¿Cómo enseñar a dividir? Secuencia de actividades para Ciclo 2

Jennyfer A Zambrano Arias
nifer86@gmail.com

Jenny M González Castellanos
madelein883@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen. Esta es una experiencia de aula llevada a cabo en el ciclo 2, la cual estuvo a cargo de dos profesoras practicantes quienes promovieron la estructura multiplicativa hasta identificar los múltiplos y divisores de un número, dicha experiencia se rigió desde lo metodológico por la estructura propuesta por el grupo DECA (); a nivel conceptual por varios autores como Verganud, Maza (1991), y otros; y finalmente el marco legal por los Estándares Básicos (2007) y los Lineamientos (1998). Se realizaron una serie de actividades que promovieron el reconocimiento y conceptualización de la división como reparticiones equitativas, y promovieron la reflexión tanto de los estudiantes como de las profesoras, en torno a la utilidad, facilidad y aceptación de las actividades para la comprensión de los estudiantes.

Palabras clave: estructura multiplicativa, actividad de introducción, reestructuración, formulación e institucionalización.

1. Contextualización

En el segundo semestre del año 2010 se llevó a cabo un diseño y aplicación de secuencia de actividades para promover el pensamiento multiplicativo en estudiantes de ciclo dos, es decir tercero y cuarto de primaria, el cual se desarrolló en un colegio del sur de Bogotá, y se profundizó en la división. Esta propuesta consistía en abordar un contexto útil para estructurar el pensamiento multiplicativo y que este a su vez, llamara la atención de los estudiantes y atendiera a las exigencias propias del currículo a nivel temático.

En el diagnóstico, se mostró que los estudiantes estaban en la capacidad de resolver la multiplicación algorítmicamente, pero cuando se enfrentaban a problemas o situaciones que requerían comprensión y transformación de datos, no estaban en la capacidad de entenderlos ni enfrentarlos. Como la estructura multiplicativa, implica la multiplicación y la división, y para trabajar a profundidad la división, la multiplicación debe estar conceptualizada, pues matemáticamente se conoce que la división es la operación inversa a la multiplicación, y por tanto si no se comprende que es multiplicar, tampoco se comprenderá que es dividir; por esto, fue necesario realizar actividades para guiar al estudiante en el tránsito de lo que es conocido para él, (es decir la adición y sustracción), hacia lo que conceptualmente se esperaba de la multiplicación; una vez hecho este tránsito, se llevaron a cabo las actividades de división.

A continuación se dará cuenta de la secuencia de actividades, algunas de las cuales son actividades ya existentes, pero con adaptaciones para el presente nivel y de la referencia teórica utilizada para esta secuencia de actividades.

2. Referentes teórico-prácticos básicos

Carpenter y Moser citados por Maza (1991) deducen que debido a que la resolución de problemas está centrada en el curriculum de matemáticas, decenas de estudios se centraron en la aritmética elemental, y por esto, los problemas de suma y resta fueron abordaros, hasta el punto de establecerse una teoría uniforme; por otro lado, los problemas de multiplicación y división, han sufrido un retraso en su desarrollo, además, *"la multiplicación y división suelen abordarse a una edad algo superior a la suma y resta y este desfase cronológico conlleva a la interacción de las primeras operaciones con otros conceptos muy relacionados: decimales, fracciones, razones, proporciones, etc."* (Maza, 1991. Pg. 13)

Afirma este autor que *"gracias a las aportaciones de Vergnaud (1983), los estudios sobre la multiplicación y la división serían inseparables de otros dedicados a las nociones de fracción, razón, número racional, función lineal, etc."* Entonces Vergnaud, le da a los problemas de multiplicación y división una particularidad de reglas de tres. (Maza, 1991, pg. 15). En cuanto a la división, la atención se ha centrado en la dualidad agrupamiento-partición por ser, inicialmente, los tipos de problemas que deben ser significativamente más diferentes. Para comprobarlo, considérese los dos problemas siguientes.

Partición-razón: *<<Se quieren repartir 18 caramelos entre tres niños ¿cuántos caramelos habrá de darse cada niño?>>* y **Agrupamiento-razón**: *<<se quieren repartir 18 caramelos entre varios niños ¿a cuántos niños le podrán dar seis caramelos?>>.* Maza, 1991, pg. 18)

Cuando se intenta resolver el segundo problema, la solución más obvia parece ser la de el proceso denominado por Maza, (1991) como *estrategia de resta reiterada*; para esto, el autor aclara que *existe la creencia generalizada entre los profesores de que la resta reiterada es el procedimiento más eficaz y el más válido de cara a la introducción posterior del algoritmo*. Pero, esta estrategia de resta re iterada resulta inaplicable en el primer problema, ya que no resulta natural restar tres niños de 18 caramelos. La falta de homogeneidad de las cantidades conduce a algún otro procedimiento que resuelva el problema. Éste consistiría en desarrollar la ***estrategia de reparto*** que viene implícita en la estructura del problema; es decir: *Tengo 18 caramelos. Doy uno a cada uno de los tres niños. Me quedan 18 - 3 = 15 caramelos. Doy uno (el segundo) acá uno de los tres niños. Me quedan 15 - 3 = 12 caramelos, en fin*.

En el trabajo de Kouba (1989) se estudian las distintas estrategias infantiles en torno a estas dos clases de problemas. Los resultados indican que los de *partición-razón*, entre niños de siete años, son resueltos por medio de un recuento unitario tanto a través de la estrategia reparto como a través de la formulación de conjeturas, es decir, por ensayo y error con distintos agrupamientos. De este modo, para repartir 18 caramelos entre tres niños la estrategia podría seguir el camino de ***Estrategia de ensayo y error***: *Tengo 18 caramelos. Doy cinco a cada uno de los tres niños. He repartidos* $5 \times 3 = 15$ *caramelos.* No son suficientes, en fin, sigue el procedimiento hasta obtener una respuesta convincente o en otras ocasiones, los niños se quedan con la primera conjetura que deducen y consideran que no se puede realizar dicha repartición.

En lo que se refiere a los problemas de *agrupamiento-razón*, estos autores muestran que la estrategia fundamental no es la **resta reiterada**, sino la **aditiva:** *Tengo 18 caramelos. Tengo que dar seis a cada niño. Doy seis al primer niño. He dado* $6 + 6 = 12$ *caramelos. Doy seis al tercer niño. He dado* $12 + 6 = 18$ *caramelos. No puedo dar más. He dado a tres niños. Así como, la* ***estrategia aditiva con múltiplos****: Tengo 18 caramelos. Tengo que dar seis a cada niño.* $6 \times 2 = 12$. $12 + 6 = 18$. *He dado a tres niños.*

Para este tipo de problemas se puede ver como una simple evolución a partir de las estrategias aditivas, llevan a la **estrategia multiplicativa** así: *Tengo 18 caramelos. Tengo que dar seis a cada niño.* 6×5 *igual 30. Son demasiados.* 6×2 *igual 12. No son bastantes.* 6×3 *igual 18. He dado a tres niños.* Pero otros tipos de problemas que llevan a las estrategias multiplicativas son los de *división-combinación*, pues estos autores encuentran que los niños responden mayoritariamente con estrategias multiplicativas, ante ejemplos tales como: <<*Se tiene una hoja de papel de ocho cuadrados de ancha. Se quiere cortar de manera que se tenga un rectángulo de 96 cuadros. ¿Cuántos cuadrados de largo deberá tener?*>>. Ello indica que la estructura semántica del problema afecta decisivamente a la estrategia utilizada.

Se afirma que son dos los modelos intuitivos propios de la división, si bien uno precede al otro. El más primitivo resulta ser el de la partición: un conjunto de elementos es dividido en subconjuntos del mismo número de elementos entre sí. A partir de este modelo surgen distintas creencias: para que el resultado sea un número natural, a su vez, el dividendo ha de ser mayor que el divisor. Este debe ser un número natural, ya que repartir un conjunto de elementos en 3.26 partes no tiene sentido en es te contexto. Por último, el resultado de la división, el número de elementos de cada conjunto, ha de ser menor que el dividendo, ya que la parte es menor que el todo. El modelo más elaborado es el de agrupamientos: se trata de determinar cuántas veces un conjunto está contenido en otro. Los problemas de este tipo, son resolubles por resta reiterada, e implican que el dividendo debe ser mayor que el divisor.

3. Descripción general de la experiencia de aula

Esta experiencia de aula se llevó a cabo durante el segundo semestre del año 2010 en el colegio Rodrigo Lara Bonilla, el cual está ubicado en la localidad 19 de Bogotá en los cursos de tercero y cuarto de primaria, donde cada profesora una tuvo a cargo un curso específico; la intensidad horaria era de 4 horas semanales y las actividades se planearon en conjunto y se aplicaron en cada curso. Como dato adicional, cada curso contaba con un promedio de 40 estudiantes.

Durante las primeras clases se realizaron actividades de reconocimiento y adaptación con los estudiantes, después se realizó una actividad diagnostico en cuanto a estructura multiplicativa lo que arrojó datos que indicaban que algunos estudiantes resolvían operaciones aritméticamente, pero pocos identificaban datos o aspectos relevantes en situaciones contextuales. Por tanto durante la mitad del semestre se trabajó en potenciar el reconocimiento de la multiplicación, en diferentes contextos.

Una vez alcanzados los logros en cuanto a multiplicación, se inició el trabajo de división, continuando con el mismo contexto didáctico de la multiplicación, el cual fue: el casino; se trabajó para identificar la división como repartos iguales en el contexto concreto; con una actividad denominada la Ruleta Numérica, la cual es un juego diseñado para trabajarse de manera individual, y grupal, donde es necesaria la coordinación del profesor.

A cada niño se le hace entrega de una cantidad de lentejas. La ruleta está dividida en ocho partes y cada parte determina el número de objetos que se deben agrupar o el número de grupos que deben formar. Una persona dirige la ruleta, haciendo los giros, de tal manera que se indique un número. Los **Materiales son**: Una ruleta numérica; lentejas y tapas de gaseosa; hoja, lápiz y papel; *Las tapas, son una ayuda para él estudiante, si este la quiere utilizar para realizar las agrupaciones, estará bien para la solución de su estrategia, pero si no lo desea, no es obligación que las utilice*.

Cantidad de lentejas	Grupos de a:	Dibujo	Cantidad de grupos	Cantidad de lentejas que sobran	Forma de escribir

Ilustración 1: Tabla guia estudiante

Debido a que se trabajó bajo la metodología del grupo DECA, la cual propone unas actividades de *introducción*, unas de *reestructuración*, unas de *profundización* y finalmente unas de *institucionalización*, se dejó al estudiante en un primer momento en una interacción libre con el material. Para que se adaptara al juego de la ruleta y solo pensaran en hacer repartos, utilizando la estrategia que consideraba pertinente; el objetivo de utilizar material concreto, es posibilitar una de las representaciones icónicas descritas por Maza (1991) pues estas ayudan en el desarrollo conceptual de los estudiantes, una de estas son las representaciones manipulables, consistentes en distintos materiales sobre los cuales el niño puede efectuar las acciones propias del problema representando, al mismo tiempo, las distintas cantidades presentes (Maza, 1991): para este caso, las lentejas y las tapas.

Este juego de la ruleta, promueve que el estudiante realice repartos equitativos, pues esa es la instrucción a seguir (el número que indica la ruleta, es la cantidad de lentejas que se debe agrupar, y se pregunta por la cantidad de grupos que se formaron), pero él estudiante no se puede quedar solo en la perspectiva concreta, pues esta hace que pierda el rumbo de realizar divisiones, por tanto; una vez finalizada esta fase, se hizo entrega de una guía para que escribieran lo que estaban realizando, y a modo de actividad es de reestructuración, se presentó un cuadro para ser llenado, según las acciones del estudiante; el uso de este cuadro, fue útil debido a que se solicitaba que se escribiera lo que se estaba realizando, lo que hacia las acciones significativas para el estudiante, y la última columna de la tabla, hacía que se adaptara la escritura tradicional algorítmica de la división.

Cantidad de lentejas	Cantidad de grupos	Dibujo	Grupos de a:	Cantidad de lentejas que sobran	Forma de escribir

Ilustración 2: Tabla guia de estudiante

Una vez que cada estudiante se adaptó al juego de la ruleta, y desarrolló estrategias para realizar las agrupaciones, según su criterio de repartición, se le propuso una segunda tabla, para ser llenada con otra instrucción, es decir se cambiaron las reglas del juego, indicando ahora, que el número en la ruleta, *indica la cantidad de grupos que se deben realizar, por tanto se debe descubrir ¿cuántas lentejas deben ir en cada grupo?* Esto aumentó el nivel de complejidad en el análisis de los estudiantes y promovió estrategias de repartición.

Finalmente, para que el estudiante no solo identificara la división en el contexto de repartos de lentejas, se le propusieron otras situaciones ficticia s a modo de actividades de profundización, para aplicar la división, donde cada estudiante hacia uso de la estrategia que había formalizado en su proceso propio.

Una vez adaptado cada uno de estos procesos de agrupación de lentejas, las profesoras decidieron que era tiempo de realizar una clase magistral o de institucionalización, para explicar cómo se utilizaba el algoritmo de la división, donde se hacía uso de la multiplicación como estrategia de solución algorítmica, y se formalizó las partes de este algoritmo, aclarando que es: el divisor, el dividendo, el cociente y el residuo; es decir, se obtiene el signo *simbólico* de la división, pues tiene una relación con el referente que depende de las leyes establecidas por las matemáticas formales, es decir, se le deja percibir al estudiante que este algoritmo es de aceptación cultural. Después de esto, se realizaron algunas divisiones y actividades de control, para verificar si el algoritmo se había interpretado correctamente.

Se llegó a realizar divisiones de hasta dos cifras, utilizando la estrategia multiplicativa como método para solucionar una división algorítmicamente. Cuando se finalizó la interpretación de lo que se trata dividir, se socializaron las ideas expuestas por los estudiantes, y se llegó a que la más adecuada es la de *estrategia de repartos*, así como que para resolver divisiones algorítmicamente, se puede acudir a la multiplicación; además implícitamente se reconoció que la división es la operación inversa a la multiplicación.

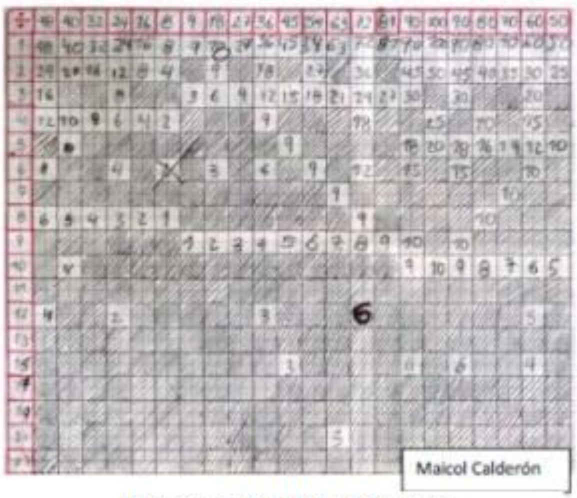

Ilustración 3: Tabla de división

Después se realizó una tabla de división para reforzar la división, la multiplicación e introducir el tema de divisores de un número, la cual presentaba horizontalmente unos números, los cuales representaban a los divisores, y verticalmente se encobraban los dividendos, así que en la coordenada, debían poner el cociente, y en caso que no fuera exacta la división, debían rellenar este espacio con color negro.

En la resolución de esta actividad, muchos estudiantes realizaron todas las divisiones, para descubrir si eran exactas o no, en otros casos, algunos estudiantes, identificaban una relación entre los múltiplos, reconociendo que la división era exacta sí el divisor aparece en la tabla de multiplicación del dividendo, por tanto les facilitaba la realización de la tabla.

Esto permitió identificar los términos de múltiplo y divisor de un número, identificando al divisor como aquel número que divide exactamente a otro, es decir que el residuo es cero, con esto, se promovió el trabajar en la siguiente actividad, la cual trataba de identificar los números primos, con la *Criba de Eratóstenes*. Para esto, se propuso una guía de trabajo, con algunas tablas que orientaron al estudiante en el proceso de reflexión y análisis de la esencia de los números primos.

Divisores del 40	
Divisores del 36	
Divisores del 18	
Divisores del 24	

Divisores del 11		
Divisores del 41		
Divisores del 79		
Divisores del 29		

Finalmente se aplicaron actividades de evaluación, para los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, exigidos por la institución educativa, algunos de los cuales fueron: Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos. Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. Identifico regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (calculadoras, ábacos, bloques multibase, etc.). Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones. Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones.

4. Logros y dificultades evidenciadas

Frente a aplicación del juego de la *Ruleta Numérica*, se evidenció, que los estudiantes se adaptaron adecuadamente al proceso de hacer grupos, y luego realizar un conteo de grupos, en este momento, la división se le presentó como un proceso entendible y divertido para el estudiante, quien a su vez, se iba afianzando con la representación algorítmica de la división, gracias a la última columna de la tabla. Por otra parte, la tercera columna, la cual solicitaba la realización de un dibujo de las acciones, cumplió el objetivo de representación icónica, pues para este caso, se solicitaba una *representación pictórica* (Maza, 1991), que hiciera que el estudiante realizara un registro de sus acciones.

Una vez se cambiaron las reglas del juego, los estudiantes aumentaron el nivel de complejidad en cuanto al análisis de los procesos para dividir y se tardaron un poco en adaptar esta nueva regla, lo que hacía que entraran en conflicto con sus concepciones previas e idearan estrategias para resolver el problema, alguna s de las que más se resaltaron fueron: *la estrategia de ensayo y error*, reparticiones uno a uno o *estrategia de reparto*; en algunos casos, algunos estudiantes que rían evitar el uso de las lentejas y trataron de realizar las reparticiones utilizando las *estrategias de suma* y pocos niños, utilizaban la *estrategia multiplicativa* para reconocer cual era la cantidad de lentejas en cada grupo, y realizaban las agrupaciones para corroborar sus datos.

Cuando se le presentó a los estudiantes las actividades de control, a modo de profundización, surgieron diversas estrategias para resolver las situaciones, por ejemplo, algunos utilizaban las estrategias desarrolladas durante la parte de reestructuración, pero realizaban dibujos y finalizaban con conteo, -ya fuera de grupos o de elementos en cada grupo- para corroborar sus datos; lo que indica que los estudiantes comprendían la esencia de la división, reconocían lo relevante en la situación, y realizaban un conteo correcto de lo solicitado, pero la mayoría no hacía uso de estrategias aditivas o multiplicativas.

Para tratar de resolver esto, las profesoras hacían suposiciones de repartos con cantidades más grandes, para que los estudiantes por pereza, o por posibles *fallas en el conteo*, trataran de utilizar la estrategia multiplicativa como ayuda para dar respuesta al reparto equitativo; en algunos casos funcionaba, pero en otros casos, los estudiantes continuaban realizando dibujos y grupos de dibujos, lo que hacía que llenaran varias hojas de su cuaderno.

Una vez realizadas todas estas acciones, y que los estudiantes empezaron a relacionarse con la forma de escribir los repartos de lentejas, e identificaban donde se debían poner cada representación de lentejas, la explicación magistral acerca del algoritmo, fue comprendida y aceptada con facilidad, pues fue un camino conocido y significativo para el estudiante, y no sintió temor de enfrentarse a algo que consideraba difícil por tener el nombre de *división*, y gracias a que los algoritmos se resolvían con ayuda de la multiplicación, los estudiantes comprendieron, aceptaron y familiarizaron es te nuevo algoritmo, y desarrollaron una facilidad para resolver divisiones de una cifra. Cuando se le propusieron divisiones de dos cifras, en algunos casos se presentó un conflicto conceptual, pero fue rápidamente solucionado, cuando observaban la estrategia utilizada para resolver divisiones de una cifra, y así se animaban a repasar multiplicaciones de dos cifras.

Cuando se trabajó la actividad de la Criba de Eratóstenes, permitió que el estudiante reconociera como primera medida que los números que no son múltiplos de ningún número, son aquellos denominados primos, luego una vez realizadas las tablas de división, lograron concluir que estos números son aquellos que solo tiene dos divisores, el 1 y si mismos, con esto, se profundizó a nivel temático en: la multiplicación, la división, el dividendo y el múltiplo.

5. Reflexión final

Un aspecto que se quieren resaltar en los Lineamientos Curriculares, es que se busca que la educación se torne constructivista, teoría que se asume como: el estudiante es el autor y gestor de su propio aprendizaje, por ello, se pensó en actividades que promovieran este aspecto, para que el estudiante pudiera seguir un camino que parte desde los aspectos que conoce y paulatinamente llega a conceptos nuevos y renovadores para su estructura conceptual, pero las actividades diseñadas, tenían un importante papel para el docente, el docente debía ser un orientador de los procesos que el estudiante construía, por tanto, estas actividades, deben dirigirse de forma “casi” personalizada, para poder distinguir entre los procesos que está construyendo en estudiante, y los objetivos que se pretenden con cada actividad.

Pero debido a que el promedio de estudiantes por curso era de 40, para las profesoras practicantes, se complicaban los aspectos de educación personalizada, consecuencia de esto, es que se observaron muchos casos es que los estudiantes llegaban a conceptos de niveles superiores, incluso podía verse procesos de generalización, pero debido a que existían muchos niños con procesos distintos y que se debe atender en el menor tiempo posible a una gran cantidad de estudiantes, no se permitía el espacio de dedicación para potenciar las habilidades demostradas por algunos estudiantes.

Pero a pesar de esas pequeñas insatisfacciones, las actividades propuestas para este ciclo, se llevaron a cabo con éxito, los estudiantes siguieron el camino hacia la división, de forma significativa y divertida, lograron reconocer los aspectos necesarios para identificar los números primos, lo que promoverá en un futuro, la comprensión del teorema fundamental de la aritmética.

Una perspectiva adicional que se había diagnosticado desde el principio, es que los estudiantes cuando se enfrentaban a situaciones matemáticas, que requerían de una operación especifican o de unos procesos particulares, no era interpretado por los estudiantes, por tanto elegían una operación inadecuada. Las explicaciones para esto giran en torno a la comprensión lectora, el desarrollo conceptual que se posea sobre las operaciones, las relaciones con las palabras del contexto.

Referencias bibliográficas

- MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional, Colombia.: MEN.
- MEN. (2007). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional, Colombia.: MEN.
- MAZA, Maza, C. Multiplicar y dividir a través de la resolución de problemas. Visor Distribuciones. 1991. España, Madrid
- GRUPO DECA. CASTILLEJO, B; FERNÁNDEZ, A; DE LA FUENTE, C; HERNANDO, E; PÉREZ, E; PINEDA, P; ROJO, P; SANTAMARÍA, E. Orientaciones Para El Diseño Y Elaboración De Actividades De Aprendizaje Y De Evaluación. Publicado en revista Aula, Nº6, págs: 33-39