Construcción cognitiva del espacio vectorial R^2

Miguel Rodríguez, Marcela Parraguez, María Trigueros
Universidad de Playa Ancha (Chile) – Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile) – Pontificia Universidad Católica Valparaíso – Instituto Tecnológico Autónomo de México (México)

Resumen

Presentamos antecedentes sobre la validación de un modelo cognitivo para el aprendizaje del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. Como hallazgo, destacamos el papel que desempeña asociar un par de números reales a una ecuación lineal homogénea (de dos incógnitas) para inducir estructura algebraica a su conjunto solución. Además, se entrega evidencia de cómo el uso de un parámetro, para escribir una solución de una ecuación lineal homogénea, es un factor importante que pone de relieve a la ponderación de una solución por un escalar como una operación que se asocia al conjunto solución de una ecuación lineal homogénea. Todo lo anterior en estrecha relación con la construcción del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

Palabras clave: Modelo cognitivo, espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, ecuación lineal homogénea, conjunto solución, teoría APOE.

ABSTRACT *We present background information on the validation of a cognitive model for the learning of the vector space $\mathbf{R}^2$. As a result, we highlight the role played by the association of a pair of real numbers to a homogeneous linear equation (with two unknowns) to induce an algebraic structure to the solution set. Furthermore, we present evidence of how the use of a parameter to write a solution of a homogeneous linear equation, is an important factor that highlights the product of a solution by a scalar as an operation that is associated with the solution set of an homogeneous linear equation. All of this has a close connection with the construction of the vector space $\mathbf{R}^2$.*

Keywords: Cognitive model, vector space $\mathbf{R}^2$, homogeneous linear equation, solution set, APOS theory.

La enseñanza del espacio vectorial desde la Didáctica de la Matemática

Respecto de la enseñanza del concepto de espacio vectorial, desde la Didáctica de la matemática, destacan algunas perspectivas (Dorier et al., 2002; Dubinsky, 1996; Harel, 2000) como aquella que pone de manifiesto principios como el de representación múltiple y algunas fases a tener en cuenta (Harel, 2000) o aquella que sitúa al espacio vectorial como una estructura algebraica sistematizadora y generalizadora, la que debe tenerse en cuenta al momento de enseñar (Dorier et al., 2002) o la que intenta revertir el papel imitador y reproductor del estudiante (Dubinsky, 1996). Además destacan algunas iniciativas que se han documentado como exitosas y que establecen fases para ir situando paulatinamente al estudiante en un proceso gradual de abstracción (Harel, 2000) y otras que ponen de relieve el concepto de abstracción reflexiva como mecanismo que permite construcciones mentales (Arnon et al., 2014; Trigueros, M. & Oktaç, 2005).

Pregunta de Investigación

¿Qué estructuras mentales son necesarias como prerrequisitos para la construcción cognitiva del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, a través del Cartesiano $\mathbf{R}^2$?

Marco teórico: APOE

En la teoría APOE, las estructuras de construcción de un fragmento del conocimiento matemático están descritas por cuatro estructuras mentales: *Acciones, Procesos, Objetos* y *Esquemas*, que un individuo construye en su proceso de comprensión, y para ello pone en juego mecanismos mentales: *interiorización, coordinación, encapsulación y reversión,* que son considerados casos particulares de la abstracción reflexiva (Arnon et al, 2014; Trigueros, M. & Oktaç, 2005; Parraguez, M. y Oktaç, 2010).

Consideramos que un concepto matemático, una acción asociada a dicho concepto se realiza sobre objetos construidos para otros conceptos matemáticos que se toman como base para la construcción del nuevo. Las acciones se caracterizan por ser transformaciones que se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son o se perciben como externos (Arnon et al., 2014, Parraguez, M. y Oktaç, 2010).

Un individuo ha interiorizado una acción en un *proceso*, si puede realizar una operación interna que hace (o imagina) esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, sin necesariamente realizar todos los pasos específicos. Dos o más *procesos* pueden coordinarse para construir un nuevo *proceso* y un *proceso* puede revertirse. Si el individuo considera un *proceso* como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre él, se considera que ha *encapsulado* el *proceso* en una *construcción objeto*. Además, cuando se recupera desde el *objeto* al *proceso* que le dio origen, ha ocurrido una *desencapsulación* del *objeto* (Parraguez, M. y Oktaç, 2010).

Metodología

Con base en el ciclo de investigación de APOE (Arnon et al., 2014) se consideró un estudio de caso múltiple pues permite indagar en profundidad los distintos aspectos que plantean las preguntas de investigación, dado que además permite una aproximación conceptual apropiada para examinar las particularidades al interior de un contexto global de suyo múltiple y complejo (Stake, 2010).

Las unidades de estudio fueron conformadas por 7 estudiantes de dos universidades chilenas de las carreras de Licenciatura y Pedagogía en Matemática como se indica en la Tabla 1.

Tabla 1:
Unidad de análisis para la conformación de los dos casos de estudio

Unidad de Análisis	Caso 1: 5 Estudiantes de Pedagogía en Matemática (E1, E2, E3, E4 y E5) Aplicación de Instrumentos: 1 cuestionario de 5 preguntas 1Entrevista de 4 preguntas	Caso 2: 2 Estudiantes de Licenciatura en Matemática (E6 y E7) Aplicación de Instrumentos: 1 cuestionario de 5 preguntas 1Entrevista de 4 preguntas

EN EL ENCABEZAMIENTO SE HABLA DE "estudiantes ... de las carreras de Licenciatura y Pedagogía en Matemática" Y EN LA TABLA 1 SE MENCIONAN estudiantes de Pedagogía y de Ingeniería

Una descomposición genética del espacio vectorial R^2

La Descomposición Genética (DG) que se propone, pone de manifiesto que el espacio vectorial **R**^{2} se construye a partir de una *acción*: asociar un par de números reales a los términos de una ELH. Dicha asociación sumada al uso de un parámetro permite *interiorizarla* en un proceso, solución de una ELH, siendo necesario que éste se coordine con el proceso par ordenado, como concepto previo, para conformar un nuevo *proceso*, CSELH.

Pensar en la dilatación de un segmento dirigido desde una solución del CSELH, asociado a una recta vectorial, permite coordinar el *proceso* CSELH con el *proceso* operación binaria, como concepto previo, para obtener el proceso ponderación de una solución de una ELH. Pensar en la traslación de puntos de una recta vectorial para obtener una recta afín (recta paralela a una recta vectorial) permite desencapsular el objeto plano cartesiano en el proceso álgebra de pares ordenados. Abocarse a obtener nuevas soluciones en combinación lineal de dos rectas vectoriales permite *coordinar* los *procesos*, álgebra de pares ordenados y ponderación de una solución, en un nuevo *proceso*, el cartesiano **R**^{2}. Finalmente comparar estructura de subconjuntos de **R**^{2}, desde el CSELH y CSELNH, permite *encapsular* el proceso cartesiano R2 en el espacio vectorial **R**^{2}.

Resultados

El **E3**, como se aprecia en la figura 1, define en el apartado 1d de la pregunta 1 una operación binaria externa para el conjunto solución, desde lo que se va solicitando en los apartados 1a y 1b. Comenta que toda solución del CSELH se puede generar a partir de un par ordenado y un escalar real. Esto evidencia que ponderar una solución por un escalar real permite coordinar dos procesos, CSELH y operación binaria, en un proceso, ponderación de un par ordenado. Además evidencia una concepción proceso del Cartesiano **R**^{2}.

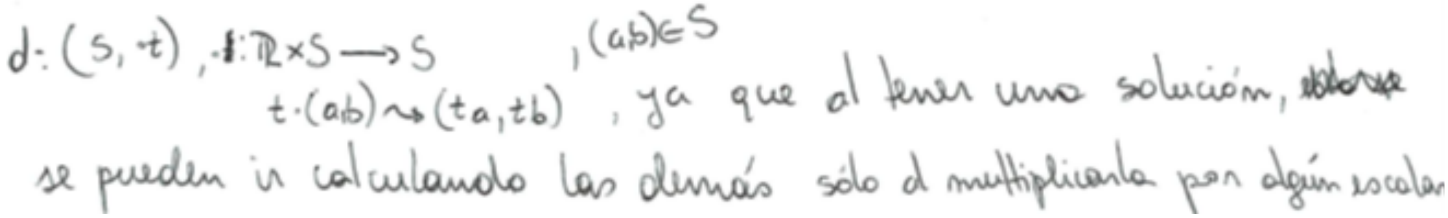
d: $(S,+)$, $\cdot: \mathbb{R}\times S \to S$, $(a,b)\in S$
$t\cdot(a,b) \rightsquigarrow (ta,tb)$, ya que al tener una solución, se pueden ir calculando las demás sólo al multiplicarla por algún escalar

Figura 1: Respuesta de **E3** al apartado 1d.

Por otro lado, el **E4,** como se aprecia en la figura 2, concibe el CSELH como un sub-espacio vectorial del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. Lo que evidencia una concepción Objeto de conjunto solución para una ELH.

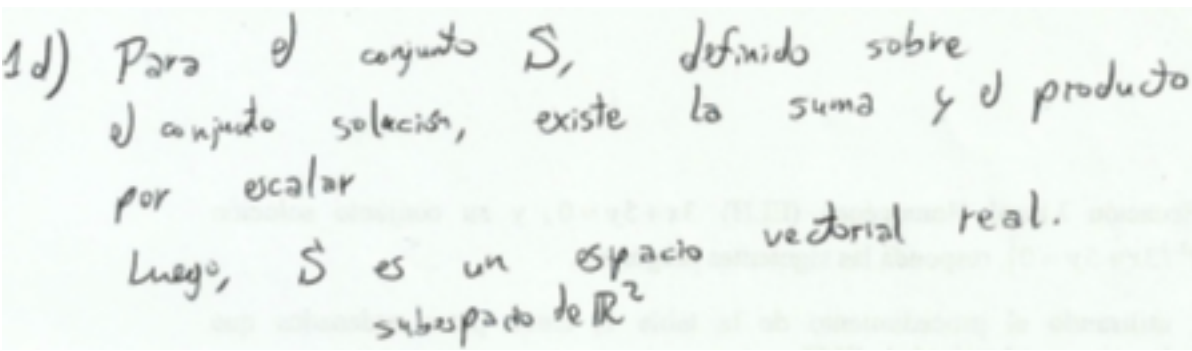
1d) Para el conjunto S, definido sobre el conjunto solución, existe la suma y el producto por escalar
Luego, S es un espacio vectorial real.
subespacio de $\mathbb{R}^2$

Figura 2: Respuesta de **E4** al apartado 1d.

Además, el **E7**, como se aprecia en la figura 3, reconoce en el CSELH un grupo aditivo destacando la propiedad de clausura, lo que evidencia una concepción objeto del CSELH.

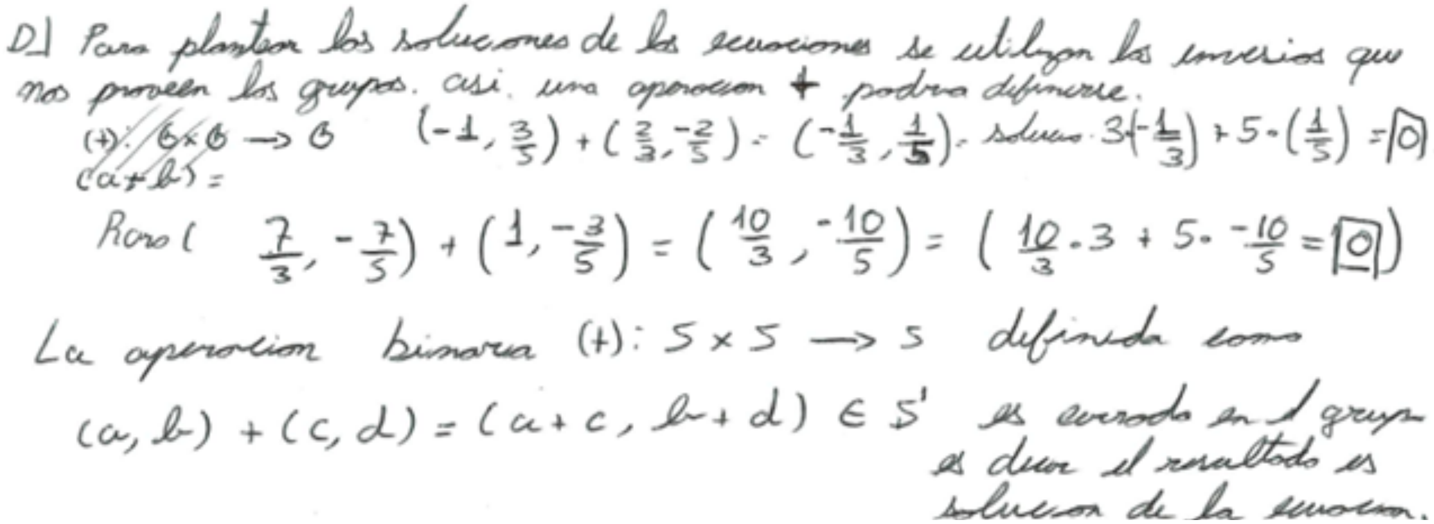
D] Para plantear las soluciones de las ecuaciones se utilizan las inversas que nos proveen los grupos. así. una operación + podría definirse.
$(+): G\times G \to G$ $\quad (-1,\frac{3}{5}) + (\frac{2}{3},-\frac{2}{5}) = (-\frac{1}{3},\frac{1}{5})$. soluc. $3(-\frac{1}{3}) + 5\cdot(\frac{1}{5}) = \boxed{0}$.
$(a+b) =$
Pero $(\frac{7}{3},-\frac{7}{5}) + (1,-\frac{3}{5}) = (\frac{10}{3},-\frac{10}{5}) = (\frac{10}{3}\cdot 3 + 5\cdot -\frac{10}{5} = \boxed{0})$
La operación binaria $(+): S\times S \to S$ definida como
$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) \in S'$ es cerrada en el grupo es decir el resultado es solución de la ecuación.

Figura 3: Respuesta de **E7** al apartado 1d.

Conclusiones

Las respuestas de los tres estudiantes, ponen de relieve distintos aspectos sobre las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en la DG, como por ejemplo, que al comparar soluciones del CSELH considerado la acción asociar números reales a una ELH permite coordinar el proceso soluciones de una ELH con el proceso averiguar propiedades para construir el proceso grupo de soluciones, como plantea **E7.** De igual manera reescribir el CSELH utilizando un parámetro, permite coordinar el proceso solución de una ELH con el proceso operación para construir el proceso ponderación de una solución. Todo lo anterior, para dar cuenta de la encapsulación del objeto Cartesiano $\mathbf{R}^2$.

Referencias

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education. New York: Springer.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10(2), 117-132.

Dorier, J. L. (1995). A general outline of the genesis of vector space theory. Historia Mathematica, 22(3), 227-261.

Dorier, J. L. (Ed.). (1997). L'enseignement de l'algèbre linéaire en question. Grenoble: La penséee Sauvage.

Dorier, J. L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. In J-L. Dorier (ed.). On the teaching of linear algebra. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 23, 3-81.

Dorier, J. L. y Sierpinska, A. (2002). The teaching and learning of mathematics at university level new ICMI. Study Series, 7(3), 255-273

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. Educación Matemática, 8(3), 24 – 41.

Harel, G. (2000). Principles of learning and teaching mathematics, with particular reference to the learning and teaching of Linear Algebra:Old and new observations. In J-L. Dorier (Ed), On the teaching of linear álgebra, (pp. 177-189). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Parraguez, M. & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. Linear Algebra and its Applications, 432(8), 2112-2124.

Stake, R.E. (2010). Investigación con estudio de casos. Barcelona: Labor.

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2005). La théorie APOS et l'enseignement de l'algèbre linéaire. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 10, 157-176.