Dificultades, obstáculos y errores asociados al infinito en estudiantes de último año de pedagogía en matemática

Bustos Tiemann, C. Roberto Vidal
Universidad Alberto Hurtado

Resumen

Esta comunicación tiene por objeto mostrar los resultados obtenidos en el trabajo final de graduación de Magíster en Didáctica de la Matemática, el cual consistió en un estudio de las dificultades, los obstáculos y los errores en dos grupos de estudiantes de último año de Pedagogía en matemática de dos universidades chilenas con respecto al infinito. Para tal efecto se aplicó un instrumento con diferentes problemas en los que está involucrado dicho objeto matemático. Los principales resultados obtenidos demuestran una fuerte tendencia de reconocer solo el infinito potencial, especialmente en situaciones en las que el infinito en lo pequeño se manifiesta. Por otro lado, se reconoce el obstáculo epistemológico de la intuición geométrica en los procesos infinitos de divisibilidad y en la noción de límite. Además emergen obstáculos asociados a la generalización de las propiedades de los procesos finitos a los infinitos y al considerar el valor de un límite como una aproximación.

Palabras Clave: Infinito potencial, infinito actual, obstáculo epistemológico, divisibilidad infinita, noción de límite.

ABSTRACT *This communication aims to show the results obtained within the Master's Degree in Mathematics' Didactics final graduation work, which consisted in a study of the difficulties, obstacles and errors in two groups of Mathematics' Pedagogy senior students from two Chilean universities in regard to infinity. To reach such purpose, an instrument was applied with different problems in which said mathematical object is involved. The main results obtained show a strong tendency to recognize only the potential infinity, particularly in situations where infinity in the small manifests. On the other hand, there is a reckoning of the epistemological obstacle of geometric intuition in the infinite processes of divisibility and in the notion of limit. Additionally, obstacles emerge associated both with the generalization of the properties of finite processes to infinity and withthe consideration of the value of a limit as an approximation.*

Keywords: Potential infinity, actual infinity, epistemological obstacle, infinite divisibility, notion of limit

Introducción

La incorporación del concepto infinito en el currículo escolar presenta una característica singular, no se define ni se enseña a trabajar con él. En este sentido es que se plantea la problemática que genera este concepto en la enseñanza tanto escolar como universitaria ya que aparece como un saber transparente u objeto paramatemático y que dicha problemática se acentúa con la existencia de diferentes concepciones para el infinito: una concepción potencial y una concepción actual, contradictorias entre ellas, que hace que en los estudiantes se presenten una serie de obstáculos, especialmente con esta última (Garbin, 2005).

A partir de lo planteado anteriormente es que surge la necesidad de describir las dificultades, errores y obstáculos que puedan evidenciar los estudiantes de último año de Pedagogía en matemática con respecto al infinito y así tener una idea de cuáles son sus nociones respecto de este objeto matemático, previo a su desempeño profesional.

Antecedentes históricos

En el desarrollo histórico de la idea de infinito es posible distinguir tres etapas, que según Crubellier (1994) permite definir tres tipos de infinito.

En la primera etapa se tiene el infinito de Platón y Aristóteles, que es un principio indefinible. En esta etapa, especial interés presentan las paradojas de Zenón de Elea (s. V a.C.) quien mediante la reducción al absurdo argumentaba la imposibilidad del movimiento lo cual negaba la aceptación del infinito actual.

La segunda etapa corresponde al infinito de la Edad Media en donde se consideraba el infinito como propiedad exclusiva de Dios. En esta época el mismo Galileo rechaza la idea de infinito por considerarla que atenta contra la razón humana y realiza consideraciones geométricas en donde presenta un infinito que contradice la noción de Euclides que el todo es mayor que sus partes.

En la tercera etapa se tiene el infinito de los matemáticos. En este período Karl Weierstrass (1815 - 1897) traduce el concepto de límite a través de la notación $\varepsilon - \delta$ que conocemos hoy en día y posteriormente Cantor, a finales del siglo XIX, desarrolla su teoría formal sobre el infinito actual y define conjunto infinito numerable y no numerable mediante una extensión de la noción de cardinalidad la cual consiste en la búsqueda de una biyección adecuada como método de prueba de coordinabilidad conjuntista.

Antecedentes desde el currículo escolar e investigaciones afines

Este concepto va ligado a una gran cantidad de temas habituales en la enseñanza media y superior tales como en las nociones de número real, serie, límite, fractal, etc. Sin embargo, desde hace ya varias décadas, con el desarrollo de estudios en educación matemática, varios autores, como Sierpinska (1985) y Artigue (1995), entre otros, han observado que la noción de infinito es por lo general contradictoria en los estudiantes y que éstos encuentran muchas dificultades para su conceptualización cuando se enfrentan con conceptos que la involucran.

Por otro lado, investigadores como Tall (2002) y Montoro (2005) plantean que la noción de infinito matemático no es intuitiva, y mucho menos puede ser aprendida por la experiencia sensible, sino que se requiere de contextos educativos que favorezcan la reflexión matemática a través de intervenciones de enseñanza específicas y sostenidas.

Problemática y objetivos de la investigación

La problemática de investigación que se plantea es que el infinito es uno de los obstáculos más difíciles de superar en la enseñanza de las matemáticas y que esta situación hace crisis en el momento de enfrentar los conceptos formales del Cálculo y del Análisis Matemático, fundamentalmente debido a la tensión dialéctica de lo potencial y actual.

En este sentido es que el objetivo general de esta investigación consistió en identificar errores, dificultades y obstáculos asociados al infinito en profesores de matemática en formación al término de su enseñanza universitaria y los tres objetivos específicos que ayudaron a lograr lo anterior fueron: (1) Analizar las nociones emergentes referidas al infinito potencial y al infinito actual planteadas en distintos ámbitos matemáticos, (2) Describir las percepciones de los estudiantes respecto de las sumas infinitas y (3) Describir la emergencia de algunos obstáculos epistemológicos del concepto de límite derivados de la problemática propia del infinito.

Marco Referencial

El marco referencial utilizado consiste de una adaptación de la tipología de dificultades, obstáculos y errores propuesto por Martín Socas (1997). Para lograr lo anterior se incorporaron nuevas categorías respecto de las dificultades en la transición del Álgebra al Cálculo dada por Artigue (1998) y la tipología de obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite levantada por Sierpinska (1994). En definitiva el marco referencial contempla las siguientes categorías:

D1: Dificultades asociadas la dificultad de los objetos matemáticos.

D2: Dificultades asociadas a la conceptualización de la noción de límite. Esta categoría se concreta en los siguientes cuatro obstáculos epistemológicos:

O1: Límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso.

O2: Sobre-generalización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos.

O3: La fuerza de una geometría que impide identificar claramente los objetos involucrados en el proceso de límite.

O4: Asociar el paso al límite con un movimiento físico, con una aproximación.

Es decir, la categoría D2 se relaciona con su obstáculo y se denota por D2-O1, D2-O2, D2-O3 o D2-O4 según sea el caso.

D3: Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.

O5: Confiar en engañosas experiencias intuitivas.

Err1: Errores que tienen su origen en un obstáculo. También esta categoría se da asociada con su obstáculo Err1-O según sea el caso.

Err2: Errores debido a las características propias del Análisis Matemático.

Err3: Errores de procedimientos.

Marco Metodológico

La metodología de este trabajo es de carácter cualitativo con un diseño descriptivo y exploratorio cuyas unidades de análisis correspondieron a las producciones de estudiantes en formación de profesores de matemática. Específicamente esta investigación fue realizada en dos universidades chilenas con un total de 12 estudiantes, seis de cada una, que cursaban el último año de su carrera. Se aplicó un instrumento con diferentes situaciones y problemas en los que está involucrado el infinito. Posteriormente se realizaron entrevistas para aclarar algunas de las producciones de los estudiantes y finalmente se realizó un análisis de tales producciones de acuerdo al marco referencial.

Resultados

Los principales resultados evidencian una alta frecuencia en las siguientes categorías:

(D2-O3): Indicando una fuerte presencia de la intuición geométrica como obstáculo epistemológico. Esta situación se presentó de gran manera al considerar lo infinito en lo pequeño en un ámbito geométrico, particularmente con el tema de la divisibilidad infinita en un segmento de recta. (Err3): Esta categoría se dio mayoritariamente en la situación de las pelotas de tenis, problema abordado por Dubinsky (2008), en el que se considera lo infinito en lo pequeño, pero en un ámbito conjuntista. (Err1-O2): Es un error que tiene su origen en el obstáculo de la sobre-generalización de las propiedades de los procesos finitos a los infinitos. Esta situación fue muy evidenciada con respecto a las sumas infinitas en donde muchos estudiantes consideraron lícitas las operaciones de intercalar paréntesis, asociar u otras operaciones que son válidas para las sumas finitas. Especial atención merece la categoría (D2-O4) referida principalmente al obstáculo que consiste en asociar el paso al límite con una aproximación. Además, esta categoría a veces va asociada al error (Err1-O4), pues tanto la dificultad como el error asociados al obstáculo (O4) conviven juntos en el estudiante ya que muchas veces la dificultad es causa del error.

Conclusiones

Los resultados obtenidos no arrojaron diferencias significativas respecto de una u otra universidad, por lo que la procedencia de las muestras fue irrelevante. Las categorías consideradas, que definieron el marco referencial utilizado, permitieron una completa mirada a las nociones emergentes en las producciones de los estudiantes y al mismo tiempo una articulación con los objetivos planteados. El conocimiento que se tiene de la recta, densidad, continuidad, formada por infinitos puntos o incluso asociándola a conceptos físicos como el tiempo o el espacio; impide aceptar la divisibilidad infinita que existe en la matemática. Además este hecho impide acceder a una mirada actual del objeto infinito pues se acepta como imposible concebir el proceso acabado.

En definitiva, esta investigación pretende ser un incentivo para considerar como metodología de análisis en los estudios en didáctica los errores, dificultades y obstáculos que emergen constantemente en las producciones de los estudiantes y a partir de los resultados obtenidos levantar novedosas propuestas de enseñanza.

Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? LRelime, 1(1), 40-55.

Crubellier, M. (1994). La raison et l'infini. Repères-IREM, 17, 13-28.

Dubinsky, E., K. Weller, K. Stenger y d. Vidakovic. (2008). Infinite iterative processes: the tennis

Ball Problem. European Journal of Pure and Applied Mathematics, 1(1), 99-121.

Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los

modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. Revista Latinoamericana de

Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 8(2), 169-193.

Montoro, V. (2005). Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios. Infancia y

Aprendizaje, 28(4), 409-427.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistemologiques relatifs à la notion de limite. Recherches en

Didactique des Mathématiques, 6(1), 5-67.

Sierpinska, A. (1994). Understanding in Mathematics. Studies in Mathematics Education Series.

London: The Falmer Press.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la

Educación Secundaria. La educación matemática en la enseñanza secundaria / coord. Por

Luis Rico Romero, 1997, ISBN 84-85840-65-8, págs. 125-154

Tall, D. (2002). Natural and formal infinities. Educational Studies in Mathematics, 48 (2 y 3), 129-

136.