

# Utilización de las herramientas en el espacio de trabajo matemático y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas

Paula Verdugo Hernández y Gonzalo Espinoza Vásquez

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

## Resumen

Este trabajo considera los modelos del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) y del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) para estudiar la relación entre las herramientas teóricas y operacionales con el conocimiento de conexiones entre objetos matemáticos. Para ello, se proponen dos ejemplos en donde el uso de ciertos teoremas permite estudiar, desde ambos modelos, el rol y el conocimiento acerca de ellos tratando de este modo de profundizar el análisis de la actividad matemática. Concluimos que esta investigación podría generar una complementariedad entre los subdominios del MTSK y las componentes del ETM, afinando el estudio que se puede realizar en cada modelo.

**Palabras Clave:** ETM, MTSK, herramientas, conexiones, sucesiones de números reales.

**ABSTRACT** This work considers the models of Mathematical Working Space (MWS) and

*Mathematical Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) to study the relationship between the theoretical and operational tools with the knowledge of connections between mathematical objects. For make so, two examples on the use of certain theorems are proposed which allows to study, from the viewpoints of both models, the role and the knowledge of them trying in this way of deepening the analysis of mathematical activity. We conclude that this research could generate a complementarity between the subdomains of MTSK and the components of MWS, tuning the study that can be made within each model.*

**Keywords:** MWS, MTSK, tools, connections, sequences of real numbers.

## Introducción

La comprensión de un fenómeno depende del marco teórico que se elija para su estudio. En ese sentido, creemos que la complementación entre distintos enfoques podría proveer una visión más profunda del fenómeno, de acuerdo a los elementos teóricos que se consideren. La vinculación entre teorías permite dar una perspectiva más amplia de dicho fenómeno o robustecer el análisis que se realice del mismo. Por ejemplo, Bikner-Ahsbahs y Prediger(2010) muestran la estrategia de combinar elementos de diferentes teorías para realizar dicho vínculo,

la que es considerada para conducir el presente escrito.

Los marcos teóricos que tomamos en cuenta corresponden al Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK) y al Espacio de Trabajo Matemático (ETM), los que teniendo objetivos diferentes, posibilitan la combinación de sus elementos para robustecer los análisis (Espinoza-Vásquez, 2016). Existen varios trabajos que buscan establecer relaciones y conexiones entre el MTSK y el ETM, por ejemplo, ver en (Gómez-Chacón, Kuzniak, Nikolantonakis, Philippe, & Vivier, 2016). En ellos se postula que el modelo del ETM posibilita profundizar en las relaciones entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas y las acciones de enseñanza que éste sustenta en un esquema más amplio donde se incorpora el saber sabio y los espacios de trabajo personales de los estudiantes, así como las diferencias entre planos y génesis.

Ambos modelos permiten analizar el quehacer del profesor, siendo éste un elemento que permite la articulación entre ellos. Asimismo, la tarea matemática que el profesor presenta a sus estudiantes también posibilita el uso de los dos marcos, ETM y MTSK, para analizar el conocimiento que él pone en juego al plantear esta tarea. Así, el análisis desde la perspectiva de ambos modelos autoriza comprender mejor la actividad matemática que propicia el profesor y cómo se explica desde su conocimiento especializado. En este trabajo nos enfocamos en la noción de herramienta teórica definida por Kuzniak, Nechache y Drouhard (2016), y asimismo en la noción de herramienta operacional dada por Verdugo-Hernández (2017), las que se describirán más adelante.

A partir de lo anterior, nos preguntamos ¿Qué sub-dominios o elementos de MTSK parecen ser influyentes en la construcción de los ETM variados? (Gómez-Chacón et al., 2016). Más específicamente intentaremos adentrarnos en la siguiente pregunta ¿Cuál es la función de las herramientas teóricas y operacionales en el ETM y cómo pueden ser comprendidas desde el MTSK? Esto en relación a la función que cumplen las herramientas en el ETM y cómo estas se puede visualizar en el MTSK o viceversa.

### Fundamentos teóricos

El MTSK es un modelo analítico que permite estudiar el conocimiento que muestra, posee y/o declara el profesor de matemática (Carrillo et al., 2013). Inspirado en el trabajo de Shulman (1986), el MTSK propone una conceptualización para el conocimiento del profesor considerando una división en dominios y subdominios con fines analíticos. Así, el MTSK considera dos grandes grupos de conocimiento distinguidos para referirse al conocimiento del profesor: el **Mathematical Knowledge (MK)**, que es el conocimiento de la matemática como disciplina científica en un contexto escolar y contempla los subdominios Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la estructura matemática (KSM) y Conocimiento de la práctica matemática (KPM), y el **Pedagogical Content Knowledge (PCK)**, que abarca los objetos matemáticos como objetos de enseñanza-aprendizaje y contempla los subdominios de Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT) y Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS) (Carrillo et al., 2014). El modelo otorga un lugar fundamental a la matemática y no la disocia de su proceso de

enseñanza-aprendizaje, siendo esto clave para comprender el carácter especializado con el que se considera el conocimiento del profesor de matemática. Asimismo, se incluye, al centro del modelo (ver esquema en Carrillo et al.(2013)), el dominio de las creencias que tiene el profesor acerca de la matemática y de la enseñanza y aprendizaje de la misma. Estas creencias son demarcadas con líneas segmentadas para indicar que ellas influyen en todos los subdominios del conocimiento, pudiendo también ser analizadas bajo ciertas categorías (e.g., Carrillo & Contreras, 1995). En este trabajo hemos limitado la aplicación del MTSK al dominio MK para realizar el análisis e interpretación de los resultados.

Se entiende que la división en dominios y subdominios para el conocimiento es artificial, respondiendo a fines analíticos, por esta razón se espera observar distintas relaciones entre los subdominios cuando se estudia el conocimiento especializado del profesor.

### Espacio de Trabajo Matemático

El Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011) tiene por objetivo principal modelizar el trabajo matemático en un contexto educativo, con el fin de favorecer y mejorar las condiciones en las cuales se produce el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Para definir el ETM se introducen dos planos, el **plano epistemológico** y el **plano cognitivo**, los cuales estructuran el ETM apoyando la comprensión del modelo del trabajo matemático que se genera. Además, se identifican tres tipos de ETM: el ETM de referencia, del cual depende la organización esperada del espacio de trabajo, el que se define sólo sobre la base de criterios matemáticos; el ETM idóneo, que consiste en el acondicionamiento y organización del ETM de

referencia, con el fin de convertirlo en un espacio de trabajo efectivo e idóneo en una institución educativa dada con una función definida; y el ETM personal, que reside en la manera en que el ETM idóneo es utilizado por los estudiantes y también por sus profesores; cada individuo se apropia y ocupa su propio ETM personal con sus conocimientos matemáticos y sus capacidades cognitivas (Kuzniak, 2011). Por otro lado, según Kuzniak & Richard (2014) el Espacio de Trabajo Matemático cuenta con tres planos verticales, los cuales se activan por medio de una determinada tarea (Kuzniak & Richard, 2014).

### Avances teóricos: hacia la complementariedad ETM-MTSK

En esta oportunidad, mostraremos sólo parte de nuestra investigación, centrada en el estudio de las relaciones entre el ETM y el MTSK, para lo cual nos basaremos en una metodología cualitativa (Denzin, 1970), en donde se realizará una revisión de dos marcos teóricos. Nuestro propósito es analizar y describir la utilización de las herramientas teóricas y operatorias al plantear una posible tarea, para lo cual pretendemos identificar la relación existente entre las herramientas del ETM y las conexiones propuestas por el MTSK, estableciendo las posibles articulaciones de ambos marcos mediante la combinación de sus componentes teóricos.

La herramienta teórica se define como aquella que sirve para el razonamiento matemático, basado en la lógica y en las propiedades de los objetos matemáticos (Kuzniak, Nechache y Drouhard, 2016). Por ejemplo, una herramienta teórica para las sucesiones es el criterio de convergencia para sucesiones monótonas y acotadas. Por otro lado, la noción de herramienta

operacional corresponde a aquella propiedad necesaria con el fin de resolver una tarea, por ejemplo, las propiedades de las desigualdades, de la factorización, etc. (Verdugo-Hernández, 2017). Cabe destacar que las herramientas operacionales son también herramientas teóricas, pero en otro referencial. Por ejemplo, cuando se utiliza el teorema del binomio de Newton para demostrar la monotonía de una sucesión, dicha herramienta forma parte del referencial del Álgebra, y no es parte del referencial de las sucesiones, lo que le da el carácter de herramienta operacional. Asimismo, el teorema del binomio de Newton es una conexión de tipo auxiliar entre las sucesiones y el dominio del Álgebra al cual pertenece, mientras que como conocimiento este teorema es parte del KoT del profesor. De hecho, consideramos que las conexiones estudiadas bajo el modelo del MTSK en el subdominio KSM, pasan a ser herramientas en el modelo del ETM en la componente del referencial. Por ejemplo, la caracterización del límite mediante sucesiones (Spivak, 2003, p. 619) establece una conexión entre las funciones y las sucesiones, donde dicha conexión es interconceptual desde el modelo del MTSK, y al mismo tiempo es una herramienta teórica desde el ETM. De este modo, existe una amplia variedad de conexiones o herramientas que se podrían estudiar desde ambos puntos de vista. Estas conexiones o herramientas son susceptibles de ser utilizadas por un individuo, por ejemplo, en la resolución de una determinada tarea, lo cual establece la posibilidad de estudiar la actividad matemática que de allí se desprende, integrando ambas teorías.

### Conclusiones y perspectivas

Aunque los resultados aquí presentados son parciales, debido a que este trabajo se

encuentra en desarrollo, es posible apreciar que la combinación de los elementos de ambos modelos permite hacer un análisis más detallado en cuanto al rol de ciertos objetos o nociones matemáticas. Podemos agregar que pese a que existen diferencias en las orientaciones de cada modelo, por ejemplo el ETM se refiere a herramientas, mientras que el MTSK se refiere a conexiones entre objetos matemáticos y los procedimientos asociados, es posible dar una doble mirada sobre el uso de estas propiedades o teoremas identificando conexiones y herramientas de manera simultánea. De este modo, consideramos que existe una relación entre las herramientas del ETM y las conexiones en el MTSK.

La investigación en curso se puede proyectar considerando las conexiones que podría proponer y mostrar el profesor en el marco del MTSK al plantear tareas matemáticas durante la enseñanza de un objeto matemático, las cuales podrían influenciar en la actividad del estudiante. Este hecho podría acercar el estudio del trabajo del profesor al del estudiante en el MTSK, complementándose con el ETM personal del alumno.

Finalmente, respecto de la pregunta de investigación que nos hemos planteado, concluimos que uno de los subdominios del MTSK (KSM) tiene elementos que ayudan en el estudio del ETM debido a la naturaleza de las conexiones allí encontradas y a la relación que estas pudieran tener con las herramientas de la componente referencial del ETM.

### Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). *Determining Specialized Knowledge*

- for Mathematics Teaching. *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)*, 2985–2994.
- Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., & Montes, M. A. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Denzin, N. (1970). *Sociological Methods: a Source Book*. Aldine Publishing Company. Chicago.
- Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., Nikolantonakis, K., Philippe, R., & Vivier, L. (2016). *Espacio de Trabajo Matemático*. *Actas Quinto Simposio Internacional ETM* (pp. 1–507). Florina, Grecia: University of Western Macedonia.
- Kuzniak, A. (2011). *L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses*. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9–24. Retrieved from [http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM\\_FR/Annales\\_16.pdf](http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM_FR/Annales_16.pdf)
- Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J. P. (2016). *Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom*. *ZDM*. <http://doi.org/10.1007/s11858-016-0773-0>
- Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). *Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas*. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 1–8.
- Spivak, M. (2003). *Calculo Infinitesimal*. (B. Frontera, Ed.) (Reverté S.). Barcelona, España
- Verdugo-Hernández, P. (2017). *Espacio de Trabajo Matemático del Análisis: Enseñanza de las sucesiones en los primeros años de universidad*. (Tesis Doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Facultad de Ciencias, Chile.
-