As primeiras aplicações das derivadas nos manuais escolares do Ensino Secundário

Ana Paula Aires, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, aaires@utad.pt
Ana Elisa Esteves Santiago, Instituto Politécnico de Leiria, ana.santiago@ipleiria.pt

Resumo

O trabalho aqui descrito faz parte de um estudo mais vasto em que se pretendeu fazer uma análise dos problemas de optimização, nos livros históricos de Matemática, desde o século IV a.C., passando depois para a análise dos programas oficiais de Matemática do Ensino Liceal/Secundário com o objectivo de verificar quais e de que forma faziam referência ao estudo dos problemas de optimização, terminando com a análise dos problemas de optimização presentes nos manuais de cada reforma curricular (Santiago, 2008).

A parte que se apresenta nesta comunicação diz respeito apenas à análise do programa e respectivo manual escolar que marcaram a introdução dos problemas de optimização no ensino liceal, em Portugal, ou seja, o programa oficial de 1954 e o Livro Único em vigor nessa época. Para tal iremos fazer uma análise destes, baseada nas quatro fases de resolução de problemas propostas por George Pólya (2003).

Introdução

Uma vez que esta investigação tem um duplo carácter - histórico e didáctico - procuramos nas obras de Bisquera (1989), Berrio (1997), e Schubring (1987, 1989) a fundamentação para a metodologia de investigação histórica a utilizar.

Neste contexto foram ainda importantes a obra de Astudillo (2002) que apresenta uma caracterização das representações dos pontos críticos presentes nos manuais escolares espanhóis e em livros históricos e a obra de Sierra (2003) acerca da evolução do ensino da Análise Matemática e da Álgebra.

De entre as obras de que nos servimos para contextualizar a evolução dos sistemas educativos, com um cariz marcadamente histórico, destacamos a *História do Ensino em Portugal* de Rómulo de Carvalho (Carvalho, 1985) e a obra *O Sistema de Ensino em Portugal (Séculos XIX-XX*) de Maria Cândida Proença (Proença,1998). Outra fonte, igualmente importante foi a legislação e programas publicados.

Para a análise didáctica tivemos por base as quatro fases de resolução de problemas propostas por George Pólya (2003).

Introdução do conceito de derivada nos programas oficiais

O conceito de derivada foi introduzido pela primeira vez nos programas oficiais do ensino secundário, então designado de ensino liceal, em 1905 com a reforma do ministro da Instrução, José Coelho (Decreto nº 3 do Diário de Governo nº 250, de 4 Novembro de 1905).

Este é integrado no programa relativo à VII classe (ou 7º ano) do curso complementar de ciências, no capítulo destinado à Álgebra que contempla os seguintes conteúdos:

VII Classe

Algebra.—Equação do 2.º grau a uma incognita: resolução e discussão. Composição da equação. Propriedades do trinomio do 2.º grau. Resolução das desigualdades do 2.º grau. Discussão de problemas do 2.º grau. Equações biquadradas. Equações irracionaes que se reduzem a equações do 1.º e 2.º grau.

Systema de duas equações a duas incognitas, uma do 1.º grau e outra do 2.º

Funcção exponencial. Nova definição dos logarithmos.

Noção de derivada; sua interpretação geometrica. Derivada de uma somma, de um producto de um quociente, de uma potencia, de uma raiz. Derivadas das funcções circulares. Revisões.

Com excepção da reforma de 1936, do ministro da Instrução Pública Carneiro Pacheco, o estudo das derivadas manteve-se sempre presente nos programas oficiais do ensino secundário até aos nossos dias. No entanto, as aplicações das derivadas só começaram a fazer parte dos programas oficiais a partir da reforma de 1954, sendo então ministro da Educação Pires de Lima (Aires, 2006).

A reforma de 1954

Abordemos agora a reforma de 1954, começando por analisar o programa oficial que foi publicado.

Os novos programas das disciplinas do Ensino Liceal foram aprovados a 7 de Setembro de 1954 (*Decreto nº 39807, do Diário de Governo nº 198 de 7 de Setembro de 1954*) e, no programa de Matemática, o conceito de derivada aparece no 3º ciclo, mais concretamente, no 6º ano do Curso Complementar de Ciências.

Apresentamos a seguir a estrutura deste.

6.º ano

Álgebra

Breves noções sobre as sucessivas generalizações do conceito de número; representação geométrica do sistema dos números reais. Números complexos de duas unidades; forma algébrica; igualdade, desigualdade e operações. Noção elementar de variável e de função; expressão analítica de uma função; classificação das funções; funções inversas; representação geométrica de algumas funções.

Infinitamente grandes; infinitésimos; infinitésimos simultâneos; teoremas relativos ao produto e à soma de infinitésimos. Limite de uma variável; limite de uma função; operações sobre limites.

Noção elementar de continuidade de uma função.

Derivada de uma função num ponto; função derivada. Derivadas das funções algébricas. Aplicação ao estudo da variação das funções nos casos mais simples.

Propriedades dos polinómios inteiros.

Adição algébrica, multiplicação e divisão de polinómios.

Divisão por $(x-a)$; polinómio identicamente nulo; polinómios idênticos; princípio das identidades; método dos coeficientes indeterminados; regra de Ruffini.

Fracções algébricas. Símbolos de impossibilidade; símbolos de indeterminação da forma

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \text{ e } 0\times\infty;$$

verdadeiro valor de uma expressão que se apresenta sob a forma indeterminada.

Verificamos que, após o estudo da derivada, surge apenas a indicação do estudo de aplicações desta ao estudo da variação de funções nos casos simples.

Uma vez que vigorava o regime do livro único[6], no final do programa surge a indicação dos livros para o ensino. Para o tema em análise aparece a seguinte referência:

> Compêndio de Álgebra, num volume.

O Livro Único

Em 1947 entra em vigor o regime do livro único, tendo sido aprovado para o 3º ciclo do ensino liceal o Compêndio de Álgebra de António Augusto Lopes (D. G. nº 145, II Série, de 24 de Junho de 1950). Como a lei previa[7] este devia ter mantido a sua vigência até ao ano de 1955 devendo, no entanto, ser aberto concurso para apresentação de manuais escolares até ao fim do mês de Setembro do ano anterior àquele em que se iniciaria novo período, o que viria a acontecer a 18 de Setembro de 1954 (D.G. nº 221, III Série).

António Augusto Lopes o autor do então livro único de Álgebra para o 3º ciclo do ensino liceal submeteu novamente o seu manual a este concurso onde eram também candidatos mais dois outros livros cujos autores eram professores já bem conhecidos e conceituados no meio académico. O primeiro da autoria de António Nascimento Palma Fernandes e Francisco Maria Gonçalves - Elementos de Álgebra para o 6º ano dos liceus - e o segundo de António Augusto Ferreira de Macedo, António Nicodemos Sousa Pereira e Alfredo Tenório de Figueiredo - Compêndio de Álgebra, 3º ciclo liceal. 1ª parte – 6º ano.

O Professor José Duarte da Silva Paulo foi nomeado como relator para emitir parecer sobre os livros candidatos a este concurso, que teve como resultado a não aprovação de livro único de Álgebra para o 3º ciclo do ensino liceal.

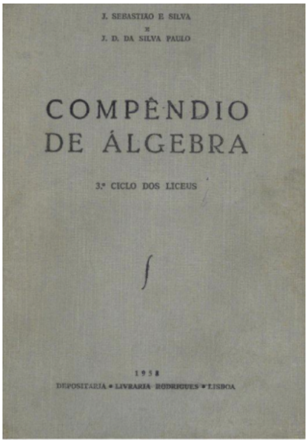
Para resolver este entrave, ainda em 1955, foi aberto novo concurso para apresentação de livros destinados ao 3º ciclo do ensino liceal, em particular para o compêndio da Álgebra ao qual se apresentou mais um livro à lista dos anteriores: o compêndio de Álgebra de José Sebastião e Silva e José Duarte da Silva Paulo, este último autor precisamente o relator do anterior concurso. No entanto, precisaríamos de aguardar três anos para que fosse publicitado o resultado do referido concurso, tendo sido aprovado o compêndio de Álgebra para o 3º ciclo de José Sebastião e Silva e José Duarte da Silva Paulo (D.G. nº 18, II Série, de 22 de Janeiro de 1958).

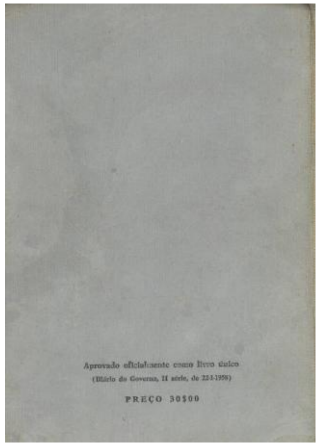
Assim, neste período de tempo entre 1950 e 1958 podemos encontrar quatro compêndios destinados à Álgebra para o 3º ciclo do ensino liceal, exactamente os quatro manuais que haviam sido candidatos ao último concurso de 1955. Apresentamos aqui a capa e contra capa do manual aprovado.

---

[6] Em 1947, através do Decreto-Lei nº 36508 de 17 de Setembro dá-se a reposição do livro único, uma medida que provocou alguma contestação, mas que permanecerá em vigor até 1974

[7] Artigo 391, nº 1 e nº 2 do decreto nº 36 508 (Estatuto do Ensino Liceal) do D. G. nº 216, I Série, de 17 de Setembro de 1947.





Importa ainda referir que todos os exemplares deste manual estavam rubricados e autenticados pelo Ministério da Educação Nacional.

Este livro teve várias edições ao longo dos anos que foram sofrendo algumas alterações. Assim sendo, iremos analisar as quatro edições que nos pareceram representativas desta época.

A obra, da autoria de José Sebastião e Silva e de J. D. Silva Paulo, intitulada "Compêndio de Álgebra, 6º e 7º Ano, 3º Ciclo - Ensino Liceal", foi publicada em 1958 e em 1960 pela Livraria Rodrigues (Aprovado como livro único pelo D. G. nº 18, 2ª Série de 22/01/1958). Em 1963 foi publicada em Lisboa pela Bertrand (Irmãos), Lda, **(**Aprovado como livro único pelo D. G. nº 100, 2ª Série de 24/04/1963) e em 1968 foi publicada em Braga pela Livraria Cruz (Aprovado como livro único pelo D. G. nº 110, 2ª Série de 08/05/1968).

Vejamos agora as características desta obra.

A edição do Compêndio de Álgebra de 1958 estava dividida em duas partes: uma para o sexto ano e outra para o sétimo. Os Compêndios editados a seguir já estão separados para os dois anos, um para o sexto e outro para o sétimo.

Na parte dedicada ao sexto ano encontramos um capítulo dedicado à derivada, estruturado da seguinte forma:

Depois de analisados os quatro compêndios de Álgebra, candidatos a livro único do 3º ciclo do ensino liceal, concluímos que nenhum deles, para além deste, apresenta problemas de aplicação das derivadas actualmente designados de problemas de optimização, donde podemos concluir que é exactamente com este manual que se assiste à introdução dos problemas de optimização.

Neste livro é patente uma preocupação, por parte dos autores, em apresentar uma nota introdutória ao conceito para uma melhor compreensão do tema. Além disso, há também o cuidado em introduzir uma nota histórica com o objectivo de permitir aos alunos perceber quais os matemáticos que estudaram o tema bem como as várias etapas pelas quais passou o Cálculo Diferencial.

Os problemas de optimização presentes no Livro Único

Os problemas de optimização estão no quarto ponto do manual, dedicado às aplicações das derivadas. Neste, os autores começam por explicar o sentido da variação de uma função, a partir do sinal da derivada, e a seguir apresentam a aplicação dos teoremas enunciados e por fim dois exemplos de aplicações concretas. Encontramos dois problemas de optimização enunciados como "Exemplos de aplicação concreta do sentido da variação de uma função", seguidos da respectiva resolução. Existem depois, no final do capítulo, mais sete problemas de optimização, na parte dedicada aos exercícios de aplicação, as respectivas respostas surgem no final do enunciado de todos os exercícios.

Identificamos três problemas de Geometria Métrica, dois de Aritmética e quatro de Medida em Contexto Real. Os problemas estão numerados de 1 a 9, tendo em conta a ordem pela qual surgem no manual.

Apresentamos a seguir a lista de problemas de optimização encontrados.

<u>Problemas de Geometria Métrica</u>

1. Dentre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 6 cm, determinar os que tenham área máxima. (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.230)

3. Exprimir a área, A, dum rectângulo, como função de um dos lados, x, supondo o perímetro igual a 20. Desenhar o gráfico da função no intervalo [0, 10]. Determinar, graficamente e analiticamente, o valor de x que torna a área máxima. (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)

6. Um rectângulo está inscrito num semicírculo de raio fixo, r. Exprimir a área, A, do rectângulo, como função da base, x. Determinar o valor de x para o qual a área é máxima. (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)

Problemas de Aritmética

4. A soma de dois números x e y, é uma constante a. Quando é máximo o seu produto ($P = xy$)? (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)

5. O produto de dois números positivos, x e y, é uma constante k. Quando é mínima a sua soma

($S = x + y$)? (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)

Problemas de Medida em Contexto Real

2. Pretende-se construir uma caldeira cilíndrica, fechada, com um dado volume V, de modo que a sua área total seja mínima. Determinar o raio da base, r, e a altura, h, da caldeira em tais condições. (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.231)

7. Uma caixa rectangular, sem tampa, de capacidade v, fixa, tem base quadrada. Exprimir a área total da caixa como função do lado, x, da base. Achar o valor de x para o qual a área é mínima. (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)

8. Numa folha rectangular de zinco, com dimensões de 30 cm por 40 cm, cortam-se, nos quatro cantos, quatro quadrados iguais, dobrando-se em seguida a folha de modo a obter uma caixa aberta na parte superior. Determinar o volume da caixa como função do lado do quadrado que se cortou em cada canto. Qual deve ser a medida do lado do quadrado para que a caixa tenha volume máximo? (Silva e Paulo, 1963, 1968 p.253)

9. Pretende-se construir um gasómetro cilíndrico de volume V. Determinar a relação que deve existir entre o raio da base e a altura para que o custo da chapa metálica empregada na construção da superfície lateral e da base seja mínimo. Supõe-se que se emprega chapa da mesma espessura e da mesma qualidade em toda a superfície. (Silva e Paulo, 1963, 1968, p.253)

Observemos agora as características dos problemas. Para tal iremos fazer uma análise destes, baseada nas quatro fases do modelo de resolução de problemas proposto por Pólya. Segundo Pólya para resolver um problema devemos seguir os passos seguintes:

Passo 1: *Compreensão do Problema:* Identificar a incógnita, os dados e a condicionante; Verificar se é possível satisfazer a condicionante, se esta é suficiente para determinar a incógnita; Traçar uma figura.

Passo 2: *Estabelecimento de um plano:* Encontrar a conexão entre os dados e a incógnita e verificar se é necessário considerar problemas auxiliares.

Passo 3: *Execução do plano:* Verificar cada passo, verificar se cada passo está correcto.

Passo 4: *Verificação/Reflexão:* Examinar a solução obtida, verificar se esse resultado é possível.

Refere o autor que:

> “Em primeiro lugar, temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Em segundo, temos de ver como os diversos elementos estão relacionados, como a incógnita se relaciona com os dados, para ter uma ideia da resolução, para estabelecer um plano. Em terceiro lugar, executamos o nosso plano. Finalmente, em quarto lugar, olhamos para trás, fazemos uma revisão da resolução completa examinando-a a e discutindo-a” (2003, p. 27).

Comecemos, então, a análise das características dos problemas, repartidas pelas quatro fases do modelo de Pólya.

Passo 1: Compreensão do problema:

Examinando as características que se prendem com a primeira fase, verificamos, então, que apenas dois problemas apresentam a respectiva resolução (1 e 2). Nenhum dos enunciados vem acompanhado de gráficos, figuras ou esquemas auxiliares, nem mesmo os problemas que apresentam resolução.

Identificamos, essencialmente, problemas geométricos, três problemas de geometria métrica (1, 3, 6) e quatro problemas de medida em contexto real (2, 7, 8 e 9). Os restantes três problemas são problemas aritméticos.

Verifiquemos agora que tipo de função se pretende optimizar. Nos problemas geométricos, pretende-se optimizar uma área: No problema 1 optimiza-se a área de um triângulo rectângulo dada a medida da hipotenusa, no problema 3 pretende-se optimizar a área de um rectângulo dada a medida do perímetro, no problema 6 também se optimiza a área de um rectângulo, mas neste caso é ligeiramente mais complexo visto que o rectângulo está inscrito numa circunferência, de tal modo que será necessário determinar o seu comprimento e largura em função do raio da circunferência; no problema 6 pretende-se determinar a área máxima de um sector circular, dado o perímetro. Os restantes problemas em que se pretende optimizar uma área são de geometria espacial, sendo que nos problemas 2 e 9 pretende-se optimizar a área de um cilindro dado o volume e no problema 7 pretende-se optimizar a área de um paralelepípedo dado o volume.

O problema 8 tem como objectivo optimizar o volume: optimiza-se o volume de uma caixa dadas as dimensões da folha a utilizar para a construir. Quanto aos problemas aritméticos, verificamos que no problema 4 se pretende optimizar o produto de dois números dado a sua soma e no problema 5 se pretende optimizar a soma de dois números dado o seu produto.

Nenhum problema tem figuras ou esquemas auxiliares. Quanto aos dados fornecidos no enunciado do problema, verificamos que a maioria dos problemas apresenta dados genéricos (2, 4, 5, 6, 7 e 9) e apenas três problemas apresentam dados numéricos (1,3, 8).

Também o enunciado é na maioria dos problemas um enunciado simples, isto é, apenas é colocada a questão de optimização e apenas quatro dos problemas encontrados apresentam um enunciado que orienta/encaminha na resolução do problema (3, 6, 7 e 8).

Observamos que, no problema 3, com base nesta forma de enunciar o problema, o aluno sabe que terá de começar por determinar a área do rectângulo em função de um dos lados e que a seguir irá desenhar o gráfico da função. Estas duas questões tornam-se extremamente úteis uma vez que, quando se coloca a última parte da questão, onde se pretende optimizar a área, o aluno já terá quase todo o trabalho realizado.

Passo 2: Estabelecimento dum plano

Passando agora para às características relativas à segunda fase do modelo de Pólya observamos que, relativamente à função auxiliar que permite relacionar as variáveis, esta na maioria dos problemas, é uma função que surge explicitamente, estando implícita apenas em três problemas (1, 6 e 8).

Comparando os problemas 3 e 8 verificamos que, no problema 3, é fornecido o valor do perímetro e pede-se para optimizar a área. Assim sendo, é fácil para o aluno verificar que a função auxiliar será determinada a partir do valor do perímetro. Em contrapartida, no problema 8, para determinar o volume o aluno terá de determinar o comprimento, a largura e a altura da caixa, uma vez que apenas é fornecida a medida dos lados da folha e o facto de serem retirados quatro quadrados dos cantos, o aluno terá de utilizar a noção de distância para verificar que o comprimento/largura da caixa será a diferença entre o comprimento/largura da folha e o comprimento/largura dos dois cantos, e a altura da caixa será a medida do lado do quadrado a retirar dos cantos.

As noções aplicadas na resolução dos problemas são, para os problemas geométricos, a noção de distância, o Teorema de Pitágoras e as fórmulas de cálculo do perímetro, da área e do volume. A noção de distância é utilizada no problema 8 em que é fornecida a medida dos lados de uma folha rectangular e a partir daí tem de se determinar a medida do comprimento, da largura e da altura da caixa formada depois de cortar quatro quadrados dos cantos com a mesma medida. O Teorema de Pitágoras aplica-se na resolução dos problemas 1, 6 e 8: no primeiro é dada a hipotenusa de um triângulo rectângulo e pretende-se escrever a medida de um dos catetos em função do outro cateto, no segundo problema tem de determinar-se a base e a altura de um rectângulo inscrito num semicírculo a partir do raio e no último pretende-se determinar o raio da base e a altura de um cilindro inscrito numa esfera, dado o raio desta. Relativamente ao problema em que se utiliza a fórmula de cálculo do perímetro (3), é dado o perímetro do rectângulo. Quanto aos três problemas em que se utiliza a fórmula de cálculo do volume (2, 7 e 9), no primeiro e no último é dado o volume de um cilindro para determinar a medida da altura em função da medida do raio da base, no segundo é dado o volume de uma caixa rectangular de base quadrada que tem de ser utilizada para determinar a medida da altura da caixa em função do lado da base. Para os problemas aritméticos usaram-se as noções de soma e de produto. No problema 5 é dado o produto de dois números que será utilizado para determinar um dos números em função do outro e no problema 4 é dada a soma de dois números que será utilizada para determinar um dos valores em função do outro.

Para delinear a estratégia de resolução dos problemas, verificámos que cinco problemas surgem pela primeira vez neste período, dois já tinham surgido em obras históricas (3, 4) e dois foram retirados do enunciado de exames (1, 2).

Passo 3: Execução do plano

Passemos agora às características que se prendem com a terceira fase do modelo de Pólya. Começando pelo tipo de funções utilizadas para optimizar, vimos que apenas surgem três tipos de funções. Na maioria dos problemas surge, para optimizar, uma função polinomial, em três problemas aparece uma função racional (2, 7 e 9) e apenas em dois problemas uma função irracional (1 e 6). Nos problemas em que aparece uma função racional, esta surge porque se utilizou a fórmula de cálculo da área ou do volume para determinar o valor de uma variável em função da outra variável. Quanto aos problemas em que se obtém uma função irracional, esta surge uma vez que se aplicou o Teorema de Pitágoras para determinar o valor de uma das variáveis em função da outra variável.

Quanto ao esquema utilizado para o cálculo de máximos e mínimos, nos problemas que apresentam resolução, notamos que os autores começam por calcular a derivada da função a optimizar, depois calculam os zeros da derivada e, por fim, estudam o sinal da derivada, concluindo a seguir se o ponto é um máximo ou um mínimo. Vejamos a resolução do problema 2 apresentada pelos autores:

Passo 4: Verificação/Reflexão

Para terminar, em relação à fase de Verificação/Reflexão, observamos que o valor pedido é explícito em seis problemas (2, 3, 6, 7, 8 e 9), ou seja, o autor indica claramente o valor que pretende. O valor pedido está implícito nos restantes três problemas (1, 4 e 5), ou seja, nestes o autor não indica explicitamente o valor que pretende.

No problema 1 apenas se pede para determinar os triângulos que tenham área máxima, ficando implícito que o que se pretende é a medida dos catetos, enquanto que, no problema 6 o autor pede explicitamente para se determinar o valor de x.

Conclusão

Com este trabalho concluímos que os programas oficiais de Matemática para o ensino liceal de 1954, (*Decreto nº 39807, do Diário de Governo nº 198 de 7 de Setembro de 1954*) e o livro único - Compêndio de Álgebra para o 3º ciclo do ensino liceal, de Sebastião e Silva e Silva Paulo – aprovado como livro único (D.G. nº 18, II Série, de 22 de Janeiro de 1958), constituem um marco no estudo das aplicações das derivadas, uma vez que é com eles que se assiste à introdução do estudo de problemas de optimização no ensino liceal, em Portugal. De facto, e tal como já salientamos anteriormente, nos outros compêndios de Álgebra para o 3º ciclo do ensino liceal publicados na mesma época, não tratavam das aplicações das derivadas, concretamente a partir de problemas de optimização.

II. *Pretende-se construir uma caldeira cilíndrica, fechada, com um dado volume* V, *de modo que a sua área total seja mínima. Determinar o raio da base,* r, *e a altura,* h, *da caldeira em tais condições.*

A área e o volume da caldeira são, respectivamente:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h, \qquad V = \pi r^2 h.$$

Da segunda fórmula deduz-se $h = V/(\pi r^2)$, o que permite exprimir S como função *só* de r:

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

A derivada de S em *relação a* r será pois

$$S'_r = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}$$

e o seu sinal é portanto o de $4\pi r^3 - 2V$. Como

$$4\pi r^3 - 2V = 4\pi\left(r^3 - \frac{V}{2\pi}\right),$$

será $S'_r > 0$, $S'_r < 0$ ou $S'_r = 0$, conforme for

$$r > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \qquad r < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \qquad \text{ou} \qquad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}};$$

logo a função S de r é decrescente à esquerda e crescente à direita do ponto $r = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$, sendo portanto *mínima* neste ponto. E como então se tem

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r,$$

conclui-se que *a área total da caldeira é mínima quando a altura é igual ao diâmetro da base.*

Importa ainda referir que no Compêndio de Álgebra para o 3º ciclo do ensino liceal, de Sebastião e Silva e Silva Paulo os problemas de optimização são assinalados por problemas em que não surge qualquer esquema, figura ou gráfico como auxiliar da interpretação do problema ou para ajudar na resolução. Não aparecem problemas de Geometria Analítica, de Física ou Economia e também não surgem problemas em que se pede, aos alunos, para elaborar um relatório. A resolução é feita de uma forma bastante explícita, identificando os extremos com base no sinal da derivada.

Desta forma, podemos afirmar que Sebastião e Silva e Silva Paulo foram pioneiros na abordagem dos problemas de optimização nos manuais escolares, dando destaque a um tema que merece uma atenção especial nos manuais escolares do Ensino Secundário hodiernamente.

Bibliografia:

AIRES, A. P. (2006) O conceito de derivada no ensino secundário em Portugal ao longo do século XX: Uma abordagem histórica através dos planos curriculares e manuais escolares. Salamanca (Tese de doutoramento apresentada na Universidade de Salamanca).

BISQUERA, R. (1989) Métodos de investigación educativa. Madrid: CEAC.

CARVALHO, R. (2001) História do Ensino em Portugal. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

GONZÁLEZ ASTUDILLO, M. T. (2002) Sistemas Simbólicos de Representación en la Enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva Histórica. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

PÓLYA, G. (2003) Como resolver problemas. Lisboa: Gradiva.[Tradução do livro How to solve it: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton University Press. (1973)].

PROENÇA, M. C. (1998) O Sistema de Ensino em Portugal (Séculos XIX-XX). Lisboa: Edições Colibri.

RUIZ BERRIO, J. (1997) El método histórico en la investigación histórico-educativa. Em N. De Gabriel e A. Viñao (eds) La investigación histórico-educativa. Barcelona: Ronsel.

SANTIAGO, A. (2008) Evolução histórica dos problemas de optimização e o seu tratamento no Ensino Secundário português nos séculos XX e XXI. Salamanca (Tese de doutoramento apresentada na Universidade de Salamanca).

SCHUBRING, G. (1987) On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Autor. For the learning of mathematics 7, 3 p. 41-51.

SCHUBRING, G. (1989) Categorías para la investigación en la historia social de la enseñanza de la matemática y algunos modelos característicos. Traduzido por A. Orellana e L. Rico.

SIERRA, M (Coord.) (2003) Evolución de la enseñanza del Análisis Matemático y del Álgebra: de los libros de texto a las nuevas tecnologías. Salamanca: Dpto Didáctica da Matemática y CE (Memoria Inédita).

SILVA, J. S. e PAULO, S. (1958) Compêndio de Álgebra, 6º e 7º Ano, 3ºCiclo -Ensino Liceal, Livraria Rodrigues.

SILVA, J. S. e PAULO, S. (1960) Compêndio de Álgebra, 6º e 7º Ano, 3ºCiclo -Ensino Liceal, Livraria Rodrigues.

SILVA, J. S. e PAULO, S. (1963) Compêndio de Álgebra, 6º e 7º Ano, 3ºCiclo -Ensino Liceal, Lisboa: Bertrand (Irmãos).

SILVA, J. S. e PAULO, S. (1968) Compêndio de Álgebra, 6º e 7º Ano, 3ºCiclo -Ensino Liceal, Braga: Livraria Cruz.