El Análisis Matemático en los libros de texto de España

Maria Teresa González Astudillo, DDM y DC Universidad de Salamanca

Introducción

En la transmisión del conocimiento matemático ha constituido un hito importante la aparición del libro escolar como elemento cultural reflejo de la manipulación social que selecciona unos contenidos frente a otros, que impone una determinada forma de estructurarlos y que propone a la siguiente generación cierto tipo de problemas con unas herramientas semióticas y no otras. Hay que destacar, además, que el papel de los libros de texto es doble e irreducible uno a otro (Otte, 1997): por un lado, poseen una función comunicativa y de interpretación que les dotará de un carácter subjetivo tanto desde el punto de vista del autor como del lector, y por otro, se presenta como una estructura materializada del conocimiento dotándoles de carácter eminentemente objetivo. Esta doble faceta de los libros de texto, hace que su estudio aporte gran información tanto acerca de las concepciones, en relación con el contenido matemático que desarrollan, como acerca del proceso educativo en el que están inmersos.

La implementación y utilización del libro de texto en el aula de matemáticas, se ha producido de forma generalizada desde los inicios de la educación obligatoria hasta nuestros días, ejerciendo para ello diferentes papeles: como objeto de estudio, como material de consulta, como registro de las actividades del alumno, como colección de ejercicios propuestos y problemas a resolver,... Esto ha originado una práctica escolar determinada por su uso, así como una organización de la enseñanza que se mantiene en la actualidad salvo casos aislados.

Investigaciones acerca de los libros de texto de matemáticas.

En el marco de la investigación histórica en Educación Matemática, se ha puesto de manifiesto la importancia del análisis del libro de texto como reflejo de la actividad que se realiza en el aula, ya que como indica Choppin (1980) el libro de texto es "a la vez apoyo del saber en tanto que impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de alumnos como de profesores; es instrumento de poder, dado que contribuye a la uniformización lingüística de una disciplina, a la nivelación cultural y a la propagación de las ideas dominantes". Por ello, desde la Didáctica de la Matemática se ha considerado interesante estudiar la contribución que los libros de texto han tenido en la historia de la educación matemática analizando la variedad y riqueza de sus contenidos, la incidencia en el aula, su función como transmisor de contenidos socialmente aceptados,... Además, "los libros de texto determinan en la práctica la enseñanza más que los decretos de los distintos gobiernos" (Schubring, 1987).

Resulta a su vez imprescindible, destacar el trabajo realizado por Dhombres (1984) y Schubring (1987) sobre metodología de análisis histórico de libros de texto, resaltando la necesidad de una aproximación global que analice los cambios en las sucesivas ediciones de un libro de texto, los cambios respecto a otros libros de texto y la relación de estos con los que se han producido en el contexto. También hay que tener en cuenta, los trabajos de Cantoral (1995), Filloy y Rojano (1984) o Puig (1994) en los que se compara algunos de los procesos utilizados por los alumnos en la comprensión del conocimiento matemático y los utilizados en los libros o textos históricos de matemáticas.

En España los trabajos realizados son más bien escasos, pero destacan el estudio de Sanz (1995) sobre los tipos y la función de las configuraciones gráficas de datos en los libros de texto de primaria, el de Maz (2000) acerca de forma de presentar los números negativos en los textos de matemáticas de los siglos XVIII y XIX, y los trabajos de Sierra, González y López (1999, 2003) sobre la evolución de los conceptos de límite y continuidad en los libros de texto de Matemáticas de España.

Los libros de secundaria: libros de autor.

En España, el cálculo diferencial ya se incluyó en las enseñanzas que los jesuitas establecieron en su Ratio Studiorum, que era un manual práctico de reglamento interno de las disciplinas académicas, preparado para servir de guía a los profesores. Aunque la primera versión de la Ratio del padre Acquaviva es de 1599, no es hasta el año 1832 con las Ratio del Padre Pachtler cuando se amplía el programa de matemáticas y se incluyen el álgebra, la trigonometría, la geometría analítica y el Cálculo Diferencial e Integral (Labrador y otros, 1986). Resultaba, por lo tanto, ciertamente ambicioso el plan establecido por los jesuitas así como novedoso y precursor de lo que empezaría a implantarse en España un siglo después. De todas formas, los primeros planes de estudio que incorporan contenidos de Análisis Matemático en España datan de 1934.

Los libros que se escribían para la educación secundaria, eran escritos por matemáticos-profesores de cierto renombre dentro de la comunidad matemática y que abarcaban todos los contenidos explicitados en los planes de estudio. La enseñanza secundaria abarcaba siete cursos y los contenidos de Análisis aparecían en los dos últimos (sexto y séptimo) para alumnos de 16-18 años. Uno de los libros que más se usó en estos inicios y del que se hicieron más ediciones fue el publicado por Rodríguez San Juan y Sixto Ríos en los cuáles se nota, sin lugar a dudas, la influencia de Julio Rey Pastor (1888-1962). Como es bien sabido, Rey Pastor se propuso elevar el nivel de la matemática española considerando su retraso «en medio siglo en la Geometría y en Análisis un poco mayor». Para ello se trazó un plan minucioso de modo que con el advenimiento de la segunda República, en 1931, se puede considerar que en España existía ya una cultura matemática contemporánea. Pues bien, discípulos suyos como Sixto Ríos y Rodríguez San Juan, contribuyeron a dotar de esa contemporaneidad a nuestra matemática, no solamente en la enseñanza universitaria sino también en la secundaria.

El libro de Rodríguez San Juan y Sixto Ríos de sexto curso publicado en el año 1950 relaciona el Análisis Matemático con diferentes fenómenos físicos (velocidad, temperatura, peso, fuerza, oscilación,...), químicos (volumen de gases,...) o económicos (coste de mercancías,...) en los que interviene de una forma u otra la noción de variación y aparece ya explícito el lenguaje de funciones[136] aunque dependiente del concepto de variable.

[136] Anteriormente los libros utilizaban el lenguaje de las variables

> Una variable es un símbolo con el que representamos un número cualquiera de un cierto conjunto (p. 181)

> Una constante es un símbolo con el que representamos un número perfectamente determinado. (p. 181)

> En general, diremos que la variable y es función de la variable independiente x definida en un cierto intervalo (a,b), si a cada valor de x de dicho intervalo corresponden uno o varios valores de y mediante una determinada ley (analítica, geométrica, física, económica, arbitraria, etc.) (p.181)

Hay seis temas dedicados al Análisis divididos en dos bloques: uno dedicado a las funciones y otro dedicado a las derivadas. En el primero se trata el concepto de función y su representación gráfica, los límites de funciones y la noción de continuidad. En cuanto al segundo se incluye el concepto e interpretaciones de la derivada, el cálculo de derivadas y sus aplicaciones. La idea que subyace en todos estos libros es la de una matemática ya elaborada que el alumno debe memorizar y practicar resolviendo ejercicios. Una segunda característica es el carácter cíclico de los contenidos que se repiten en sucesivos cursos ampliándose y completándose en cada uno respecto del anterior. En todos los libros, el desarrollo es secuencial y formal, aunque las demostraciones no son totalmente rigurosas, sino que tienen ciertos componentes intuitivos. En definitiva, las capacidades que se pretenden desarrollar en el alumno son: memorización de definiciones y propiedades y práctica algorítmica, con alguna excepción en los ejercicios planteados.

Un apartado importante es el dedicado a la representación gráfica de funciones que sustituye al estudio de curvas que realizaban hasta entonces los matemáticos. Ahora se va de una expresión algebraica o tabular a la representación gráfica-geométrica de la curva, al contrario de lo que se había hecho hasta entonces. Las funciones que se corresponden con curvas como parábolas, cúbicas, hipérbolas, elipses o bien funciones que se refieren a situaciones más o menos reales (temperaturas, vapor de agua) cuyos datos vienen dados de forma tabular.

El concepto de continuidad se encuentra, junto con el de límite, en el bloque dedicado a las funciones, desarrollándose ambos conceptos desligados del concepto de variable (como se había hecho hasta entonces). Se trata primero el concepto de límite dando la definición por sucesiones:

> El límite de la función f(x) cuando x tiende a a es el número b, si se verifica que los valores de la función f(x) se aproximan tanto como queramos a b, tomando los valores de la variable x convenientemente próximos a a (no se hace ninguna hipótesis sobre el valor de la función en el punto a). (p. 201)

Aparece una simbolización moderna del límite, los autores escriben:

$\lim_{x \to a} f(x) = b$, o bien $f(x) \to \mathbf{b}$, cuando $x \to \mathbf{a}$.

que se lee: f(x) tiende a **b** cuando x tiende a **a**. (p. 201)

Esta definición se completa dando una interpretación geométrica del límite de una función en un punto utilizando entornos simétricos. Se observa en estos dos autores una preocupación por los aspectos geométricos, que se traduce tanto en las interpretaciones de los conceptos como en los ejercicios propuestos, donde aparecen problemas de límites en contextos geométricos; es una característica que desaparecerá en los libros posteriores. Se observa un cambio progresivo en la definición del concepto de *límite,* desde su presentación, ligado a la idea de variable, hasta la introducción del concepto de *función,* clarificándose el concepto de *límite* a partir del de función. En torno al concepto de límite se estudian algunas de sus propiedades, los infinitésimos y los límites infinitos, así como algunas indeterminaciones para lo que se usa el lenguaje de ε. Así, cuando los autores demuestran que el límite de una función es un cierto valor, a lo largo de dicha demostración afinan el valor de ε (ε/2, ε/4...) de modo que al final salga en el segundo miembro de la desigualdad.

A partir del concepto de límite se define la continuidad de modo intuitivo

> Todos tenemos la idea intuitiva de que la gráfica de una función continua se caracteriza porque no presenta saltos y podemos dibujarla continuamente sin levantar el lapicero (p. 206).

y, a continuación, se da la definición clásica mediante el límite, que traducen inmediatamente a la forma métrica y posteriormente al lenguaje de incrementos.

> Una función f(x) es continua en el punto x=a si
>
> 1º existe $\lim_{x \to a} f(x)$
>
> 2º está definida la función para x=a
>
> 3º es $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (p. 206)

Hay una gran cantidad de representaciones gráficas cartesianas, para ejemplificar las propiedades de las funciones continuas y la discontinuidad: hipérbola, parte entera de x, coste de un viaje por kilómetros, volumen ocupado por un gas que se calienta. Se da una interpretación geométrica del límite y se ponen contraejemplos sobre la existencia de límite, para lo cual se utiliza la representación gráfica de la función *E(x)* (parte entera de *x*).

Estos dos conceptos, límite y continuidad, tienen un carácter esencialmente instrumental declarado por los autores al comienzo de las lecciones correspondientes al límite, aunque hay un componente geométrico importante referido al estudio de límites de pendientes de rectas secantes a una curva, de longitudes de cuerdas, de áreas bajo ciertas condiciones, de sucesiones de circunferencias.

La noción de derivada se relaciona con el concepto de tangente (interpretación geométrica) a una curva, problema que se indica es el origen del cálculo diferencial. Se calculan las tangentes a las curvas de segundo orden, es decir, las cónicas: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola y se construyen las tangentes de forma geométrica para ver la necesidad de métodos analíticos que permitan la determinación de las tangentes a las curvas partiendo de las ecuaciones y sin recurrir a propiedades geométricas especiales. También se relaciona con la noción de pendiente definida como "la razón del incremento vertical correspondiente a un incremento horizontal" (p. 214), el cociente incremental y la variación media de un intervalo.

Una vez definida la noción de derivada en un punto, se define la noción de función derivada y se estudian otras aplicaciones de la derivada: velocidad de un móvil, aceleración, velocidad angular, la función marginal. Utilizando la definición de función derivada como límite del cociente incremental se calculan las derivadas de las funciones elementales y se estudian las operaciones con derivadas. Finalmente, para demostrar la potencia del cálculo de derivadas éstas se utilizan para el cálculo de tangentes y normales a las cónicas.

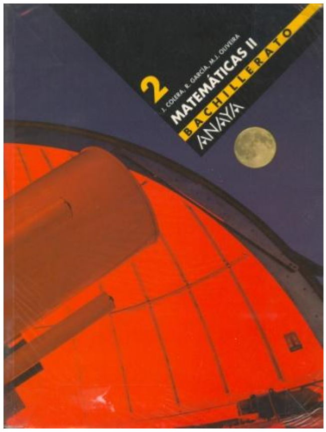
Los libros actuales: libros de editorial

A partir de los años 70 surgen algunas editoriales que se van consolidando a lo largo del tiempo, fundamentalmente en los 80, y ya en los 90 se produce el boom editorial publicándose libros de educación secundaria, que siguen una enseñanza de tipo tradicional, con un enfoque más bien formalista e instrumental. Esto se va a consolidar durante la primera década del 2000.

Aunque el Ministerio de Educación y Ciencia establece una normativa respecto a los contenidos que se deben incluir en la enseñanza y el tratamiento u orientación que se les debe dar, actualmente cada editorial tiene su propia línea y su propio mercado, por lo que los autores de los libros deben adaptarse a la línea marcada. Éstos son, generalmente profesores de educación secundaria que compaginan su trabajo en los Institutos con la publicación de libros de texto para todos los cursos de la educación secundaria, y en muchas ocasiones son los que imponen su propio libro en los centros educativos.

En este momento, la educación secundaria en España está configurada en dos bloques, una obligatoria constituida por cuatro cursos académicos (12 a 16 años) y otra post-obligatoria de dos cursos para los alumnos de 17 y 18 años y que les prepara para el ingreso en las Universidades. Al finalizar esta enseñanza secundaria los alumnos tienen que realizar una prueba que les permite el acceso a las Universidades.

Los contenidos relacionados con las funciones comienzan a estudiarse desde 2º de educación secundaria pero, en realidad, cuando empiezan a enfrentarse al Análisis propiamente dicho, es en los últimos cursos de la secundaria donde se incluyen temas relativos a la derivación, integración y sus aplicaciones. Los libros de estos dos cursos son muy voluminosos, los conceptos suelen estar condensados en pocas palabras y se incide más en el aprendizaje de tipo deductivo y en los aspectos simbólicos y formales asociados a los conceptos. Además se utilizan numerosos recursos para presentar los conceptos: fotografías, esquemas, ejemplos, colores, notas históricas.



Una de las editoriales con más repercusión y difusión en España es la editorial ANAYA, editorial que inicialmente estaba ubicada en la ciudad de Salamanca pero que con el paso del tiempo y, fundamentalmente por razones de distribución y comercialización, trasladó su sede a Madrid. Las imágenes y referencias que se van a incluir aquí son de uno de sus libros (Colera y Olivera, 2009).

Al igual que en la mayoría de los libros que se usan en la actualidad hay una utilización profusa de gráficas y dibujos geométricos (diagramas, gráficas,…) que sirven de apoyo intuitivo a la comprensión de los conceptos. Hay además referencias al contexto histórico y cultural en el que se han desarrollado dichos conceptos, y aparecen fotos y pequeñas biografías de los matemáticos que han contribuido a estos descubrimientos, lo que propicia la contextualización de los contenidos.

La estructura de los libros es típica de la enseñanza secundaria. Cada libro está dividido en bloques de contenidos en los que se desarrollan diferentes temas según los conceptos a enseñar/aprender, se incorporan explicaciones detalladas, ejemplos relacionados con los conceptos, numerosos ejercicios resueltos y propuestos,... hay una gran profusión de imágenes, colores, recuadros y síntesis para llamar la atención del alumno en cuanto a qué es lo más importante que no debe olvidar y siempre debe tener en cuenta.

La enseñanza del Análisis se concentra en un bloque completo con seis temas dedicados a: límites y continuidad, derivadas y técnicas de derivación, aplicaciones de la derivada, representación de funciones, cálculo de primitivas y aplicaciones de la integral definida. Parece que lo que se pretende es dotar a los alumnos de los instrumentos matemáticos necesarios para posibles aplicaciones posteriores y este aspecto práctico es el que domina todos los temas.

NOTAS HISTÓRICAS

SIGLO XVII: LA MOTIVACIÓN DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

Ya sabemos que el cálculo infinitesimal fue creado para resolver los principales problemas científicos del siglo XVII, como, por ejemplo, obtener longitudes de curvas, áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, tangentes a una curva y máximos y mínimos de funciones.

Muchos de los grandes matemáticos del siglo XVII trabajaron estos problemas obteniendo importantes resultados. Podemos citar, por ejemplo, a **Cavalieri** (1598-1647), **Torricelli** (1608-1647), **Fermat** (1601-1665), **Wallis** (1616-1703) y **Barrow** (1630-1677).

Sin embargo, faltaba una teoría global donde se incluyeran estos problemas, y otros muchos, aparentemente independientes. Los artífices de esta descomunal teoría fueron, al unísono, **Isaac Newton** y **Gottfried Wilhelm Leibnitz**.

NEWTON Y LEIBNITZ

Newton publicó en 1687 una magna obra titulada *Los principios matemáticos de la filosofía natural*, que constituye uno de los hitos más grandes de la historia de la ciencia.

Destacamos también su obra *Método de fluxiones*, que contenía su Cálculo Infinitesimal, escrita dieciséis años antes de que publicara la anterior.

En 1678, Leibnitz publica sus descubrimientos sobre el cálculo en una revista que él mismo había fundado, *Acta Eruditorum*. Pero es el *Acta* de 1684 la que contiene lo que actualmente se considera el primer tratado de cálculo diferencial.

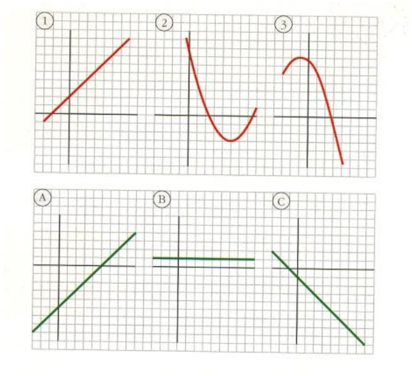
A raíz de estas publicaciones se entabló una agria disputa entre los seguidores de Newton y los de Leibnitz respecto a quién había sido el primer descubridor del cálculo.

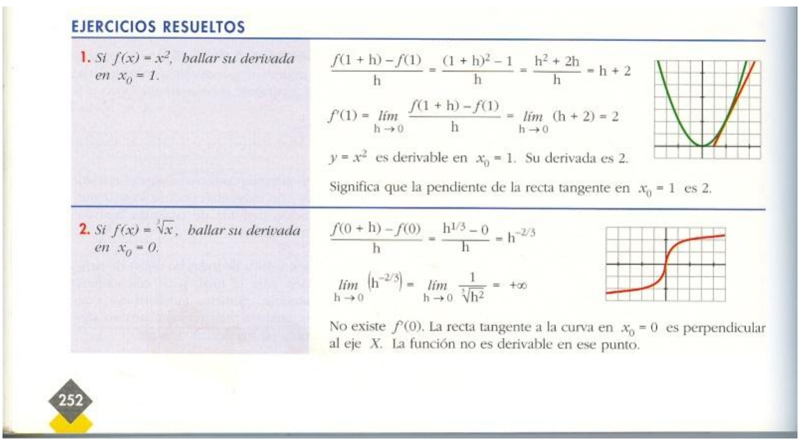
Actualmente, está claro que la primicia de la publicación le corresponde a Leibnitz; y, a Newton, la autoría del descubrimiento. El cálculo de Newton es mucho más profundo que el de Leibnitz; mientras que las notaciones utilizadas por Leibnitz son más claras que las de Newton.

ALGUNOS TIPOS DE INTEGRALES QUE SE RESUELVEN POR PARTES

$\int x^n e^x \, dx$	$u = x^n$	$dv = e^x \, dx$
$\int x^n \operatorname{sen} x \, dx$	$u = x^n$	$dv = \operatorname{sen} x \, dx$
$\int x^n \cos x \, dx$	$u = x^n$	$dv = \cos x \, dx$
$\int x^n \ln x \, dx$	$u = \ln x$	$dv = x^n \, dx$
$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$	$u = \operatorname{arc\,tg} x$	$dv = dx$
$\int \operatorname{arc\,sen} x \, dx$	$u = \operatorname{arc\,sen} x$	$dv = dx$
$\int \ln x \, dx$	$u = \ln x$	$dv = dx$

Hay que resaltar la gran cantidad de ejercicios y problemas de tipos diversos, aplicados tanto a las matemáticas como a otras ciencias y a la vida real, además de darle un gran protagonismo a la geometría. Destacan, por ejemplo los que hacen referencia a la economía, cuestiones relativas a costes, producción, consumo,… También se hacen referencias al uso de las nuevas tecnologías, poniendo ejemplos e indicando la forma de utilización de otros medios, como calculadoras gráficas. Además se proponen ejercicios buscando trabajar la reversibilidad del pensamiento del alumno, por lo que aparecen tanto en sentido directo como inverso. Este es el caso de las representaciones gráficas, a veces se trata de construirlas y otras de interpretarlas, o bien se incide en la relación entra la representación gráfica de una función y la de su función derivada (p. 251).





EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Si $f(x) = x^2$, hallar su derivada en $x_0 = 1$.*

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = \frac{h^2+2h}{h} = h+2$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} (h+2) = 2$$

$y = x^2$ es derivable en $x_0 = 1$. Su derivada es 2.

Significa que la pendiente de la recta tangente en $x_0 = 1$ es 2.

2. *Si $f(x) = \sqrt[3]{x}$, hallar su derivada en $x_0 = 0$.*

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h^{1/3}-0}{h} = h^{-2/3}$$

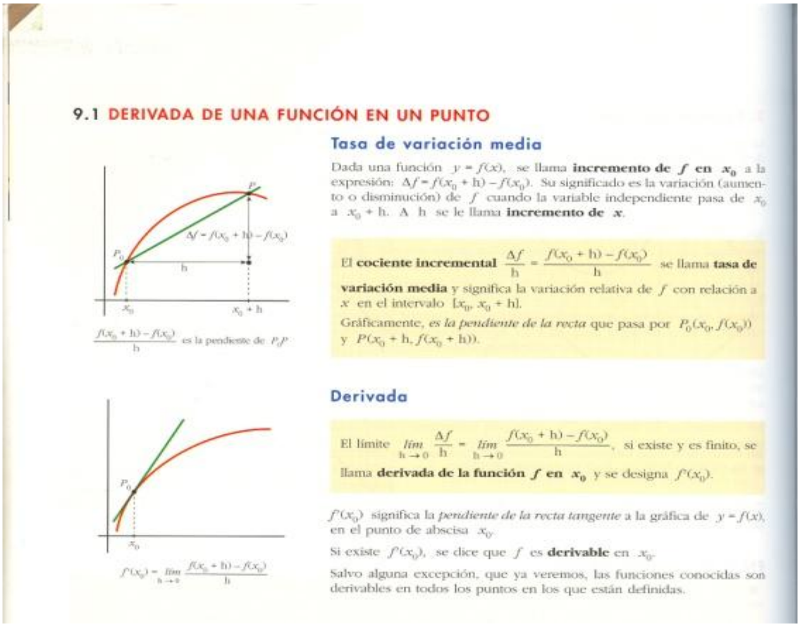
$$\lim_{h \to 0} \left(h^{-2/3}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

No existe $f'(0)$. La recta tangente a la curva en $x_0 = 0$ es perpendicular al eje X. La función no es derivable en ese punto.

252

En cuanto a las definiciones se busca el acercamiento intuitivo y el tratamiento de los conceptos desde diferentes ángulos o puntos de vista, acompañados de ejemplos, ejercicios resueltos, situaciones en las que se cumplen las hipótesis, contraejemplos, o ilustraciones gráficas de diferente índole para asegurar la compresión. Por ejemplo, en relación con el concepto de derivada, al mismo tiempo que se da su definición como límite de un cociente incremental se incluye un gráfico que ilustra la situación que se está definiendo (p. 252).

Pero además se insiste en las reglas de cálculo para ayudar a los alumnos a resolver y ser eficientes en la resolución de las actividades de aula. Estos apoyos gráficos se concretan en el uso de cuadrículas, diferentes colores, flechas, cuadros de doble entrada, cuadros resumen, comparación de gráficas cartesianas,…



9.1 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Tasa de variación media

Dada una función $y = f(x)$, se llama **incremento de f en x_0** a la expresión: $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Su significado es la variación (aumento o disminución) de f cuando la variable independiente pasa de x_0 a $x_0 + h$. A h se le llama **incremento de x**.

El **cociente incremental** $\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ se llama **tasa de variación media** y significa la variación relativa de f con relación a x en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$.

Gráficamente, *es la pendiente de la recta* que pasa por $P_0(x_0, f(x_0))$ y $P(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Derivada

El límite $\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, si existe y es finito, se llama **derivada de la función f en x_0** y se designa $f'(x_0)$.

$f'(x_0)$ significa la *pendiente de la recta tangente* a la gráfica de $y = f(x)$, en el punto de abscisa x_0.

Si existe $f'(x_0)$, se dice que f es **derivable** en x_0.

Salvo alguna excepción, que ya veremos, las funciones conocidas son derivables en todos los puntos en los que están definidas.

Conclusión.

Aunque en esta comunicación sólo se ha presentado con detalle cómo dos libros de texto, de épocas distintas conceptúan la enseñanza del Análisis Matemático, se pueden considerar prototipos de los libros de su época. Se han escogido para analizar cómo han evolucionado los conceptos desde mediados del siglo XX hasta la actualidad. Una de los aspectos que más ha variado en estos años es el relativo a las cuestiones físicas de los textos. Se ha pasado de libros en blanco y negro a libros en los que predominan todo tipo de colores, subrayados, resaltados para llamar la atención sobre ciertas definiciones, reglas o conclusiones. Otro aspecto que hay que resaltar es la gran cantidad de gráficas, esquemas y resúmenes que aparecen en los libros actuales, mientras que en los de mediados de siglo XX se hacía más énfasis en los aspectos formales y la introducción de un lenguaje abstracto. En las definiciones se ha pasado de los aspectos variacionales a los funcionales dando un papel importante a las reglas de cálculo y a las aplicaciones de los conceptos. Se ha producido un aumento progresivo en la cantidad y tipo de problemas ofrecidos para su estudio, que inicialmente concedían gran importancia a los problemas relacionados con fenómenos físicos o matemáticos a los que se han incorporado problemas relacionados con situaciones económicas.

El énfasis en los libros de texto, está puesto o bien en la exposición de los conceptos de una forma rigurosa o bien en la adquisición de ciertas destrezas y habilidades calculísticas. A pesar de las ligeras variaciones en cada uno de los libros, lo que prácticamente no ha variado grandemente es el tipo de actividad que se espera del alumno, destacando la aplicación rutinaria de las reglas a ejercicios-tipo o ejercicios escolares.

De las consideraciones anteriores podemos también concluir que, en general, son los propios libros de texto los que establecen el tipo de actividad que debe realizar el alumno y la forma en que se estructuran los conceptos matemáticos, es decir, la línea editorial marca considerablemente los libros que publica de forma que son más las editoriales que los programas oficiales los que determinan la forma de enseñanza. Por ello, debe ser sólo un material auxiliar de apoyo en la enseñanza que se complemente con otros libros de texto, otros tipos de libros, así como material diverso, tanto didáctico como fungible, audiovisual u otro.

Bibliografía

Cantoral, R. (1995) Los textos de cálculo: una visión de las reformas y contrarreformas (documento inédito).

Cólera, J., Olivera, M. J. (2009). Matemáticas II. Madrid: Grupo Anaya

Choppin, A. (1980) L'histoire des manuels scolaires. Un bilan bibliométrique de la recherche français. Histoire de l'Education, 58, pp. 165-185.

Dhombres, J. (1984) French Mathematical Textbooks form Bézout to Cauchy. Historia scientarum. 28, pp. 91-137.

Filloy, E. y Rojano, T. (1984) From an Aritmética to an Algebraic Thought (A clinical study with 12-13 years old). En J. Moser (ed.) Proceedings on the Sixth Annual meeting for the Pshycology of Mathematics Education, North American Chapter. Madison, Wisconsin, EEUU, pp. 51-56.

Labrador, C. Bertrán-Quera, M. Díez, A. y Martínez, J. (1986) La Ratio Studiorum de los Jesuitas. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.

Maz, A. (2000) Tratamiento de los números negativos en textos de matemáticas publicados en España en los siglos XVIII y XIX. Tesis de maestría. Granada: Universidad de Granada.

Otte, M. (1997) What is a text? En B. Christiansen, A.G. Howson, M. Otte (eds) Perspectives on mathematics educaction. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, pp. 173-203.

Puig, L. (1994) El De Numeris Datis de Jordanus Nemoratius como sistema matemático de signos. Mathesis, 10, pp. 47-92

Ríos, S. y Rodríguez San Juan, A. (1950) Matemáticas. 6º curso de bachillerato. Los autores. Madrid. 1950.

Sanz, I. (1995) La construcción del lenguaje matemático a través de libros escolares de matemáticas. Las configuraciones gráficas de datos. Tesis doctoral. Vizcaya: Universidad del País Vasco.

Sierra, M. González, M.T. y López, C. (1999) Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria: 1940-1995. Enseñanza de las Ciencias, 17 (3), pp. 463-476.

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (2003) El concepto de continuidad en los manuales escolares de educación secundaria de la segunda mitad del siglo XX. Educación Matemática, 15(1), pp. 21-49.

Schubring, G. (1987) On the methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. For the learning of mathematics, 7(3), pp. 41-51.