Cogniciones petrificadas: el dilema de $\sqrt{x^2}$ [1]

Bernardo Gómez Alfonso, *DDM, Universidad de Valencia*, Bernardo.gomez@uv.es

Palabras clave: Historia y educación matemática, la raíz cuadrada y el signo radical, cogniciones petrificadas, problemas matemáticos y didácticos.

Resumen

Uno de los aspectos que hacen difícil la transición de la aritmética al álgebra es el uso diferente que se hace de los signos de las operaciones. En el caso del signo radical este uso diferente produce un dilema que suele pasar desapercibido. En este trabajo, que se sitúa en la línea de investigación histórica en educación matemática, se identifican las cogniciones petrificadas que sustentan este dilema. Finalmente, se discuten los problemas matemático y didáctico que se derivan de estas cogniciones.

INTRODUCCIÓN

Sobre la observación y análisis de los procesos de aprendizaje

Hace 30 años, Freudenthal (1981) formuló los problemas principales en la educación matemática en forma de preguntas. La primera fue: **"**¿Por qué Juanito o María no sabe matemáticas? o ¿por qué hay tantos niños que no saben las matemáticas se espera que sepan?" Las siguientes preguntas fueron: "¿Cómo deberían aprender los niños? o ¿cómo aprende la gente? y, ¿qué es digno de ser enseñando? o ¿qué debiera ser enseñado". Para él, una manera de responder podría ser: "observando procesos de aprendizaje, analizándolos y documentado paradigmas".

La observación de los procesos de aprendizaje se puede hacer mirando a los estudiantes, a los profesores, o a lo que Freudenthal llamó el más grande de los procesos de aprendizaje, el de la humanidad, que también es un aprendiz (op. cit. p, 137). Para observar los procesos de aprendizaje de la humanidad es preciso regresar a la historia, y para ello los únicos documentos disponibles son los textos históricos. Una manera de hacerlo podría ser analizándolos "como cogniciones, de la misma manera que analizamos las producciones de los estudiantes, que de hecho constituyen textos matemáticos" (Gallardo, 2008).

El análisis de textos de épocas pasadas permite identificar lo que Puig (2006) denomina "cogniciones petrificadas": "Petrificadas porque están ahí, en el texto que nos ha legado la historia, como en los monumentos de piedra de los que no cabe esperar que digan más de lo que ya está en ellos. Cogniciones, porque lo que queremos leer en esos textos no es el despliegue de un saber, las matemáticas, sino el producto de las cogniciones (matemáticas) de quien se declara como su autor" (Op., cit., p.113).

[1] Esta aportación se sustenta en un proyecto de investigación financiado por el MEC. Ref.: EDU2009-10599 (subprograma EDUC).

MARCO TEÓRICO

La investigación precedente ha puesto de manifiesto que son varios los aspectos que hacen difícil para los estudiantes la transición de la aritmética al álgebra. Entre ellos, destacan los tres siguientes: la manera diferente en que los mismos símbolos se usan en aritmética y álgebra, el cambio de significado de símbolos clave, como el signo igual; y la aceptación de expresiones sin clausura como representación, no solo de las operaciones, sino también del resultado de las operaciones (Kieran, 2006).

En relación con el signo radical, estos aspectos determinan una naturaleza dual, polisémica y ambigua[2], que es fuente de conflictos y malentendidos fuertemente arraigados y que pasan desapercibidos en los manuales de enseñanza.

Ante esta situación cabe plantearse dos preguntas: ¿Está clara la naturaleza dual, polisémica y ambigua del signo de la raíz cuadrada? y ¿se es consciente de los problemas matemáticos y didácticos inherentes a esa naturaleza?

Para responder a estas dos preguntas se ha hecho un estudio exploratorio, cualitativo y descriptivo, que se sitúa en la línea de investigación histórica en educación matemática. Este estudio ha permitido identificar las cogniciones petrificadas del signo radical que sustentan una tradición de enseñanza que favorece la concepción dual, polisémica y ambigua de este signo.

Rastros históricos del uso dual de los signos de las operaciones

En los textos del álgebra sincopada, para expresar las operaciones calculables, como cuando se trata de sumar números determinados, se usaban palabras de la lengua vernácula: "con" y "de". Pero cuando no eran calculables, como cuando se trata de sumar o restar cantidades algebraicas no homogéneas, se usaban símbolos como "p" y "m".

Un ejemplo de este uso, se encuentra en el siguiente texto (imagen I) tomado de "La Summa" de Pacioli (di Burgo, 1494).

Por esta época, en los textos de los algebristas alemanes se usan con el mismo fin los signos "+" y "–", en vez de "p" y "m", y con el mismo fin, el de expresar el resultado de operaciones no calculables. Así aparece, por ejemplo, en el siguiente texto del alemán Marc Aurel (1552) (Imagen 2), que es el primer libro de álgebra impreso en España

[2] Dualidad: Existencia de dos caracteres o fenómenos distintos en una misma persona o en un mismo estado de cosas.
Ambiguo: Que puede entenderse de varios modos o admitir distintas interpretaciones y dar, por consiguiente, motivo a dudas, incertidumbre o confusión.
Polisemia: Pluralidad de significados de una palabra o de cualquier signo lingüístico (RAE).

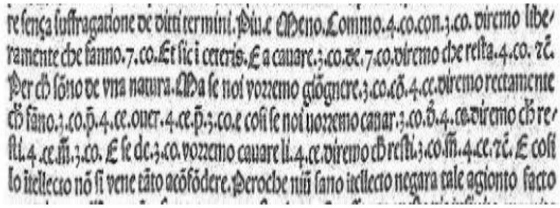
<table>
<tr>
<td>4co con 3co diremos que hacen 7co, y … 3co de 7co diremos que restan 4co, porqué son de la misma naturaleza. Pero si queremos conocer 3co con 4ce, diremos que son 3co p 4ce o 4ce p 3co …</td>
<td>
re senza suffragatione de diti termini. Piu e Meno. Commo. 4.co.con.3.co. diremo libe/ramente che fanno.7.co. Et sic i ceteris. E a cavare.3.co.de.7.co.diremo che resta.4.co. &c. Per che sono de una natura. Ma se noi vorremo giongnere.3.co.cō.4.ce.diremo rectamente che sāno.3.co.p.4.ce.over.4.ce.p.3.co.e cosi se noi vorremo cavar.3.co.d.4.ce.diremo che re/sti.4.ce.m.3.co. E se de.3.co.vorremo cavare li.4.ce.diremo che resti.3.co.m.4.ce.&c. E cosi lo itellecto nō si vene tāto acōfodere. Perochè niū sano itellecto negara tale agionto facto</td>
</tr>
</table>

Imagen 1 (op. cit. Distinctio octava. Tractatus Primus, fo. 112)

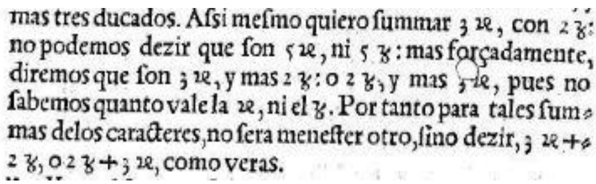
<table>
<tr>
<td>Así mesmo quiero sumar 3x con 2y no podemos decir que son 5x ni 5y: mas forzadamente diremos que son 3x, y mas 2y: o 2y, y mas 3x, pues no sabemos quanto vale la x ni el y. Por tanto para tales sumas de los caracteres no será menester otor sino decir 3x+2y o 2y+3x, como veras</td>
<td>
mas tres ducados. Assi mesmo quiero summar 3 x, con 2 y: no podemos dezir que son 5 x, ni 5 y: mas forçadamente, diremos que son 3 x, y mas 2 y: o 2 y, y mas 3 x, pues no sabemos quanto vale la x, ni el y. Por tanto para tales summas delos caracteres, no sera menester otro, sino dezir, 3 x + 2 y, o 2 y + 3 x, como veras.</td>
</tr>
</table>

Imagen 2 (op. cit. fo 71)

En el mismo texto, Aurel también usa el signo radical[3] (Imagen 3). Lo más interesante para nuestro propósito es que lo hace de un modo dual, ya que lo usa para denominar de modo abreviado la operación raíz cuadrada de un número (imagen 3)

[3] Recordemos que la introducción de este signo se atribuye a Cristofol Rudolf (Die Coss, 1525)

<table>
<tr>
<td>Declaración de algunos caracteres, que para las rayces serán necesarios

Para tratar de tales números, y otros semejantes, sería cosa larga, y no galana, poner los tales nombres a la larga: mas deseando huyr esto y evitar toda prolixidad, procure poner aquí algunos que para en esta arte eran necesarios. Y son √ (…)

De los quales, el primero significa y quiere decir rayz cuadrada (…).

Exemplo, √4 quiere decir rayz cuadrada de 4, que es 2 …</td>
<td>Declaracion de algunos characteres, que para las rayzes ſeran neceſſarios.

Para tratar de tales numeros, y otros ſemejantes, ſeria coſa larga, y no galana, poner los tales nõbres a la larga: mas deſſeando huyr eſto, y euitar toda prolixidad, procure poner aqui algunos, que para en eſta arte eran neceſſarios. Y ſon √. √√. √√√ v. √√ v. √√√ v. +. −. Delos quales el p°, ſignifica, y quiere dezir rayz quadrada: el 2°, rayz quadrada de rayz quadrada, o rayz de rayz: el 3°, rayz cubica: el 4°, rayz vniuerſal: el 5°, rayz de rayz vniuerſal: el 6°, rayz cubica vniuerſal: el 7°, + mas: y el 8°, − menos. Exẽplo, √4, quiere dezir rayz quadrada de 4, que es 2. √5, quiere dezir rayz de 5. &c. √√20 + √√√7, quiere dezir, rayz de rayz de 20, y mas rayz cubica de 7. √v. 8 − √3, quiere dezir, rayz quadrada de todo eſto: q̃ es 8 − √3. Digo rayz vniuerſal de 8 menos rayz de 3, q̃ es √ del reſiduo &c. Eſto me ha pareſcido bueno, tome cada vno los q̃ querra, o eſcriualos a la larga, todo a ſu plazer: que por eſto no pierde ni gana la ſciencia, o arte.</td>
</tr>
</table>

Imagen 3 (Op. cit. Libro VII, capítulo III, fo 43)

y también para expresar los números irracionales (imagen 4).

<table>
<tr>
<td>Otra manera de sumar irracionales

De otra manera podrás sumar dos números o rayzes irracionales, pues así como así vendrá binomio

Exemplo. Quiero sumar √6 con √2 diras simplemente que viene √6 + √2…</td>
<td>Otra manera de ſumar irracionales.

De otra menera podras ſumar dos numeros, o rayzes irracionales, pues aſsi como aſsi verna binomiuo.
Exemplo. Quiero ſumar √6 con √2: diras ſimplemente, que viene √7 + √2. Eſto ninguno podra negar: porque es</td>
</tr>
</table>

Imagen 4 (op. cit. Libro VII, capítulo III, fo 44)

Sobre la dualidad proceso/objeto

El doble uso del signo radical que hace Aurel, para expresar la operación raíz cuadrada y para expresar los objetos matemáticos denominados números irracionales, apunta a una dualidad inherente a los signos de las operaciones, que puede ser interpretada a la luz de diferentes teorías: proceso/producto (Kaput, 1979; Davis, 1975), proceso/concepto (Gray y Tall, 1994), o proceso/objeto (Sfard, 1991).

Bajo estas teorías, lo que se da a entender es que cuando las operaciones no son calculables, como cuando se opera en álgebra con letras y no es posible cerrar la operación, los signos de las operaciones se usan para expresar el resultado de esas operaciones; es decir, para representar objetos matemáticos. Así ocurre, por ejemplo, cuando se escribe que la suma de a y b es $a+b$.

Por contra, cuando las operaciones son calculables, como cuando se trata de operar con números determinados para los cuales hay un número que da respuesta a la operación, ya no se necesitan signos para representar los resultados.

En cierto modo, esta ausencia de necesidad de los signos cuando las operaciones son calculables, explica que se retrasara su uso generalizado en la Aritmética hasta el siglo XIX (Cajori, 1993, p. 235), y que cuando la Aritmética asumió los signos de las operaciones lo hizo en un sentido diferente al del álgebra, como es el de abreviar la manera de indicar la operación; es decir, para representar pocesos matemáticos. Así ocurre, por ejemplo, en 2+4.

En la enseñanza, el recorrido histórico se invierte, los signos de las operaciones se enseñan primero en la Aritmética, como procesos; y cuando los estudiantes ya están familiarizados con ellos se extienden al Álgebra, como objetos. De esta manera la razón de ser algebraica queda en segundo plano y se ve oscurecida o eclipsada por la razón aritmética sobrevenida.

En relación con esta inversión, Sfard (1991), dice que el tratamiento de una noción matemática como objeto conduce a un tipo de concepción estructural, mientras que interpretar una noción como proceso implica una concepción operacional. Cuando una persona adquiere una nueva noción matemática, la concepción operacional es normalmente la primera que desarrolla, mientras que la concepción estructural sigue un largo y difícil camino que necesita de intervención externa, ya sea de un profesor o de un libro de texto (op. cit., p.17), para ayudar a dar el salto, el "cambio en la perspectiva, por medio del cual un proceso se "reifica"como objeto (Kieran, 2007, p. 723).

COGNICIONES PETRIFICADAS DEL SIGNO RADICAL

En el caso del signo radical, la dualidad proceso/objeto, operacional/estructural, va acompañada de un fenómeno de polisemia y ambigüedad que se puede rastrear a través de las cogniciones petrificadas de los matemáticos más influyentes.

Euler

En un texto histórico tan influyente como el "álgebra" de Euler, publicada por primera vez en 1770 bajo el título de *Vollstandige Anleitung zur Algebra* [*Instrucción completa de Algebra*], se destila una concepción del signo radical que es dual, polisémica y ambigua (imagen 5):

la raíz cuadrada de cualquier número tiene siempre dos valores, uno positivo y el otro negativo; esto es que $\sqrt{4}$, por ejemplo, es igualmente 2 y -2, y en general, se puede adoptar tanto $-\sqrt{a}$ como $+\sqrt{a}$ para la raíz cuadrada de a.	150. Da nun aber nach der Anmerkung (122) die Quadratwurzel jeder Zahl immer einen doppelten Werth hat, nämlich so wohl negativ als auch positiv genommen werden kann, indem z. B. $\sqrt{4}$ so wohl $+2$ als auch -2 ist, und überhaupt für die Quadratwurzel aus a so wohl $+\sqrt{a}$, als auch $-\sqrt{a}$ geschrieben werden kann, so gilt dies auch bei den unmöglichen Zahlen; und die Quadratwurzel aus $-a$ ist so wohl $+\sqrt{-a}$, als auch $-\sqrt{-a}$, wobei man die Zeichen + und −, welche vor das Zeichen $\sqrt{}$ gesetzt werden, von dem Zeichen, das hinter dem $\sqrt{}$ Zeichen steht, wohl unterscheiden muß.

Imagen 5 Euler (1770, vol. I, p.62)

En este texto de Euler, cuando el signo radical se aplica a un número concreto, 4, se asocia a un conjunto de dos valores numéricos: +2 y -2; mientras que cuando se aplica a una letra, *a*, se asocia a un valor absoluto: $\sqrt{a}$, susceptible del doble signo + y -. En el primer caso, el sentido de uso del signo radical es el de proceso ya que indica la operación raíz cuadrada de 4; mientras que en el segundo caso, el sentido de uso es el de objeto, ya que expresa el valor absoluto del resultado de la operación raíz cuadrada de *a*. Esta dualidad, hace que se pueda decir que el signo radical es polisémico ya que representa cosas diferentes: operación o resultado, según el contexto, que en este caso es numérico o literal.

Pero, además, el signo radical cuando se aplica a 4, es un signo de ambigüedad, ya que expresa una operación que no tiene un resultado, sino dos: $\sqrt{4} = \pm 2$ [4].

En definitiva, las cogniciones petrificadas de Euler plantean que el signo radical es dual, polisémico y ambiguo.

[4] El término polisemia ha sido usado por Mamolo (2010), para referirse a las ambigüedades que están conectadas a definiciones que dependen del contexto. Por su parte, Filloy (1999), lo ha usado en lo que denomina polisemia de la x. Él habla de la "polisemia de la x" cuando los estudiantes, a los que se les ha pedido que inventen un problema para las ecuaciones $x + x/4 = 6 + x/4$ ó $x+5= x+x$, interpretan que la incógnita no representa lo mismo en el contexto del problema, y le asignan valores distintos. La primera x es una incógnita y la segunda es un número generalizado (puede admitir más de un valor).

Peacock

En el siglo XIX, cuando se están desarrollando las bases de las matemáticas actuales, uno de los más influyentes matemáticos, Peacock (1791-1858), hace mención a la ambigüedad del valor de la raíz cuadrada en estos términos (Imagen 6): “Al pasar del cuadrado a la raíz cuadrada siempre encontramos dos raíces, que solo difieren en su signo (…). Ya hemos tenido ocasión de observar estas ambiguas raíces cuadradas en el Algebra Aritmética” (Peacock, 1845, vol. II, p. 67).

Capítulo XVII	CHAPTER XVII.
De la extracción de la raíz cuadrada en el Álgebra Simbólica: origen de raíces ambiguas, y del signo $\overline{-1}$	ON THE EXTRACTION OF SQUARE ROOTS IN SYMBOLICAL ALGEBRA: ORIGIN OF AMBIGUOUS ROOTS, AND OF THE SIGN $\sqrt{-1}$.
Se sigue de la regla de los signos que en el Álgebra Simbólica, hay siempre dos raíces, que difieren una de otra solo en su signo, correspondientes a la misma raíz (…)	645. It will follow, from the Rule of Signs, (Art. 569.) that, in Symbolical Algebra, there are always two roots, differing from each other in their sign only, which correspond to the same square: thus a^2 may equally arise from the product $a \times a$ and $-a \times -a$: $(a+b)^2$ may equally arise from the product $(a+b)\times(a+b)$, and $-(a+b)\times-(a+b)$: $(a-b)^2$ may equally arise from the product $(a-b)\times(a-b)$ and $(b-a)\times(b-a)$,* and similarly for all other squares. It follows, therefore, that in passing from the square to the square root, we shall always find *two roots*, which only differ from each other in their sign; but it is the *positive* square root alone which is recognized in Arithmetical Algebra, and which may therefore be called the *arithmetical* root. There are always two roots, with different signs, which produce the same square. Arithmetical square root.
Ya hemos tenido ocasión de encontrar estas ambiguas raíces cuadradas en el Álgebra Aritmética	646. We have already had occasion to notice these ambiguous square roots in Arithmetical Algebra (Art. 383) in deducing the square roots of squares, such as $x^2-2ax+a^2$ and Occurrence of ambiguous square roots in Arithmeti-
p. 67	p. 67

Imagen 6 (Op., cit., p. 67)

Previamente ha establecido que a½ y $\overline{a}$ tienen idéntico significado, y que: $(a^2)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a = \overline{a^2}$. Llegado a este punto, en una nota a pie de página advierte que la raíz cuadrada de *a* es tanto –*a* como +*a* (op. cit. p. 62 y 64). Este último párrafo es enigmático, porque siembra la duda sobre si $\overline{a^2} = a$ ó $\pm a$ (Imagen 7)

¿Cuál es el significado de $a^{1/2}$? El producto de $a^{1/2}\times a^{1/2}=a^{1/2+1/2} = a^1=a$, por el “principio de los índices”: y asimismo aparece que $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$. donde $\sqrt{a}$ denota la raíz cuadrada de a: concluimos, por tanto, que $a^{1/2}$ es idéntico en su significado que $\sqrt{a}$, puesto que cuando se multiplica por sí mismo produce el mismo resultado- p. 62.	Interpretation of $a^{\frac{1}{2}}$. 636. What is the meaning of $a^{\frac{1}{2}}$? The product $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a$, (Art. 42) by the “principle of indices” (Art. 635): and it likewise appears that $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$, where $\sqrt{a}$ denotes the square root of a (Art. 223): we conclude, therefore, that $a^{\frac{1}{2}}$ is identical in meaning with $\sqrt{a}$, inasmuch as when multiplied into itself, it produces the same result*. p. 62
Se sigue, por tanto, que $(a^2)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a = \overline{a^2}$ * p.64	It follows, therefore, that $(a^2)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a = \sqrt{a^2}$ *. $(a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. $(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$. $(a^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$. p. 64
La raíz cuadrada de a^2 puede ser tanto $-a$ como $+a$ p. 64	* The square root of a^2 may be $-a$ as well as $+a$. p. 64

Imagen 7 (Op., cit., p. 62 y 64)

Más adelante la duda queda despejada, ya que Peacock escribe explícitamente que $\overline{b^2} = \pm b$ (Imagen 8).

De nuevo, ya que la raíz cuadrada de un producto es igual al producto de as raíces cuadradas de los factores, se sigue que: $\sqrt{b^2} = \sqrt{1 \times b^2} = \sqrt{1} \times b = \pm 1 \times b = \pm b$	**Again, since the square root of a product is equal to the product of the square roots of its factors, it follows that** $\sqrt{b^2} = \sqrt{1 \times b^2} = \sqrt{1} \times b = \pm 1 \times b = \pm b,$

Imagen 8 (Op., cit., p. 72).

No obstante, no dice nada acerca de la incoherencia que supone aceptar que: $\sqrt{b^2} = \pm b$, y al mismo tiempo que $(a^2)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = \sqrt{a^2}$=a.

Es más, al trasladar la ambigüedad de la raíz cuadrada a la resolución de las ecuaciones cuadráticas no respeta la práctica habitual, ya que de x^2=q deduce $x = \sqrt{q} = \pm a$, y no $x = \pm \sqrt{q}$.

En efecto, después de establecer la equivalencia entre el proceso de extraer la raíz cuadrada de un número q y la solución de la ecuación cuadrática $x^2=q$, Peacock dice: "el valor de x determinado por esta ecuación es √q o la raíz cuadrada de q, y esta raíz, como ya hemos visto, posee dos valores que difieren solo en su signo, así, si a representa una raíz, –a representa la otra" (imagen 9).

En definitiva, las cogniciones petrificadas de Peacock plantean que hay ambigüedad en la operación raíz cuadrada y en el signo: $\sqrt{b^2} = \pm b$; y además, que en la resolución de la ecuación cuadrática el doble signo ± no afecta al signo radical: x^2=q → $x = \sqrt{q} = \pm a$.

Lacroix

Lacroix (1831, p. 123) también dice que la raíz cuadrada es ambigua, pero adopta una posición contraria a Peacock en cuanto al doble signo ± en la solución de la ecuación cuadrática x^2=q, ya que para él $x = \pm \sqrt{q}$; además, también difiere en el valor de $\sqrt{x^2} que\ es\ x\ y\ no\ \pm x$ (Imagen 10).

Capítulo XIX De la teoría general y solución de las ecuación cuadrática El proceso de extracción de la raíz cuadrada de un número q, es equivalente a la solución de la ecuación binomial cuadrática $x^2=q$, o $x^2-q=0$ El valor de x determinado por esta ecuación es √q o la raíz cuadrada de q, y esta raíz, como ya hemos visto, posee dos valores que difieren solo en su signo, así, si a representa una raíz, –a representa la otra	CHAPTER XIX. ON THE GENERAL THEORY AND SOLUTION OF QUADRATIC EQUATIONS. 656. THE process of extracting the square root of a number or expression q, is equivalent to the solution of the binomial quadratic equation (Arts. 246 and 377) *Binomial quadratic equations.* $x^2=q$, or $x^2-q=0$. For the value of x, determined from this equation is $\sqrt{q}$ or the square root of q: and this root, as we have already shewn, (Art. 645) possesses two values which differ from each other in their sign only: thus, if a represents one root, $-a$ represents the other: and if q, whose root is required, is negative, then $a\sqrt{-1}$ represents one of its two roots, and $-a\sqrt{-1}$ the other. *Their double roots.* Thus, in the equation *Examples.* $x^2-4=0$, the roots are 2 and -2: and in the equation $x^2+9=0$, the roots are $3\sqrt{-1}$, and $-3\sqrt{-1}$, which are both of them *impossible* or *imaginary* *. (Art. 652.)

Imagen 9 (Op., cit.,, p. 77)

Entonces, se pregunta "¿por qué x, que es la raíz cuadrada de x^2, no está afectado del doble signo?" Es decir, por qué al resolver $x^2=b$, y tomar la raíz cuadrada a los dos términos se escribe $\sqrt{x^2}=x$, y no $\sqrt{x^2}=\pm x$

Entonces dice que la respuesta que propiamente debería darse: $\pm x = \pm\sqrt{b}$, no aporta ninguna solución nueva a la que usualmente se da: $x=\pm\sqrt{b}$, porque en el primer caso hay dos soluciones que son iguales a las otras dos (imagen 11)

Aunque esta explicación es discutible, ya que dota la ecuación de segundo grado de cuatro raíces, aunque sean iguales dos a dos, ha sido aceptada por autores posteriores, como por ejemplo Cortazar (1852, p142 y 143) que la recoge literalmente (imagen 12)

En relación con los signos, que pueden afectar a las cantidades, lo que queda después de sacar la raíz cuadrada es una ambigüedad, como consecuencia de lo cual toda ecuación de segundo grado admite dos soluciones. (…) De esto se deduce que como regla general se debe considerar que el doble signo ± afecta a la raíz cuadrada de cualquier cantidad cualquiera que sea.	which approaches the truth very nearly. But in regard to the signs, with which the quantities may be affected, there remains, after the square root is extracted, an ambiguity, in consequence of which every equation of the second degree admits of two solutions, while those of the first degree admit of only one. Thus in the general equation $x^2 = 25$, the value of x, being the quantity, which, raised to its square, will produce 25, may, if we consider the quantities algebraically, be affected either with the sign + or −; for whether we take + 5, or − 5, for this value, we have for the square $+5 \times +5 = +25$, or $-5 \times -5 = +25$; we may therefore take $x = +5$, or $x = -5$. For the same reason, from the general equation $x^2 = \frac{aq}{p}$, we have $x = +\sqrt{\frac{aq}{p}}$, or $x = -\sqrt{\frac{aq}{p}}$. Both these expressions are comprehended in the following; $x = \pm\sqrt{\frac{aq}{p}}$, in which the double sign ± shows, that the numerical value of $\sqrt{\frac{aq}{p}}$ may be affected with the sign + or —. From what has been said, we deduce the general rule, *that the double sign ± is to be considered as affecting the square root of every quantity whatever.*

Imagen 10 (Lacroix, 1831, p. 122)

"si al resolver la ecuación $x^2=b$ escribimos $\pm x = \pm\sqrt{b}$, al arreglar esas expresiones de todas las formas posibles, a saber: $+x = +\sqrt{b}$, $-x = -\sqrt{b}$ $+x = -\sqrt{b}$, $-x = +\sqrt{b}$ no obtenemos ningún nuevo resultado que transponiendo todos los	*Equations of the Second Degree with one Unknown Quantity.* 123 that the letter x, having been taken without a sign, that is, with the sign +, as the representative of the unknown quantity, it is its value when in this state, which is the subject of inquiry; and that, when we seek a number x, the square of which is b, for example, there can be only two possible solutions; $x = +\sqrt{b}$, $x = -\sqrt{b}$. Again, if in resolving the equation $x^2 = b$, we write $\pm x = \pm\sqrt{b}$, and arrange these expressions in all the different ways, of which they are capable, namely, $+x = +\sqrt{b}$, $-x = -\sqrt{b}$, $+x = -\sqrt{b}$, $-x = +\sqrt{b}$, we come to no new result, since by transposing all the terms of the equations $-x = -\sqrt{b}$, $-x = +\sqrt{b}$, or which is the same thing, by changing all the signs (57), these equations become identical with the first.

términos de las ecuaciones –x=-√b , -x = +√b, o lo que es lo mismo, cambiando todos los signos, esas ecuaciones se vuelven idénticas a las primeras”.	

Imagen 11 (op. cit. p. 123)

El dilema

Las cogniciones petrificadas en relación con la raíz cuadrada y el signo radical que se acaban de exponer ponen de manifiesto un dilema, representado por las dos posiciones contrarias de Peacock y Lacroix, ya que plantea una disyuntiva sobre el valor de $\sqrt{x^2}$.

a) $\sqrt{x^2} = \pm x$

b) $\sqrt{x^2} = x$

UN PROBLEMA MATEMÁTICO Y UN PROBLEMA DIDÁCTICO

Esta disyuntiva tiene consecuencias ya que plantea un problema matemático y un problema didáctico. El problema matemático es que desentrañar el dilema acarrea complejidades y sutilezas que tienen que ver con los requisitos formales de la definición de exponente racional y con la definición de las operaciones en R y sus inversas (ver Even & Tirosh, 1995; Gómez y Buhlea, 2009; Gómez y Necula, 2011; Gómez, 2011); mientras que el problema didáctico, que es el que interesa aquí, es que es una fuente de incoherencias e inconsistencias que suelen pasar desapercibidas en la enseñanza práctica..

El problema didáctico: Incoherencias e inconsistencias

La mayoría de los estudiantes (Roach, Gibson y Weber, 2004), profesores, futuros profesores (Gómez y Buhlea, 2009, Gómez y Necula, 2011; Gómez, 2011), y autores de libros de texto (Anaya, 2004, SM, 2002, Santillana, 1999; Oxford, 2003), creen que $\sqrt{4} = \pm 2$, y también creen que $\sqrt{x^2} = x$. Lo sorprendente es que no se dan cuenta que esto es incoherente, porque ambas cosas no pueden ser ciertas a la vez, ya que para $x=4=2^2$ se tendría que $2 = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = \pm 2$.

Pero además, cada una de estas creencias, por si solas, llevan a nuevas incoherencias. Por ejemplo,

1. Si $\sqrt{x^2} = x$, entonces $+2 = \sqrt{(+2)^2} = \sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = -2$

2. Si $\sqrt{4} = \pm 2$, entonces:

$$\sqrt{4} + \sqrt{4} = (\pm 2) + (\pm 2) = +2, 0, -2$$

Y

$$\sqrt{4} - \sqrt{4} = (\pm 2) - (\pm 2) = +2, 0, -2 \text{ ,}$$

Y de aquí

$$\sqrt{4} + \sqrt{4} = \sqrt{4} - \sqrt{4}$$

para resolver la ecuación $ax^2=b$, dividiremos por a, y será $x^2=b/a$. Extrayendo ahora la raíz cuadrada de ambos miembros, será

$$\pm x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$$

O bien

$$x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$$

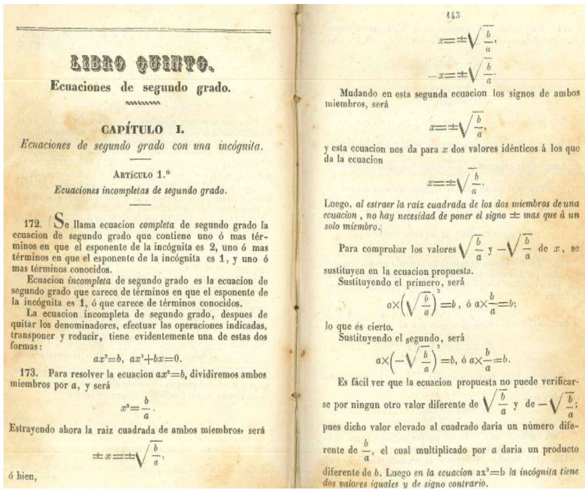
$$-x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Mudando en esta segunda ecuación los signos de ambos miembros será

$$x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Y esta ecuación nos da para x dos valores idénticos a los que da la ecuación

$$x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$$



LIBRO QUINTO.

Ecuaciones de segundo grado.

CAPÍTULO I.

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

ARTÍCULO 1.°

Ecuaciones incompletas de segundo grado.

172. Se llama ecuacion *completa* de segundo grado la ecuacion de segundo grado que contiene uno ó mas términos en que el esponente de la incógnita es 2, uno ó mas términos en que el esponente de la incógnita es 1, y uno ó mas términos conocidos.

Ecuacion *incompleta* de segundo grado es la ecuacion de segundo grado que carece de términos en que el esponente de la incógnita es 1, ó que carece de términos conocidos.

La ecuacion incompleta de segundo grado, despues de quitar los denominadores, efectuar las operaciones indicadas, transponer y reducir, tiene evidentemente una de estas dos formas:

$$ax^2=b,\ ax^2+bx=0.$$

173. Para resolver la ecuacion $ax^2=b$, dividiremos ambos miembros por a, y será

$$x^2=\frac{b}{a}.$$

Estrayendo ahora la raiz cuadrada de ambos miembros, será

$$\pm x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}},$$

ó bien,

143

$$x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}},$$

$$-x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Mudando en esta segunda ecuacion los signos de ambos miembros, será

$$x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}},$$

y esta ecuacion nos da para x dos valores idénticos á los que da la ecuacion

$$x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Luego, *al estraer la raiz cuadrada de los dos miembros de una ecuacion, no hay necesidad de poner el signo ± mas que á un solo miembro.*

Para comprobar los valores $\sqrt{\frac{b}{a}}$ y $-\sqrt{\frac{b}{a}}$ de x, se sustituyen en la ecuacion propuesta.

Sustituyendo el primero, será

$$a\times\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=b,\ \text{ó}\ a\times\frac{b}{a}=b;$$

lo que és cierto.

Sustituyendo el segundo, será

$$a\times\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=b,\ \text{ó}\ a\times\frac{b}{a}=b.$$

Es fácil ver que la ecuacion propuesta no puede verificarse por ningun otro valor diferente de $\sqrt{\frac{b}{a}}$ y de $-\sqrt{\frac{b}{a}}$; pues dicho valor elevado al cuadrado daria un número diferente de $\frac{b}{a}$, el cual multiplicado por a daria un producto diferente de b. Luego *en la ecuacion* $ax^2=b$ *la incógnita tiene dos valores iguales y de signo contrario.*

Luego, al extraer la raíz cuadrada de los dos miembros de una ecuación, no hay necesidad de poner el signo ± mas que a un solo miembro.	

Imagen 12 (Cortázar, 1852, p. 142 y 143)

Estas creencias también están en el origen de algunas inconsistencias. Por ejemplo, la mayoría de los estudiantes y profesores saben que la razón que justifica la regla para “pasar al otro lado de la igualdad”, en el proceso de despejar la incógnita, es que se aplica la misma operación a ambos lados del signo igual, como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$x - a = 0 \leftrightarrow x - a + a = 0 + a \leftrightarrow x = +a.$$

Esa justificación también vale para la ecuación cuadrática $x^2=q$. Sin embargo, cuando despejan la incógnita en esa misma ecuación cuadrática creen que el doble signo solo hay que ponerlo a uno de los dos miembros de la igualdad, de modo que escriben $x= \pm\sqrt{q}$ y no $\pm\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{q}$, que sería más consistencia con su forma de pensar.

Otra inconsistencia, fácilmente observable, es que creen que $\sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3}$, porque son radicales equivalentes, y al mismo tiempo creen que como el índice del radical a la izquierda del signo igual es un número par tiene dos soluciones (una opuesta a la otra); mientras que como el índice del radical a la derecha del signo igual es impar solo tiene una solución. ¿Entonces?

Conclusiones

La naturaleza dual, polisémica y ambigua de la raíz cuadrada y del signo radical se sustenta en cogniciones petrificadas que están fuertemente arraigadas. Estas cogniciones plantean un dilema que se manifiesta en un problema matemático y otro didáctico.

Los matemáticos[5] han decidido resolver el problema desde el punto de vista formal asignando a la expresión $\sqrt{x}$, $x\geq 0$, un solo valor, una de las dos raíces de x, la raíz positiva o raíz principal. Con esta restricción lo correcto es escribir

5 Cada número real no negativo a tiene una raíz cuadrada no negativa única. Nota: Si $a\geq 0$, su raíz cuadrada no negativa se indicará por $a1/2$ o por $\sqrt{a}$ (Apostol, 1990. p. 36).

El símbolo $\sqrt{z}$ para $z \geq 0$ denota aquél número no negativo cuyo cuadrado es z (Courant, R. y John, F., 1979, p. 38).

Si A es un número real positivo, la única raíz positiva de $x^n - A = 0$ se escribe $x = \sqrt[n]{A} = A^{1/n}$ (Lentin, A., Rivaud, J., 1969, p. 164).

$$\overline{4} = 2\ y\ no \quad \overline{4} = \pm 2$$

Igualmente

$$\overline{x^2} = \ x\ \ y\ no \quad \overline{x^2} = x$$

Pero los matemáticos no suelen dar las explicaciones del porqué de esta restricción, por lo que aunque han resuelto el problema matemático no se puede decir lo mismo del problema didáctico, ya que al parecer la enseñanza está tanto o más influida por las cogniciones petrificas que por las definiciones formales de los desarrollos matemáticos actuales.

Esta observación apunta a la necesidad de mejorar la enseñanza de raíces y radicales teniendo en cuenta no solo las exigencias formales de la concepción funcional de las operaciones y sus inversas, o de la definición de exponente racional, sino sobre todo las incoherencias e inconsistencias que hay detrás de las cogniciones petrificadas que la enseñanza tradicional arrastra.

Conviene añadir que en matemáticas el aprendizaje no debe confiarse exclusivamente a lo que está escrito en los manuales, ya que a menudo arrastran cogniciones, como las que se han discutido aquí, que producen confusión, por omisión de información o por la misma información que reproducen.

Referencias

Anaya (2004). *Matemáticas, 4º A, Secundaria.*. Madrid: Autor (Colera, J.; García, R.; Oliveira, M. J. & Martínez, M. M.).

Apóstol, T. (1990). *Calculus*. Vol.1. Barcelona: Reverté.

Aurel, Marc (1552). *Libro primero de Arithmetica Algebraica, en el qual se contiene el arte mercantil, con otras muchas reglas del arte menor, y la regla del algebra... / compuesto, ordenado y hecho imprimir por Marco Aurel... ; intitulado Despertador de ingenios*. Valencia: En casa de Joan de Mey Flandro.

Cajori, F. (1993). *A History of Mathematical Notations*. New York: Dover P.

Courant, R. y John, F. (1979). *Introducción al cálculo y al análisis matemático,* Vol. I, México: Limusa.

Davis, R.B. (1975). Cognitive processes involving in solving simpe algebraic equations. Journal of Children Mathematical Behavior 1(3), 7-35.

Euler, L. (1770). *Vollständige Anleitung zur Algebra*, Vol I. Kays. Acad. der Wissenschaften, St. Petersburg.

Even, R. and Tirosh, D. (1995). Subject-Matter Knowledge and Knowledge about Students as Source of Teacher Presentation of the Subject Matter, *Educational Studies in Mathematic,* 29, 1-19

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México D. F.: Grupo Editorial Iberoamericana.

Freudhental, H. (1981). Major Problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2*)* 133-150.

Acordamos denotar por $\sqrt{a}$ la raíz cuadrada positiva, y llamarla simplemente raíz cuadrada de a. Así, $\sqrt{4}$ es igual a 2 y no -2, aunque (-2)2 = 4 (Lang, 1971. p. 10).

Gallardo, A. (2008) Historical Epistemological Analysis In Mathematical Education: Negative Numbers And The Nothing Ness, in *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*, pp. 1-17-29

Gómez, B. (2011). Historical conflicts and subtleties with the radical sign in textbooks, in *Proceedings of the 6th European Summer University - ESU-6 ON - History and epistemology in mathematics Education*, Vienna: University of Technology

Gómez, B. y Buhlea C., (2009). The ambiguity of the √ sign, in *Proceedings of the Sixth Congress of The European Society for Research in Mathematics Education*. (CERME 6), Lyon, France.

Gómez; B. y Necula; C. (2011). Conflicts and subtleties with the radical sign: educational implications in Spanish and Romanian textbooks. Paper accepted in The First International Conference 'Teachers for the Knowledge Society'. (accepted for *Journal of Educational Sciences ans Psychology*)-Ploiesti, Rumanía

Gray, E. y Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A 'proceptual' view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116-140.

Kaput, j. J. (1979). Mathematics and Learning: Roots of epistemological status: in Lochhead, J. and Clement, J. (eds.), Cognitive Process Instruction, Franklin Institute Press.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College levels. En Frank, K. Lester (Ed.), Jr. *Second Handbook of Research on mathematics Teaching and Learnig.*. Charlotte: NCTM. IAP

Kieran, C., (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp.11-49). Sense Publishers.

Lacroix, S. F. (1831). *Elements of Algebra. Translated from the French for the use of students of the University at Cambridge*. By John Farr, Third edition, Boston: Hilliard, Gray, Little, and Wilkins.

Lang, S., (1971). *A first course in calculus*. Third Edition, Massachusetts: Addison-Wesley, Readding.

Lentin, A. y Rivaud, J. (1969). *Álgebra moderna,* Madrid: Aguilar.

Mamolo, A. (2010). Polysemy of symbols: Signs of ambiguity. *The Montana Mathematics Enthusiast*, ISSN 1551-3440, Vol. 7, nos.2&3, pp. 247- 262. Montana Council of Teachers of Mathematics & Information Age Publishing.

Martinón A., Pérez A., Sauret D. & Vásquez T. (1990). Nota sobre radicales y raíces. *Números,* 20, 25-35.

Oxford (2003). *Matemáticas 4º Secundaria.* Proyecto Exedra. Juan Luis Sánchez González, Juan Vera López. Estella: Oxford University Press España, S. A

Di Burgo, L. (1494). *Suma de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalitá*. Venezia

Peacock, G. (1845). *A Treatise on Algebra. Vol.II. On Symbolical algebra.* Cambrigde: J.&J.J. Deighton.

Puig, L. (2006). Vallejo Perplejo. En Alexander Maz, Manuel Torralbo y Luis Rico (Eds.). *José Mariano Vallejo, El Matemático Ilustrado.* Una mirada desde la educación matemática, pp. 113-138. Córdoba. Servicio de Publicaciones. U. Córdoba

Roach, D., Gibson, D. y Weber, K. (1994) Why Is Not √25=±5. *Mathematics Teacher*,97-1.

S.M. (2002). *Matemáticas, 3º Secundaria, Algoritmo*, Madrid: Author (Vizmanos, J. & Anzola, M.).

Santillana (1999). *Matemáticas, 4º B. Secundaria. Orbita. 2000.* Madrid: Autor (Almodóvar, J.; García, P.; Gil, J.; Vázquez, C.; Santos, D.; Nortes A.).

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in mathematics* 22, 1-36.