1(CO) Roxo (1931) e Sangiorgi (1969) – abordagens inovadoras em geometria dedutiva

Regina de Cassia Manso de Almeida, UFF/COLUNI , regimans@gmail.com

Resumo

O artigo coloca em evidência a presença de aproximações entre a abordagem de Euclides Roxo, anos 1930 e a de Osvaldo Sangiorgi, anos 1960, com respeito aos conteúdos de geometria dedutiva. Os dois autores de livros-texto, pioneiros quando se trata de texto escolar no Brasil, se destacam, em especial, por discutir como se faz uma demonstração, sendo essa uma característica inovadora que os aproxima e constitui o objeto de análise da autora.

Introdução

Este artigo dá continuidade aos meus estudos com livros-texto usados no Brasil para o ensino básico, visando entender e caracterizar transformações presentes no texto demonstrativo em geometria plana (Almeida, 2008a). Apresento, aqui, um desses desdobramentos: a presença de aproximações entre Euclides Roxo, anos 1930, e Osvaldo Sangiorgi, anos 1960, no que se refere à abordagem de conteúdos de geometria dedutiva. Roxo e Sangiorgi foram pioneiros quando se trata de texto escolar no Brasil, além de outras atuações importantes no campo da educação matemática, e ultimamente têm sido foco de vários estudos[23]. Entre obras representativas usadas para o ensino básico no Brasil, a partir do século XIX, estes dois autores se destacam, em especial, porque discutem como fazer uma demonstração: essa é uma característica inovadora que os aproxima e constitui meu objeto de análise neste artigo.

Para tanto, utilizo como referência principal os seguintes exemplares: Euclides Roxo, Curso *de Mathematica, 3ª. série. II – Geometria* edição da Livraria Francisco Alves, Rio de Janeiro, 1931 e o de Osvaldo Sangiorgi, *Matemática – Curso Moderno*, 4ª edição pela companhia Editora Nacional, São Paulo, 1968, volumes 3 e 4, além do Guia para uso dos professores, 3 volumes, 1966.

O destaque que consta deste artigo – as obras de Roxo e de Sangiorgi – é resultante de um processo de pesquisa, com foco no conteúdo da geometria dedutiva presente em livros-texto usados para o ensino elementar no Brasil, a partir do século XIX. Nesse empreendimento, me defrontei com tipos de obras bem específicos que denomino *livros tipo elementos de geometria*, predominantes no séc. XIX e *livros tipo livro de matemática*, característicos do séc. XX.

Antes que se instituísse o que hoje admitimos como conteúdos da disciplina matemática, para a escola básica, os conteúdos da geometria dedutiva elementar, de modo geral, constavam dos livros tipo elementos de geometria. Estes se caracterizam pelo tratamento dedutivo dos conteúdos sob um modelo de exposição comum: cada capítulo ou livro apresenta inicialmente um conjunto de

[23] Entre outras possibilidades, no que diz respeito à Roxo e sua atuação ver: Beltrame, 2000; Carvalho, 2003,2006; Dassie, 2001; Rocha, 2001; no que diz respeito à Sangiorgi ver: Valente 2008;

definições, seguido da série de *teoremas* ou *problemas*. Os *teoremas* têm por objetivo demonstrar que um objeto que sabemos existir possui ou não possui uma propriedade; os *problemas* propõem que se demonstre a existência das figuras geométricas. Com efeito, o livro tipo elementos de geometria remete ao processo de constituição dos conteúdos escolares em matemática: conteúdos hoje de modo geral englobados nos livros tipo livro de matemática têm um percurso histórico marcado pela divisão em três grandes ramos – geometria, aritmética e álgebra – gerando ao longo de séculos as publicações designadas como, *elementos de*. Assim, esse legado da organização temática dos conteúdos matemáticos se incorpora nos livros tipo *elementos de* geometria, aritmética, trigonometria, álgebra, entre outros (Almeida, 2008a).

Portanto, as obras de Roxo (1930) e as de Sangiorgi (1969) se destacam entre as demais publicações tipo livro de matemática e as tipo elementos de geometria que formaram a base documental da pesquisa geradora deste artigo. Roxo lançou uma obra em três volumes: *Curso de Mathematica Elementar*, volume 1, 1929; *Curso de Mathematica Elementar*, volume 2, 1930 e o *Curso de Matemática, 3ª Serie. II - Geometria*, sem edição, 1931, todos editados no Rio de Janeiro pela Livraria Francisco Alves. A coleção foi escrita com o objetivo de atender a uma série de propostas modernizadoras para o ensino da matemática, propagadas internacionalmente desde o início do século XX e defendidas pelo autor. O movimento de renovação, no Brasil, resultou em programas de ensino implementados desde 1929, culminando com a Reforma Francisco Campos, em 1931 e com a criação da disciplina escolar matemática.

Então, fica instituída uma nova disciplina, a matemática, que também inova ao integrar as diferentes áreas, aritmética, geometria, álgebra e trigonometria, introduzindo o conceito de função. O sentido da renovação se inscreve marcadamente na proposta de trazer para a escola básica conteúdos matemáticos mais recentes. E o caráter didático da abordagem dos conteúdos é também priorizado. Citando KLEIN, Roxo defendia: "a compreensão mais intuitiva do espaço, em primeira linha e antes de tudo, o desenvolvimento da idéa de função, refundindo nella nossas representações do espaço e do número" (cf. Roxo, 1929, p. 6-7).

Já nos anos 60, outro lançamento, o de Osvaldo Sangiorgi, se destaca no cenário escolar brasileiro: Matemática – Curso Moderno para os ginásios, em 4 volumes e várias edições pela Companhia Editora Nacional, em São Paulo. A editora lança o volume 1 em 1964 e a partir daí, a cada ano, a coleção se completa. O movimento da matemática moderna também se caracterizou pela defesa da renovação dos conteúdos escolares da escola básica com a entrada de conceitos matemáticos mais recentes. O próprio Sangiorgi (1969) ressaltava que matemáticos e educadores ilustres de vários países ratificaram "o caráter irreversível da Matemática Moderna, a fim de que a perfeição lógica de que desfruta o seu ensino na Escola Superior seja levada às Escolas Secundárias e Escolas Primárias, respeitadas as programações respectivas" (p. 2, v. 4).

Problematizando o tema ensino da demonstração no texto escolar

A presença de estratégias para o ensino da demonstração no texto escolar tem raízes históricas que elucidam a complexidade e o alcance da questão. Nesse sentido, a estrutura expositiva dos livros tipo *elementos de geometria*, numa perspectiva de longo alcance, remete ao modelo euclidiano de exposição dedutiva que durante séculos foi sofrendo críticas de ordem didática.

Com isso, quero me referir especificamente a um autor renascentista, Petrus Ramus (1515-1572), haja vista a reconhecida legitimidade de sua obra para o campo da história da educação matemática (Murdoch, 1956; Schubring, 2004; Mahoney, 1975). Com o livro *Scholarum Mathematicarum* (1569), Ramus sustenta que a matemática é transmitida nos textos dos *Elementos* de Euclides (300 a.C.) de tal forma que apenas o rigor lhe dá sustentação, e isso ele considerava um método pobre. Nada havia, ali, que fornecesse qualquer indicação sobre como se chegou aos resultados, fato que não favorecia qualquer ação independente do aprendiz. E um modo mais claro de reescrever o texto de Euclides, seria abordando os conteúdos de outra maneira, fazendo uso da aritmética e da álgebra, além da necessidade de reordená-los (Schubring; Almeida, 2008). Não obstante a ocorrência de tal crítica implicando em diversas variáveis, atenho-me neste artigo apenas a uma delas: a ausência de qualquer indicação sobre como se chega aos resultados das demonstrações. Com esse parêntese histórico trago à cena a importância e permanência de uma questão com a qual até os dias de hoje nos defrontamos, Além disso, a *esquematização do texto demonstrativo* que, como veremos, é uma das estratégias usadas para o ensino da geometria dedutiva, nos envia ao texto demonstrativo canônico dos *Elementos* de Euclides e também se filia às críticas a esse modelo de exposição.

O legado de Roxo (1931) e de Sangiorgi (1968)

É possível compor um quadro geral das estratégias para o ensino da demonstração, observando os textos desses dois autores. Alguns pontos de aproximação se destacam visto que as abordagens têm como foco o quanto é específica a tarefa de escrever o texto demonstrativo, segundo a estrutura lógica. Os dois primeiros pontos de aproximação, a *abordagem inicial do tema demonstração de modo intuitivo* e a *estrutura dedutiva que prevê axiomas e proposições embasando as provas*, se caracterizam pelo caráter conceitual mais abrangente, no sentido de que não se trata de discutir nem estabelecer qualquer modelo de exposição para o texto demonstrativo, ao contrário, o foco é trazer à discussão o que significa demonstrar e a especificidade da tarefa em que a estrutura lógica mobiliza uma base axiomática e o encadeamento necessário de proposições. O último ponto de aproximação, a *esquematização do texto*, refere um conjunto de procedimentos ou estratégias para o ensino, que se caracterizam por orientar o trabalho do aluno na produção do texto demonstrativo, segundo as especificidades desse empreendimento.

Consideremos, agora, o primeiro ponto que aproxima os dois autores, a *abordagem inicial do tema demonstração de modo intuitivo*. Roxo (1931), no Capítulo I, § 1º – *Nota histórica*, discorre sobre as origens da demonstração, destacando o aspecto histórico-social da matemática enquanto produção humana – "a sciencia resulta da cooperação social, isto é, do esforço convergente de pessoas interessadas em aprofundar certos conhecimentos, através de longos períodos de estudo e especulação". A relação necessidade prática e necessidade teórica liga-se ao fato de que estabelecer propriedades matemáticas por experimentação ou verificá-las pela medição pode levar ao erro. Então as propriedades geométricas passaram a ser demonstradas por dedução, que é um modo de raciocínio em que uma propriedade é deduzida ou resulta de outra propriedade anteriormente estabelecida (p. 9-12).

Contudo, enquanto Roxo (idem) com base em um texto histórico problematiza o tema, sendo descritivo, Sangiorgi (1968, v. 3) se particulariza por pontuar alguns aspectos do tema, discutindo diretamente com o leitor e apresentando-lhe questões. Primeiramente, ele se refere à insuficiência das medidas e das observações para "provar" que uma afirmação é verdadeira com o uso de Testes de Atenção: Sangiorgi propõe observar figuras que, à primeira vista, podem induzir ao erro, seja quanto ao comprimento ou quanto à forma. Esse tipo de figura consta dos textos dos dois autores, mas em Roxo (idem) não é diretamente proposto ao leitor observá-las visando resolver qualquer questão.

Nesse aspecto, a abordagem de Sangiorgi (1968) se organiza de modo que com exercícios exploratórios, testes de atenção, exercícios práticos, as propriedades das figuras geométricas vão sendo trabalhadas intuitivamente, como pretexto para o aluno praticar a "demonstração", ou seja, ele estaria concluindo certas propriedades das figuras geométricas, iniciando uma prática de dedução (p. 36). Após esse estudo preparatório com as figuras geométricas, o último capítulo do livro traz o estudo dedutivo. Por exemplo, para o tema ângulos e retas perpendiculares ele propõe o seguinte tipo de questão como exercício exploratório: Tem-se a figura de duas retas perpendiculares com as retas e os ângulos devidamente indicados. Pergunta-se: Se as duas retas da figura são perpendiculares, o que você pode dizer acerca dos ângulos? Duas retas formam ângulos cuja medida é 90º. O que você pode dizer acerca dessas retas? (p. 165, v.2).

Em Roxo (1931) a abordagem também contempla um estudo preparatório, conforme já anuncia o Prefácio: "o ensino de Geometria, que começou nos dois primeiros annos por um curso intuitivo e experimental, attinge agora a fase de exposição formal". Por exemplo, no volume 2, o autor propõe questões como essas: "*Em todo triangulo, a somma de dois lados é sempre maior e a sua differença sempre menor que o terceiro lado.* – Enuncie essa proposição de outro modo, começando pelas palavras 'cada lado de um triangulo ...'" (Roxo, 1930 , p. 36, v. 2). É importante notar que essa é uma entre outras atividades preparatórias ao ensino da geometria dedutiva que constam do livro da segunda série. O autor tem por objetivo estabelecer, a partir de exercícios com as figuras geométricas, as propriedades que as caracterizam já que estas serão usadas no estudo dedutivo, na terceira série.

Temos como segundo ponto de aproximação entre os dois autores, a presença de uma *estrutura dedutiva que prevê axiomas e proposições embasando as provas*. O livro de Roxo (1931), nos leva ao Capítulo I, § 2º – *Conjunto de proposições fundamentais* *que constitue base intuitiva à geometria*. O autor explana sobre não haver necessidade de se demonstrar todos os fatos que embasam uma prova: "uma demonstração lógica sendo um raciocínio pelo qual fazemos uma verdade resultar da outra, havemos, forçosamente, desse modo, de partir de alguma verdade que se não demonstra" (p. 14). E no prefácio, esclarece ao professor que poderia ter reduzido um pouco mais o número de teoremas demonstrados, "acceitando sem prova deductiva muitos daquelles factos que no 1º e no 2º anno foram estabelecidos intuitiva ou experencialmente. Receando parecer demasiado innovador demos as respectivas demonstrações que ficará a critério do professor omitir segundo as circumstancias" (p. 6). Apresenta os axiomas e postulados que vão embasar as demonstrações e, a seguir, define teorema e discute a demonstração a partir das especificidades textuais. Assim, nos envia ao terceiro e último ponto que aproxima as abordagens dos dois autores, a esquematização do texto.

Por sua vez, quanto à *estrutura dedutiva que prevê axiomas e proposições embasando as provas* que é o segundo ponto de aproximação entre os dois autores, Sangiorgi (1968) ressalta o caráter de generalização de uma demonstração. Partindo do exemplo com o triângulo isósceles, diz que um processo dedutivo justifica a validade de uma propriedade para qualquer triângulo isósceles, independente do tamanho da figura ou da precisão com que foi construída. Assim, com os conceitos primitivos (não definidos), com as definições, as sentenças aceitas como postulados e com outras tomadas como teoremas se constrói logicamente a geometria. Define postulado, teorema e apresenta os postulados que vão fundamentar o estudo dedutivo (p. 233-236, v. 3). Ressalta, contudo, não haver regras rígidas para enfrentar um teorema com êxito, mas que é possível, "PARTINDO dos fatos dados na *hipótese* e empregando os conhecimentos advindos das *definições*, dos *postulados* e de *teoremas* já conhecidos, CHEGAR aos fatos apontados na *tese*" (idem, p. 239) (grifos do autor). Sangiorgi apresenta também um plano de demonstração que nos envia ao que designamos como esquematização do texto.

A *esquematização do texto,* último ponto de aproximação entre os dois autores, engloba cinco estratégias básicas por eles usadas parar ensinar como construir o texto de uma demonstração. A primeira delas é o *trabalho com a sentença condicional na forma se... então*, que marca na proposição que é o enunciado do teorema, duas partes básicas, a hipótese e a tese, que pode ser múltipla. Esquematicamente, temos: *se* a hipótese, *então* a tese. Os dois autores apresentam vários exercícios dessa natureza. A segunda estratégia é a *construção da figura geométrica*, destacando a necessidade do traçado de algum segmento ou figura geométrica com propriedades conhecidas de modo que se possa, no desenho, representar com o uso de letras os fatos contidos na hipótese e na tese. Também os dois autores trabalham com símbolos matemáticos que devem ser usados na escrita da demonstração. O livro de Roxo (1931) apresenta uma tabela com "Symbolos e Abreviaturas" (p. 22). A terceira estratégia de esquematização do texto presente nos dois autores visa ensinar ao aluno como *dispor* o *texto em duas colunas explicitando os passos dedutivos da prova,* ou seja, listar a série de afirmações e as respectivas justificativas. Roxo (1931, v.3) indica assim, "modo de dispor a demonstração" e nomeia as justificativas como *bases* ou *razões*. Ainda, como a quarta estratégia, temos o uso de *marcas seqüenciais explicitando, no texto, etapas características do encadeamento dedutivo*. Isto é, destacar no texto as etapas Hipótese (H), Tese (T), Demonstração e Conclusão que levam da hipótese ao que deve ser provado. Finalizando, as abordagens de Roxo (1930) e Sangiorgi (1969) se aproximam por propor a esquematização usando a *apresentação incompleta dos passos dedutivos da prova*, em que ao aluno cabe completar os passos que faltam no texto da demonstração. Os recortes, abaixo, mostram as estratégias da esquematização do texto, nos dois autores. Primeiramente, observe o texto do teorema, conforme Sangiorgi (1968).

Observemos as estratégias de *esquematização do texto demonstrativo* presentes na abordagem de Sangiorgi: o enunciado do teorema na forma *se... então*; a figura geométrica e o uso de letras e símbolos indicando a existência de propriedades e relações; as marcas das etapas características do desenvolvimento dedutivo: H: hipótese, T: tese e Demonstração; a demonstração disposta em duas colunas: a da direita, explicitando a série de afirmativas que correspondem aos passos dedutivos da prova e as respectivas justificativas dispostas na coluna à esquerda. Note, ainda, que o autor usa a abreviatura *c.q.d.,* ou seja, como queremos demonstrar, indicando a conclusão da prova; nesse caso não há o uso do termo conclusão que consta, como poderemos ver, da proposta de Roxo. Por fim, a interrogação feita ao aluno para que justifique um dos passos da prova, finaliza a série de estratégias para o ensino da geometria dedutiva.

A seguir, exemplificamos a estratégia da esquematização do texto em Roxo (1930): podemos notar como no caso de Sangiorgi (1930), logo acima, os diferentes encaminhamentos visando o ensino de como elaborar o texto de uma demonstração.

Note que o autor usa abreviações para indicar as retas paralelas, os triângulos.

Conclusão

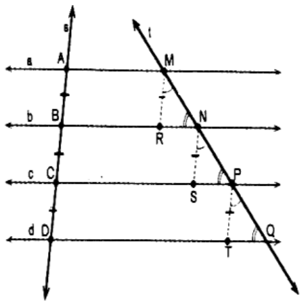
Embora a obra de Euclides Roxo tenha sido inovadora quanto à abordagem da geometria dedutiva plana, apresentando estratégias de ensino, tanto quanto o caso de Osvaldo Sangiorgi, o encaminhamento didático para o ensino da geometria dedutiva não se universalizou nos livros escolares. Esse fato já se comprova, com os quase 30 anos que separam as duas obras sob análise e também pelo que se segue aos anos 60 no direcionamento da matemática escolar. O texto escolar de Sangiorgi é característico do movimento que se convencionou chamar como matemática moderna, o qual a partir dos anos 80 vai sendo cada vez mais fortemente contestado. Já pelo final da década de 90 os livros escolares adquirem outras características: a abordagem dos conteúdos com enfoque na resolução de problemas e nos procedimentos algébricos. E quanto à geometria dedutiva, esta praticamente desaparece dos livros-texto. Este breve quadro apenas sintetiza as tendências mais marcantes na abordagem dos conteúdos nas décadas finais do último século, sem qualquer pretensão de discutir tais encaminhamentos.

Figura 1. Teorema. Sangiorgi, 1968, p. 241, v. 3.

T.1 : *Se um feixe de paralelas determina segmentos* **congruentes** *sôbre uma transversal, então determina sôbre outra qualquer transversal dêsse feixe segmentos também* **congruentes.**

$$H \begin{cases} a \parallel b \parallel c \parallel d \\ s \text{ e } t \text{ transversais} \\ \overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \end{cases}$$

$$T \; \{ \; \overline{MN} \cong \overline{NP} \cong \overline{PQ}$$



DEMONSTRAÇÃO:

Afirmações	*Justificações*
1. $\overline{MR} \parallel \overline{AB}$; $\overline{NS} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{PT} \parallel \overline{CD}$ (... construindo)	1. Postulado de Euclides
2. Os quadriláteros *AMRB*, *BNSC* e *CPTD* são paralelogramos	2. Lados opostos paralelos dois a dois
3. $\overline{AB} \cong \overline{MR}$, $\overline{BC} \cong \overline{NS}$ e $\overline{CD} \cong \overline{PT}$	3. Lados opostos de um paralelogramo são congruentes
4. $\overline{MR} \cong \overline{NS} \cong \overline{PT}$	4. Hipótese e propriedade transitiva da congruência
5. $\triangle MRN \cong \triangle NSP \cong \triangle PTQ$	5. Caso A.L.A. (por quê?)
6. $\overline{MN} \cong \overline{NP} \cong \overline{PQ}$	6. Lados correspondentes de triângulos congruentes

c.q.d.

Figura 2. Teorema. Roxo, 1931, p. 291-192.

263. Theorema. — *Toda parallela a um dos lados de um triangulo fórma com os outros dois lados um triangulo semelhante ao primeiro.*

Hypõthese: o $\triangle$ *ABC* e a recta *DE* // ao lado *BC* (fig. 195).

These: $\triangle$ *ADE* $\backsim$ $\triangle$ *ABC*.

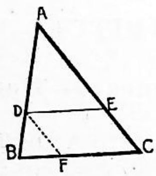


Fig. 195

Marcha: Mostra-se que os dois $\triangle$s têm os $\wedge$s iguaes e os lados homologos proporcionaes.

Demonstração:

(1) O $\wedge$ *A* é commum aos dois $\triangle$s.

(2) $\wedge D = \wedge B$; $\wedge E = \wedge C$. — (2) Correspondentes das //s *DE* e *BC* com as trans. *AB* e *AC*.

(3) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ — (3) Theor. **252**.

(4) Trace *DF* // *AC*; *DEFC* é um ▱ e $FC = DE$. — (4) Porque ?

(5) $\frac{FC}{BC} = \frac{AD}{AB}$ — (5) Sendo *DF* // *AC* divide os outros dois lados na mesma razão.

(6) $\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ — (6) Substituindo *FC* por seu igual *DE*.

Conclusão: os $\triangle$s *ADE* e *ABC* têm os $\wedge$s iguaes e os lados homologos proporcionaes e são semelhantes.

O que destacamos de importante nestas duas obras e que as particularizam na historiografia da matemática escolar, no que diz respeito à geometria dedutiva, é que reconhecemos nelas uma abordagem multidimensional, buscando atender a complexidade do assunto. Portanto, em posição distanciada dos livros que apenas apresentam os teoremas e as respectivas demonstrações. Roxo e Sangiorgi apresentam capítulos dedicados ao tema geometria dedutiva e, mais que isso, as duas coleções se voltam nessa direção, como destacamos com o caso dos exercícios exploratórios. Assim, a análise comparativa da abordagem dos dois autores vai nos desvelando tal complexidade: conhecimento vindo da experiência e necessidade do conhecimento intelectual; raciocínio dedutivo que deve se incorporar no texto da prova; conhecimento teórico, ou seja, saber propriedades das figuras geométricas e conhecê-las nas possíveis relações que elas possam estabelecer umas com as outras; o problema de estabelecer as proposições que não se deve demonstrar, entre outros aspectos.

Assim sendo, conforme Balacheff (1987), no que diz respeito ao uso escolar, de modo geral a demonstração está associada à idéia de desenvolver uma prova, ou seja, um encaminhamento centrado no agir de quem resolve o problema e, portanto, deve operar segundo as regras do raciocínio dedutivo. Observar o funcionamento da demonstração leva ao reconhecimento de uma seqüência de passos que conduzem das proposições de entrada, dadas como premissas ou hipóteses, à proposição da conclusão. O fato de que as proposições têm um lugar destinado previamente a elas no funcionamento dedutivo, significa que há regras para o raciocínio dedutivo. Então é relevante admitir a passagem das *provas pragmáticas* às *provas intelectuais*, explorando aspectos do raciocínio dedutivo, seu caráter necessário, visando entender como funciona o texto demonstrativo (idem, p. 1147-148) (grifos meus).

Em síntese, um aspecto importante na abordagem dedutiva, é que se faz necessário reconhecer a matemática enquanto um campo teórico ou, dito de outro modo, o trabalho com demonstrações exige operações intelectuais específicas e formulações peculiares, caracterizando um caso em que o próprio conhecimento torna-se objeto da reflexão e do discurso (Arsac, 1987; Balacheff, 1897; Barbin, 2005; Duval, 1999).

Por fim, o processo de pesquisa dialeticamente se constitui pela procura por estabelecer respostas e pelo permanente confronto com perguntas emergentes. Nesse sentido, este artigo não se cala pelas interrogações que contempla. Entre algumas possibilidades citarei: com respeito à geometria dedutiva plana que autores influenciaram Roxo e Sangiorgi? Sangiorgi foi influenciado pela obra de Roxo? Como caracterizar o modo pelo qual conteúdos da geometria plana para a escola básica, por exemplo, foram abordados no meado final do século XX em livros escolares? Como o ensino dedutivo em geometria plana para a escola básica é construído a partir da idéia do aluno iniciar-se no pensamento matemático dedutivo, a partir da crítica ao intuitivo?

Referências Bibliográficas

ALMEIDA, R. C. M. (2008a). *Demonstrações em geometria plana em livros-texto no Brasil a partir do século XIX*. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (Departamento de Educação). Tese de Doutorado.

__________ . R.C.M. (2008b) O texto de demonstração e a presença de questões a resolver em livros do tipo Elementos de Geometria. (2008). *Anais do IV HTEM - Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática***.** Rio de Janeiro, p.1-8. (ISBN: 978-85-61545-02-4)

ARSAC, G. (1987) L'origine de la démonstration: Essai d'épistémologie didactique. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, v. 8, nº 3, p. 267-312.

Barbin, E. (2005) *Produire et lire des textes de démonstration*. (Coord.) Paris: Ellipses.

BALACHEFF, N. (1987) Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, v. 18, p. 147-176.

___________. *Un cadre d'étude du raisonnement mathématique*., www.lettredelapreuve. Acesso em 18 set. De 2006.

BELTRAME, J. (2000) *Os programas de ensino de matemática do Colégio Pedro II: 1837 - 1932*. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Dissertação de Mestrado.

CORRY, L. (2006) The development of the idea of proof (up to 1900). In__GOWERS, T. *The Princeton companion to mathematics proof*. Pinceton: Princeton University Press.

CARVALHO (2006). A Turning Point in Secondary School Mathematics in Brazil: Euclides Roxo and the Mathematics Curricular Reforms of 1931 and 1942. *International Journal for the History of Mathematical Education*, v. 1, n. 1, p. 69-86.

___________. (2003) Euclides Roxo e as polêmicas sobre a modernização do ensino de Matemática. In__ CAMPOS, T. (org*). Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Bra*sil. São Paulo: SBEM, p. 86-158.

DASSIE, B. A. (2001) *A Matemática do Curso Secundário na Reforma Capanema*. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Dissertação de Mestrado.

DORMOLEN, J. (1977) Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics*, n. 8, p. 27-34.

DUVAL, R. (1999) Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 20, p. 233-261.

MAHONEY, M.S. *The beginnings of algebraic thought in the seventeenth century*, ()www.princeton.edu/~mike/17thcent.html.

MOISE, E. (1963) *Elementary geometry from an advanced standpoint.* Massachussetts: AddisonWesley Publishing.

MURDOCH. J. E (1956) Transmission of the Elements. In__GILLISPIE, C. C. (Ed.). *Dictionary of scientific biography*. New York: Scribner, p. 437-459. v. 3.

ROCHA, J. L. (2001) *A matemática do Curso Secundário na Reforma Francisco Campos*. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Dissertação de Mestrado.

ROXO, E. (1929) *Mathematica Elementar*. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves. v. 1.

______ . (1930) *Mathematica Elementar*. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves. v. 2.

_____ . (1931) *Mathematica Elementar. 2ª Série. II – Geometria.* Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves. v. 3.

SANGIORGI, O. (1968) *Matemática: curso Moderno para os ginásios.* São Paulo: Companhia Editora Nacional. 3v.

______ . O. (1966) *Guia para uso dos professores: Matemática: curso Moderno para os ginásios*. 3 v.

SCHUBRING, G. (2005) Conflits between generalization, rigor, and intuition: number concepts underlying the development of analysis in 17-19th century France and Germany. New York: Springer. Publishing.

___________. *Pesquisar sobre a história do ensino da matemática: metodologia, abordagens e perspectivas*. 2004 (a), www.spce.org.pt/sem/2.pdf. Acesso em 15 de setembro de 2007.

___________. *Análise histórica de livros de matemática: notas de aula*. Campinas: Editora Autores Associados, 2003.

___________. (1989) *The cross-cultural "transmission" of concepts – the first international mathematics curricular reform around 1900, with an appendix on the biography of F. Klein.* Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld. Occasional paper 92.

VALENTE, W. R. (1999) *Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930).* São Paulo: Annablume Editora, FAPESP.

________ . (2008) W. R. *Osvaldo Sangiorgi: um professor moderno.* São Paulo: Annablume/CNPq/GHEMAT.