Estrategias en la resolución de inecuaciones lineales y racionales en educación superior desde la teoría APOE

Marcela Fuentes González y Elisabeth Ramos Rodríguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen

Desde la teoría APOE, nos centramos en estudiar los mecanismos mentales que se requieren para activar las construcciones mentales de los alumnos en una clase diseñada en un Estudio de Clases para el tratamiento de las inecuaciones racionales, cuyos polinomios asociados tienen grado menor o igual a dos en alumnos de Educación Superior de nivel Técnico Profesional. Al implementar la clase, se observa que los alumnos carecen de conocimientos previos como coordenadas cartesianas, lo que les impide transitar entre el registro gráfico y el algebraico, por lo que no logran llegar al proceso esquema, pero permite reformular la clase más precisa y coherente con el objetivo propuesto.

Palabras clave: Inecuaciones racionales, APOE, secuencia didáctica, registro gráfico.

ABSTRACT From APOE theory, we focus on studying the mental mechanisms that are required to activate the mental constructions of students in a class designed a Class Study for the treatment of rational inequations, whose associated polynomials are less than or equal to two in Higher Education students of Professional Technical level. When implementing the class, it is observed that students lack previous knowledge as Cartesian coordinates, which prevents them from moving between the graphic and algebraic records, so they do not reach the schematic process, but it allows to reformulate the most precise and coherent class with the proposed objective..

Introducción

El estudio de las inecuaciones comienza con el concepto de desigualdad, definida como dos cantidades o expresiones que no son iguales, donde se utilizan registros gráficos y pictóricos asociados a signos ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$, $\neq$). Si bien desde muy pequeños los alumnos están familiarizados con el concepto de desigualdad cuando comparan sus estaturas para ordenarse en la fila del kínder, o van a un cumpleaños y terminan comparando quién cogió más dulces de la piñata, este es un concepto que no se ha definido como objeto matemático; por tanto, tomaremos sus comienzos en cuarto año de Enseñanza Básica, que es el nivel donde el alumno realiza por primera vez operatoria con inecuaciones. Posteriormente, cuando estos alumnos ingresan a la universidad el nivel de análisis que deben desarrollar para el mismo objeto matemático, se ve ampliado a funciones, sistemas de inecuaciones, optimización y cálculo diferencial e integral. A no existir este análisis los alumnos tienden a resolver inecuaciones transfiriendo técnicas propias de resolución de ecuaciones, dejando de manifiesto que existen falencias arraigadas en los conocimientos previos (Monje, 2017).

En la Educación Técnica Profesional, este problema aparece cuando los alumnos deben resolver inecuaciones en el registro gráfico, dejando de manifiesto la falta de conocimientos para realizarlo. En este contexto nos planteamos llevar a cabo un Estudio de Clases para la resolución inecuaciones en alumnos de primer año de Educación Superior, nivel Técnico Profesional. Para ello se diseñó un plan de clase, cuyo objetivo es la resolución gráfica de inecuaciones apoyada con el tratamiento del análisis de ecuaciones de la recta en el plano cartesiano.

La falta de conocimiento en los alumnos de Educación Superior para resolver inecuaciones utilizando registros gráficos (Núñez, 2012), llevaron a definir el objetivo del plan de clase como: resolver inecuaciones racionales, con polinomios de grado menor o igual a dos, por medio del método gráfico, utilizando rectas en la resolución del conjunto solución.

El análisis de los datos de la implementación del plan de clase se centra en identificar los mecanismos y construcciones mentales para el concepto y resolución de inecuaciones en la dirección de una Descomposición Genética (DG) de las inecuaciones. Es decir, escogimos el marco teórico APOE, dado que cobra sentido al momento de identificar los conocimientos del alumno para resolver inecuaciones, desde el análisis de sus producciones para inferir acerca de sus construcciones mentales, toda vez que este marco permite identificar el desarrollo del pensamiento lógico y la forma en que el alumno logra ciertas construcciones mentales.

Desarrollo

se utilizó el paradigma cualitativo de forma que sean verificables con la experiencia y la observación, existiendo para este caso una interacción entre el alumno y el objeto de estudio: inecuaciones racionales. El diseño del estudio corresponde a un Estudio de Clases que se realiza con propósito de mejorar la calidad profesional del docente (Isoda, Arcavi y Mena, 2012).

El instrumento de recogida de datos corresponde a las producciones de los estudiantes en relación a las tareas seleccionadas de la secuencia de enseñanza, para interpretar la DG incipiente en un curso de 21 alumnos de Educación Técnica, nivel superior. El plan de clases contiene cuatro actividades, diseñadas para activar en los alumnos sus conocimientos previos y permitir el tránsito entre registros algebraico, tabular y gráfico; independiente del registro el conjunto solución es el mismo.

El método de análisis se basó en la observación y entrevista con aquellos alumnos que manifestaron respuestas inesperadas o poco explícitas, no permitiendo identificar la construcción cognitiva lograda, para cual se establecieron categorías con indicadores asociados a cada actividad del plan de clase, los que al ser analizados permitieron establecer las construcciones necesarias para la concepción del objeto matemático inecuación en ambos registros. En concreto las categorías de análisis corresponden a las etapas del objeto matemático en la construcción acción y proceso.

Reflexiones

La construcción acción se logra cuando el alumno sigue instrucciones para dar respuesta a un requerimiento sin prestar mayor observación a las relaciones existentes, por ejemplo cuando iguala a cero la ecuación de la recta para obtener valores críticos y luego traza las perpendiculares al eje X en esos puntos, o cuando determina los intervalos en que se divide el eje X, toda vez que estas acciones obedecen a estrategias repetitivas, guiadas, donde no existe un razonamiento por parte del alumno, sólo lo realiza porque es una acción aprendida sin poder explicar por qué lo hace (figura 1).

Recta L1	Recta L2
y = x + 1 0 = x + 1 -1 = x	y = x - 3 0 = x - 3 3 = x

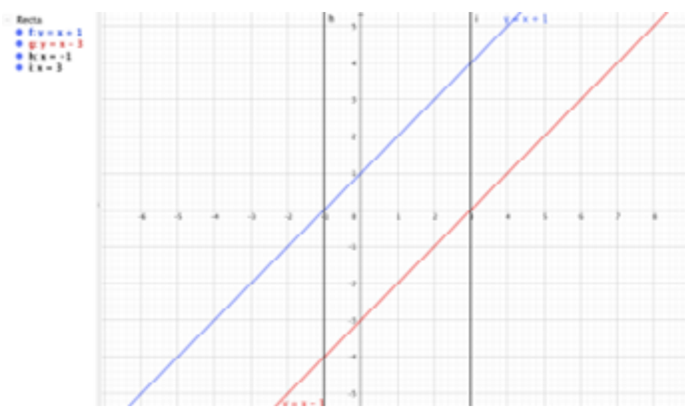

Figura 1: Ejemplo de construcción acción

La construcción proceso se evidencia cuando el alumno visualiza e identifica en el gráfico, que existen subconjuntos del dominio que vuelven las imágenes positivas o negativas (figura 2). En este caso existe reflexión del alumno sobre las acciones realizadas, donde relaciona el dominio con la imagen, sentando sus bases de análisis en conceptos previos de función y ecuación de la recta.

$$f(x)=x+1f(x)=x-3$$

Pre-imagen	Imagen	Signo de la imagen
2	-1	-
1	2	+
4	5	+

Figura 2: Ejemplos de construcción proceso

Pre-imagen	Imagen	Signo de la imagen
-2	-5	-
1	-2	-
4	1	+

La construcción objeto se logra cuando el alumno logra declarar, visualizar, explicitar y comprender las inecuaciones sobre el axioma de cuerpo y orden en los Reales, cuando es capaz de ejecutar acciones en el objeto y desencapsular el objeto y volverlo al proceso que le dio origen las veces que sea necesario (figura 3). Esto se observa en el momento en que los alumnos identifican que pueden trasladar el signo de la imagen de las rectas, en cada sector de los intervalos generados por los puntos de intersección de la recta en el eje X, trasladando esa información a lo que será el conjunto solución de la inecuación planteada.

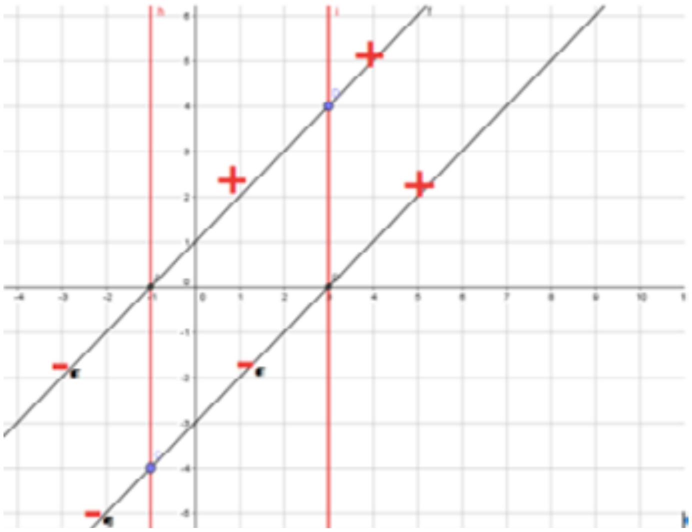

Figura 3: Ejemplos de construcción objeto

La construcción esquema (figura 4) alude al desarrollo gráfico de la resolución de la inecuación. Desde el punto de vista gráfico se logra cuando el alumno identifica las funciones que pueden ser utilizadas para que el gráfico represente la inecuación que se quiere resolver; o cuando se deben comparar dos o más gráficos dados, analizando los signos de las imágenes. En esta etapa, los alumnos logran reconocer que el conjunto de una inecuación expresada en forma racional constituida por dos expresiones lineales de primer grado con una incógnita tiene el mismo conjunto solución, que el generado por las mismas expresiones lineales, pero esta vez desarrolladas como un producto entre ellas y de esta forma podrán extrapolar a encontrar el conjunto solución de cualquier inecuación cuadrática.

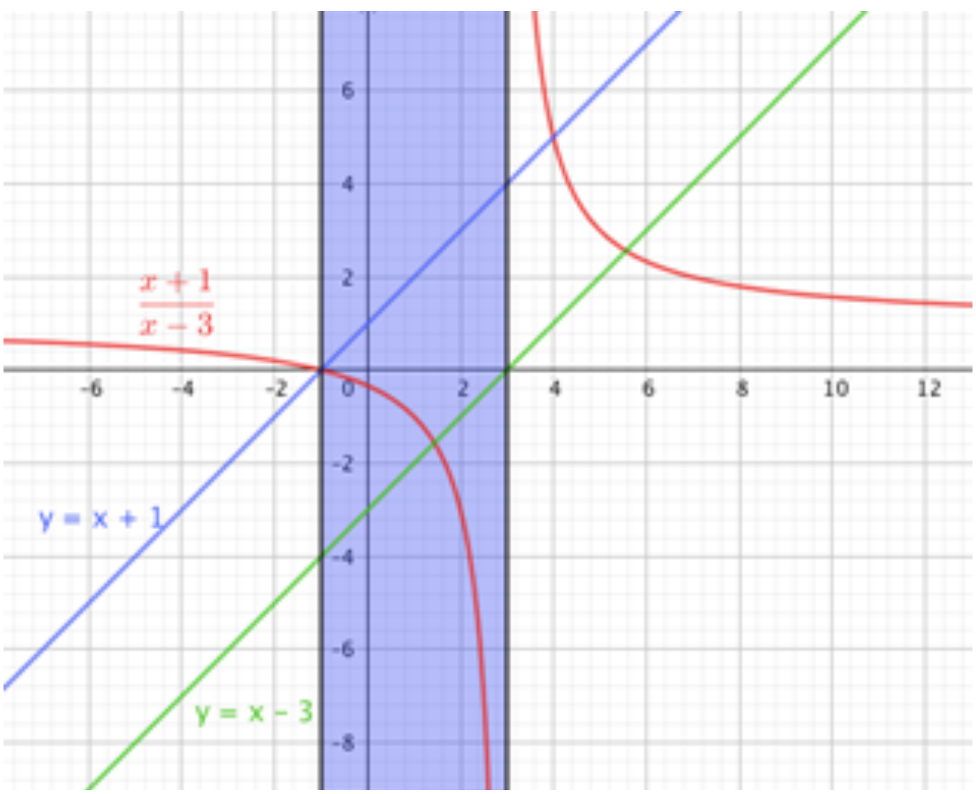

Figura 4: Ejemplo de construcción esquema

$$(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}) \left(\exists \left(\frac{1}{a}\right) \in \mathbb{R} \right) \left(a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1 \right)$$

donde, $\frac{1}{a} = a^{-1}$, de donde se tiene que $a \cdot a^{-1} = 1 > 0$

Aplicando condiciones para resolver la inecuación:

$$(x+1)(x+3) < 0$$
$$\{(x+1<0) \wedge (x-3>0)\} \vee \{(x+1>0) \wedge (x-3<0)\}$$
$$\{x<-1 \wedge x-3>0)\} \vee \{x>-1 \wedge x<3\}$$
$$\{\emptyset\} \vee \{x>-1 \wedge x<3\}$$
$$\{x>-1 \wedge x<3\}$$

De los registros obtenidos por los alumnos en el plan de clase fue posible observar que los alumnos carecen de conocimientos previos, lo que concuerda con Barbosa (2008), Monje (2017), Torres (2013) y que se ven doblemente perjudicados ya que no hay una continuidad en el aprendizaje de las inecuaciones en el currículo escolar. Si se tuviese que establecer las construcciones mentales del alumno articuladas en el plan de clase, se concluiría que sólo llega a la construcción acción, toda vez que existen muchos vacíos arraigados en los conocimientos previos necesarios para cualquier construcción cognitiva. Consecuente con lo anterior y considerando que el alumno aún no es consciente del proceso como un todo, no es capaz de percibir y construir transformaciones que pueden influir en el proceso, entonces se dice que el proceso no fue encapsulado, imposibilitando aún más la construcción objeto.Conclusiones

La conclusión general de este trabajo es que el curso de Introducción a la Pedagogía en Matemática y Computación es un buen recurso para contribuir a optar con información al desarrollo de una identidad profesional, concordante con el rol social del profesor de matemática o para tempranamente dejar esta opción. En términos más específicos, la replicabilidad de aspectos centrales del curso en tres cohortes de estudiantes contribuye a modificar varias de las preconcepciones que traen los estudiantes y ampliar sus posibilidades de desarrollo profesional. Aún cuando en las versiones del curso ha habido variaciones en las actividades con la participación de los docentes, sus efectos principales han sido replicados. Ello debido a que las actividades del curso se vinculan con: a) un perfil de egreso con dominios y competencias profesionales claramente establecidas que fortalecen su rol social y futura proyección, b) un escalamiento de las competencias del perfil de egreso y la integración de los diferentes tipos de conocimientos para la actuación competente del profesor de matemática, permitiéndole a los alumnos resignificar e integrar desempeños formativos con crecientes niveles de dificultad incorporados en la malla del plan de estudios de la carrera y c) que su formación académica esté dirigida a la obtención de una Licenciatura en Educación Matemática como disciplina y no a una Licenciatura en Educación o a una Licenciatura en Matemática como se encuentra frecuentemente en otras ofertas educativas.

En suma, el curso además de sus efectos motivacionales tiene importantes implicaciones para fortalecer una identidad profesional con varias opciones de desarrollo. La replicabilidad y posible transferencia de aspectos centrales del enfoque del curso, lo hacen muy recomendable para ser incorporados en la formación de profesores de matemáticas que estén alineados con una identidad profesional de educación matemática distintiva e integradora, que cuenta con competencias profesionales para desempeñarse eficientemente en su futuro rol social y desarrollo profesional, con alto reconocimiento social.

Avances

A la luz de la Teoría APOE, es posible llegar a establecer las construcciones mentales necesarias en los alumnos de Educación Técnica nivel Superior, para lograr la construcción del objeto matemático inecuaciones desde una perspectiva gráfica. Hemos diseñado e implementado un plan de clase para la resolución de inecuaciones racionales a partir de registros, identificando los conocimientos previos necesarios para lograr articulación entre diferentes construcciones mentales, observándose además que los problemas presentados por los alumnos chilenos para resolver inecuaciones son los mismos que se manifiestan en diferentes partes del mundo (Monje, 2017)

Conclusiones

Basada en la aplicación del plan de clase y las dificultades observadas en los alumnos, es prudente manifestar que para lograr la construcción del objeto matemático inecuación, utilizando la Teoría APOE, es necesario articular el concepto o definición de inecuación con la resolución de ella como un todo y no por separado como lo proponen otros estudios, toda vez que de lo contrario, los alumnos no logran asociar los axiomas de cuerpo y orden de los reales para resolver inecuaciones.

Cabe hacer presente que no fue posible estructurar una DG a partir de los antecedentes recopilados, toda vez que no se evidenció la existencia de mecanismos que permitiesen llegar a la construcción esquema y para obtener una DG se requiere de las construcciones mentales Acción, Proceso, Objeto y Esquema. No obstante, este hecho sirvió para reformular la clase para movilizar los diferentes registros, condición que permitirá llegar a la construcción esquema de modo de acercarlos a la construcción de una DG para la comprensión y resolución de inecuaciones. Esto posibilitará atender a las necesidades reales de los alumnos avanzando en su conocimiento matemático.

Referencias

Barbosa, K. (2008). Inecuaciones: un análisis de *las construcciones mentales de estudiantes universitarios (Tesis de Doctorado publicada). Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México.*

Isoda, M., Arcavi, A., y Mena, A. (2012). El Estudio de clases japonés en perspectiva. Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Monje, Y. (2017). Tratamiento de la inecuación en el contexto escolar de Chile y Rusia (Tesis de Magíster). Universidad Católica de la Santísima Concepción, Concepción.

Torres, R. (2013). Aplicación del Enfoque Gráfico en la enseñanza de Inecuaciones: Una revisión de la experiencia didáctica desde la perspectiva ontosemiótica. El cálculo y su enseñanza, 4, 83-102.