinking in linear algebra", in J.-L. Dorier (ed.), On the Teaching of Linear Algebra, 209-246. Dortrecht: Kluwer Academic.

Stake, R. E. (2010). Investigación con estudio de casos (5ª Ed.). Barcelona: Labor.