

# Una situación a-didáctica para el tratamiento de la variable aleatoria

Valeria Bizet Leyton, Daniela Araya Tapia, Elisabeth Ramos Rodriguez

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

## Resumen

Se presenta una tarea escolar para el proceso enseñanza y aprendizaje de una variable aleatoria, que fue diseñada desde la teoría didáctica. En un previo y posterior análisis de la tarea se puede concluir que, en relación con la construcción del conocimiento correspondiente a la variable aleatoria, desde su caracter funcional ésta presenta algunas dificultades en la Escuela Secundaria, a la cual asisten los estudiantes de 15 a 16 años de edad. Además la identificación de una variable micro-didáctica; número de elementos que el espacio muestral posee.

**ABSTRACT** We present a school task for teaching and learning process of, the random variable, which was designed from the didactic issues theory. An a priori and a posteriori task analysis has allowed to conclude, in relation with the construction of knowledge corresponding to the random variable (from its functional character), that presents some difficulties in high school students (from 15 to

16 years old). Furthermore the identification of a micro-didactic variable; number of elements that the sample space possesses.

**Palabras clave:** Variable aleatoria, situación a-didáctica, teoría de situaciones didácticas, educación media.

## Introducción

En los últimos veinticinco años, el tratamiento de la probabilidad se ha ido incorporando en los currículos de matemática en los distintos niveles educativos en gran parte de los países desarrollados (Vásquez y Alsina, 2014). Chile no ha quedado ajeno a estas reformas, por ello es que se requiere contar con investigaciones *ad hoc* en el ámbito de didáctica de la estadística y de la probabilidad.

En el presente estudio hemos trabajado con uno de los objetos matemáticos fundamentales del eje Datos y Azar en la educación media, como lo es la variable aleatoria. Desde décadas anteriores hasta la actualidad diversos autores (Batanero, Chernoff, Engel, Lee y Sánchez, 2016), proponen a la variable aleatoria entre los conceptos fundamentales en la enseñanza de la Estadística, posicionan a ésta como un

conocimiento relacionado con la probabilidad esencial en la educación escolar y relevante para entender situaciones de la vida real.

En el currículo nacional (MINEDUC, 2009), el concepto variable aleatoria se introduce en el nivel Segundo Medio (15-16 años). En la guía didáctica del docente para dicho nivel y distribuida por el MINEDUC se menciona con respecto al objeto matemático, que algunos errores de los estudiantes pueden provenir de una inadecuada comprensión del concepto función (Jiménez y Rupín, 2013). Para Pérez y Parraguez (2013) la variable aleatoria al ser enseñada en el nivel secundario presenta dificultades epistemológicas, didácticas, cognitivas y pedagógicas existiendo *“poca claridad de la noción de variable aleatoria, lejos de relacionarla con su significado funcional (en el contexto estadístico, aleatorio)”* (p. 590). Desde la perspectiva de la epistemología de la matemática, Ruiz (2006) reporta que a los estudiantes les resulta difícil la naturaleza funcional de la variable aleatoria y la composición de funciones vinculada con ella y la probabilidad.

En este escenario, nuestro estudio aborda la problemática relativa a las dificultades de los estudiantes de educación media en comprender la naturaleza funcional del concepto variable aleatoria. Es de interés conocer cómo los estudiantes se apropian del concepto aludido a nivel escolar. Para ello, hemos diseñado, aplicado y analizado los datos de la implementación de una tarea escolar, considerando como fundamento teórico elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas, de tal manera de atender a la pregunta de investigación, *¿Cuáles son las dificultades que presentan los estudiantes al abordar una situación a-didáctica en una clase sobre variable aleatoria?*

A continuación, se precisan los conceptos de la Teoría de Situaciones Didácticas a considerar en nuestro estudio, para dar cuenta de la pregunta de investigación planteada.

### Marco teórico

*La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) propuesta por Brousseau (2007)*, busca indagar el sistema didáctico, constituido por tres entes profesor-estudiantes-saber y sus interacciones focalizándose en la dimensión cognitiva y epistemológica, vinculada a la construcción del conocimiento matemático, siendo el profesor quien facilita el medio en el que el estudiante construye su conocimiento. En la TSD, existen dos conceptos fundamentales, situación didáctica y situación a-didáctica.

Una situación didáctica, es una situación normal de clase, donde el profesor elige un problema con la intención de enseñar al estudiante un saber matemático. Mientras que en la situación a-didáctica, el estudiante aborda un problema de donde emergen conocimientos, el profesor emplea esta situación para que los estudiantes construyan un conocimiento, al cual podrá referirse para exponer el saber, además sólo puede comprenderse con relación a la situación didáctica.

Brousseau (2007), introduce tres tipos principales de situaciones que conducen gradualmente al estudiante a especificar el conocimiento utilizado para resolver un problema: situación de acción, situación de formulación, situación de validación, las cuales conforman una situación a-didáctica. Luego de finalizada la situación a-didáctica, se lleva a cabo la institucionalización, donde el profesor explicita las relaciones entre el conocimiento construido por el estudiante en

dicha situación y el saber que desea enseñar.

En el desarrollo de la tarea escolar de nuestra investigación, hay una primera situación (*de acción*); en un grupo de tres a cinco integrantes, el estudiante se interesa en abordar el desafío propuesto e intenta dar respuesta a él poniendo en acción conocimientos previos. La segunda situación (*de formulación*), el estudiante comunica al equipo su estrategia de resolución y discute entre pares para generar una estrategia común (representar la relación entre los conjuntos propuestos en lenguaje figural, tabular o natural). Una tercera situación (*exposición y discusión de estrategias*), cada equipo comunica al grupo curso sus resultados, comprobando estos, y logrando un consenso sobre la respuesta precisa del desafío. Para finalizar con la cuarta situación (*de institucionalización*) en la que el profesor a partir de las representaciones propuestas por los grupos, introduce los conceptos de variable aleatoria y función de probabilidad.

Cabe destacar que en la tarea escolar no se considera una situación de validación, pues

A raíz de los festejos del día del alumno, el profesor de taller de cine del colegio Sol Naciente desea conocer el número de estudiantes inscritos que tiene cada uno de los 30 apoderados del taller, por lo cual solicita la información a la secretaria del establecimiento. Los resultados para tal efecto son:

Número de apoderados	8	13	7	2
Número de estudiantes	1	2	3	4

La intención es efectuar una rifa que beneficie a los alumnos, asignándose a cada apoderado un boleto de rifa. En la celebración del día del alumno se realizará el sorteo y se premiará a los estudiantes de un apoderado con entradas para el cine, pero éstas se tienen que comprar con anticipación, pues hasta mañana están en oferta. Por lo tanto, el profesor debe decidir cuántas tiene que comprar, con la finalidad de abaratar costos.

Dados los conjuntos A, B y C definidos por

A: el conjunto de 30 apoderados del taller. B: el conjunto de cantidad de estudiantes. C: el conjunto de posible ocurrencia de cada situación. Defina y represente la relación entre A y B y entre B y C.

Figura 1. Tarea escolar implementada

los estudiantes no establecen la validez del conocimiento característico de la situación: la variable aleatoria. Panizza (2003) señala que, no se trata de una regla general, aunque pueda ser apropiado en algunos casos, que para cada saber al que apunte la enseñanza hay que pasar necesariamente por situaciones de acción-formulación-validación. Habrá conocimientos que son oportunos formular pero cuya validación explícita no sea apropiada para ciertos niveles de escolaridad.

### Desarrollo

Este estudio se enmarca en el paradigma de investigación cualitativo de tipo descriptivo e interpretativo. Los sujetos informantes fueron 22 estudiantes del nivel Segundo Medio (15 a 16 años) de un establecimiento educacional subvencionado de la región de Valparaíso. Como instrumento de recogida de datos se empleó una tarea escolar (ver figura 1) y un video de su implementación que tuvo una duración de 90 minutos.

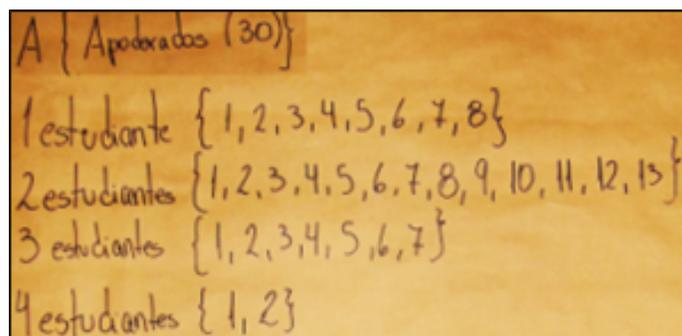
Para el estudio se empleó la técnica del análisis de contenido, donde se definieron 10 categorías de análisis (C) en la primera y segunda situación de la situación a-didáctica diseñada. En la situación de acción el procedimiento se realizó a partir de la identificación preliminar de elementos conceptuales que pueden contribuir a la resolución del desafío, mientras que en la situación de formulación, se produjo con base en el reconocimiento de las posibles estrategias de resolución de éste. Los alumnos se dividieron en grupos asignados por  $G_i$ , con  $i=1, 2, 3, 4, 5$ .

## Reflexiones

En la situación de acción, inicialmente cuatro grupos ( $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  y  $G_5$ ) identificaron como espacio muestral la cardinalidad de los cuatro subconjuntos al realizar una partición en A (figura 2). Después de realizar la devolución prevista en el plan de clase, la mayoría de los grupos (4) lograron identificar la cardinalidad del espacio muestral, aunque 2 grupos continuaron describiendo sus elementos como una colección de números y no como una colección de personas (figura 2). De esta manera se constata una dificultad para identificar el espacio muestral del experimento aleatorio.



Identificación del espacio muestral del grupo  $G_5$  (5 estudiantes) antes de plantear la devolución al curso.

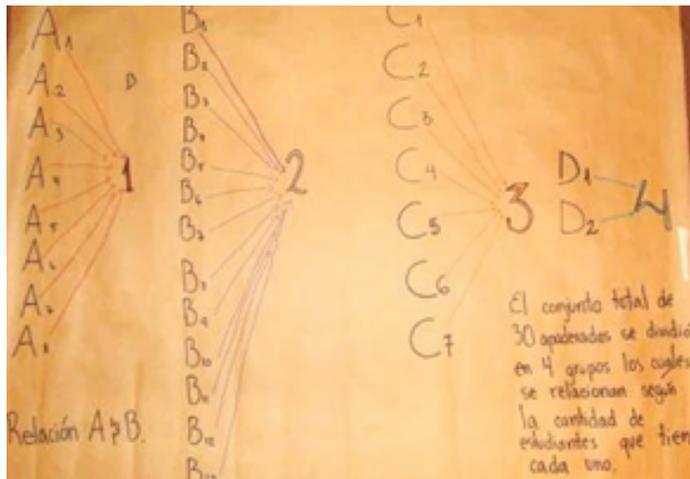


Identificación del espacio muestral del grupo  $G_4$  (3 estudiantes) después de plantear la devolución al curso.

Figura 2. Respuesta en la situación de acción de algunos grupos.

En la situación de formulación se aprecia, en las producciones o discursos de los grupos, que solo un grupo no respondió al requerimiento ( $G_5$ ). Tres grupos ( $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ ) identificaron en el desafío la variable aleatoria; dos de ellos ( $G_1$  y  $G_3$ ) representaron la relación entre los conjuntos A y B en lenguaje natural y lenguaje figural a través de un diagrama sagital o esquema. Además, solo un grupo ( $G_2$ ) representó dicha relación a través de una tabla. También en esta situación, tres grupos ( $G_1$ ,  $G_2$  y  $G_4$ ) reconocieron la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria; dos de ellos ( $G_1$  y  $G_4$ ) representaron la relación entre los conjuntos B y C en lenguaje natural. Además el grupo  $G_1$  representó la relación en lenguaje figural mediante un diagrama sagital. Es importante destacar que la respuesta del grupo  $G_2$ , fue clasificada en la categoría C10, ya que en su discurso evidenciaron haber reconocido la función de probabilidad (figura 3), aunque precisamente en la tabla representaron

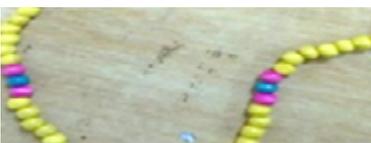
la función compuesta entre el espacio muestral y la probabilidad. Es así, que fue posible identificar una dificultad asociada a la aplicación del concepto de función real en el contexto de probabilidad, en particular, una dificultad en relacionar el recorrido de la variable aleatoria con el conjunto de probabilidades que ésta toma en cada uno de sus posibles valores.



Grupo G3 (4 estudiantes)

A	B	C
8 apoderados	1 estudiante	8/630
13 apoderados	2 estudiantes	13/630
7 apoderados	3 estudiantes	7/630
2 apoderados	4 estudiantes	2/630

A y B es la relación entre apoderados y hijos que tiene cada apoderado



Probabilidad de que los apoderados ganen según la cantidad de estudiantes

Grupo G1( 5 estudiantes)

Conjunto A  
 Grupo a = 8 apoderados  
 Grupo B = 13 apoderados  
 Grupo C = 7 apoderados  
 Grupo D = 2 apoderados

Grupo	Apoderado	Hijos
a	8	1
b	13	2
c	7	3
d	2	4

Por ejemplo la probabilidad de un apoderado que tiene un hijo gane la rifa".

Grupo	%
a	26,6
b	43,3
c	23,3
d	6,6

Grupo G2( 5 estudiantes)

Figura 3. Respuesta en la situación de formulación de algunos grupos.

Avances

se confirma la presencia de varias dificultades reportadas previamente en la literatura relacionada con la comprensión de la variable aleatoria: dificultad en identificar elementos del espacio muestral (Batanero, 2001), dificultad en identificar las probabilidades de sucesos (Fernández, Andrade, Montañez, Beltrán y Zamora, 2011) y dificultad asociada a aplicar el concepto de función real en el contexto de probabilidad (Jiménez y Rupín, 2013). Si bien

existen investigaciones previas que reconocen dichas dificultades, estas no conectan esas dificultades con el análisis de los potenciales tipos de registros usados por los estudiantes y los obstáculos intrínsecos asociados a estos. Además como resultado de la implementación del desafío se evidenció la utilización implícita de la variable aleatoria sin haber sido definida previamente (Ruiz, 2006) y la variable micro didáctica: cantidad de elementos que posea el espacio muestral.

### Conclusiones

Es posible concluir que la tarea escolar diseñada es una auténtica situación a-didáctica, la que permitió al profesor abandonar su rol de comunicador del saber y a los estudiantes construir su propio conocimiento como una experiencia grupal y colaborativa, con la cual el docente podrá conectar el saber institucional.

### Referencias

- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Universidad de Granada.
- Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H. & Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*. New York: Springer.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Fernández, F., Andrade, L., Montañez, J., Beltrán, J. y Zamora, S. (Junio, 2011). *Hacia una posible aproximación comprensiva de la variable aleatoria*. En XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (XIII CIAEM), Recife, Brasil.
- Jiménez, L. y Rupín, P. (2013). *Matemática 2° Medio Guía didáctica del docente*. Santiago: Ediciones SM
- MINEDUC (2009). *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación*

*básica y media*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

- Panizza, M. (2003). *Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas*. En M. Panizza, *Enseñar matemática en el nivel inicial y primer ciclo de EGB: Análisis y propuestas*. Buenos Aires: Paidós.
- Pérez, B. y Parraguez, M. (2013). *Construcciones mentales de los conceptos aleatorios y determinista a partir de la regresión lineal*. En R. Flores (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, 589-598. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria (Tesis de maestría no publicada)*. CINVESTAV-IPN, México.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2014). *Enseñanza de la probabilidad en educación primaria. Un desafío para la formación inicial y continua del profesorado*. *Números*, 85, 5-23.