Uma história do ensino das cônicas na matemática escolar no Brasil

Paques, Otília T. Wiermann, UEC , Brasil, otilia@ime.unicamp.br
Sebastiani Ferreira, Eduardo, UEC, Brasil, esebastiani@uol.com.br

Resumo

Pretendemos apresentar nesse texto o desenvolvimento do ensino das cônicas nos estabelecimento oficiais do ensino médio no Brasil, tendo como suporte de pesquisa os livros textos mais adotados nessas escolas.

Essa visão histórica mostra como em primeiro lugar a política, tanto nacional como internacional, influenciaram esse ensino e mais tarde as editoras de livros textos. A tentativa de retomar o domínio dessa influência pelo governo federal, através de ações ministeriais como de determinar os conteúdos programáticos da escola secundária e mais tarde da introdução dos Parâmetros Curriculares Nacionais, não surtiram o efeito desejado. Ainda os livros textos continuaram a determinar o currículo escolar. Aparece, então, outra iniciativa governamental de uma análise dos livros didáticos e a entrega gratuita de livros as escolas secundárias, numa escolha pelo professor em uma lista elaborada pelo ministério, proveniente dessa análise. Entretanto, os livros continuaram a serem os orientadores do que se ensinava e se ensina nas escolas secundárias brasileiras. Como exemplos disso, o uso de computadores são totalmente esquecidos desses livros, apesar de todo esforço do governo federal.

Por esse motivo nosso olhar histórico teve como base os livros textos mais adotados nas principais escolas oficiais brasileiras.

Introdução

Para Bourbaki (Bourbaki, p. 161) a última contribuição essencial da matemática grega foi a teoria das cônicas. O autor ressalta que mesmo os gregos não tendo idéia dos princípios fundamentais da Geometria Analítica, eles faziam uso de "coordenadas" para o estudo de figuras particulares, em relação a dois eixos no plano. Para Heath (Heath, p.XVII-XXXX) a idéia de considerar as cônicas como secções planas de um cone de base circular é de Menaechmus, $\sim 350\ a.C.$, aluno de Eudoxio, que as utilizou na solução do problema clássico grego da duplicação do cubo. Mas foi Apolônio (262-190, a. C.) quem deixou a importante contribuição sobre as cônicas, que aparece no Livro II da Coleção Matemática de Papus (Papus). Todo estudo de Apolônio é feito em três livros, utilizando-se das proporções, principalmente da quarta proporcional. Essa abordagem continua até o início do Renascimento, onde as cônicas tomam outra dimensão e é muito usada pelos arquitetos e artistas da época. Leonardo da Vinci (1452- 1519) utilizou largamente destas curvas, tanto em seus desenhos como nas construções de suas "máquinas".

Sem dúvida foi Da Vinci quem inspirou Alpoin a escrever seu livro *Exame de Bombeiros*, que foi adotado nas Aulas de Artilharia e Fortificação em 1699, esse é o primeiro livro adotado, que se tem notícia, na escola militar do Brasil, onde as cônicas, principalmente a parábola, aparecem como trajetória de projéteis.

O tratamento de Alpoin é totalmente por proporcionalidade como em Apolônio.

Em 1792 é adotado na Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho o livro de Bezout : *Cours de Mathématiques a l´usage des Gardes Du Pavillon et de La Marine*, com uma seção totalmente dedicada às cônicas, onde aparecem as distâncias focais como referência de descrição destas curvas. Esse livro foi também adotado na Escola de Guardas-Marinha, criada em 1810, pelo então, príncipe regente D. João VI, que era considerada como escola de nível secundário.

O Colégio Pedro II, foi criado em 1838. O livro de Lacroix foi o imposto oficialmente no colégio e não continha o item: cônicas. Esse colégio foi um marco na educação no Brasil e seu currículo adotado em todos os liceus provinciais. Inicia posteriormente as produções de livros didáticos publicados no Brasil, como os de Ottoni, Serrasqueiro, FIC, Gabaglia etc., sendo a maioria deles traduções de livros didáticos franceses, onde em poucos as cônicas são contempladas.

No início do século XX, pelas mãos de Euclides Roxo, tem-se uma grande mudança na educação matemática no Brasil. Apoiado no *Erlanger Programm* de Felix Klein, Roxo consegue que o governo aprove uma reforma importante, onde aritmética, álgebra e geometria passam a ser uma única disciplina: Matemática. (Valente, 2004) Apesar disto, as cônicas ainda são assuntos pouco apresentados nos livros didáticos, aparecendo somente em alguns poucos exemplos quando se estudava funções.

Temos, entretanto, de ressaltar os livros de Stável e, onde as cônicas têm um destaque muito importante. (Stávele, livro V-capítulo IV- p..109-141)

Já na década de sessenta do século passado foi introduzida no ensino secundário a disciplina de Desenho Geométrico e Projetivo, passando os estudos das cônicas a fazer parte do seu currículo e contemplado nos livros didáticos. Vale citar que os livros de Carlo Marmo tratam a construção das cônicas e algumas propriedades, ficando para a disciplina Matemática esse assunto, em Geometria Analítica.

Depois que Desenho deixou de ser ensinado no secundário, restou o assunto cônicas, somente no estudo de equações quadráticas.

Mesmo em revistas especializadas em educação matemática, como a Revista do Professor de Matemática, (da Sociedade Brasileira de Educação Matemática), o Zetetike etc, só para citar algumas brasileiras, e das poucas experiências que são apresentadas nos encontros educacionais de matemática, as cônicas têm pouco destaque. Hoje com a introdução em massa de pesquisas com os aplicativos de “geometria dinâmica”, o tema teria em princípio um lugar de destaque. Entretanto, os livros textos nãos os contemplam, mesmo com todo o esforço do governo federal para que isto ocorra. Este é o panorama nacional de hoje do que se encontra nos livros textos de matemática, que são os norteadores do que se ensina nas escolas brasileiras, sobre cônicas.

As primeiras escolas oficiais no brasil

Como escrevemos acima, vamos procurar nos livros textos usados em cada época o que, e como se escrevia o tema: "Cônicas". Faremos isso citando o autor mais significativo em cada época:

Sacrabosco

Para estudar a história do ensino das cônicas no Brasil, temos que nos reportar à história do ensino em Portugal, da geometria e em particular das cônicas. Um bom referencial para isso é o livro de Wagner Valente, *Uma História da Matemática Escolar no Brasil (1730-1930)-*. O autor cita que: *Em Portugal, a partir de 1590, no Colégio da Companhia de Jesus de Santo Antão, foi criada a Aula da Esfera..,que teve a origem do seu nome aos numerosos textos medievais que se dedicavam à exposição dos princípios de cosmografia.* Na nota de roda-pé o autor escreve:

O primeiro cosmógrafo-mor do reino português, Pedro Nunes, nomeado para esse cargo em 1547, foi quem traduziu para o português em 1537, a obra do inglês John of Hollywood, mais conhecido por Johannes Sacroboco, Tractatus da Sphaera (1233) . A obra de Sacrobosco expunha o sistema do mundo segundo Ptolomeu, que considerava a Terra como centro do Universo.....A importância que atribuímos à Aula da Esfera justifica-se por ter sido ela a responsável pela introdução do ensino da matemática no colégio dos jesuítas de Lisboa.

Dispomos atualmente de uma edição desta obra pela Editora da Unesp (1991), com uma aprimorada introdução de Carlos Ziller, Nela o autor destaca que:

Outra característica extremamente importante é o fato de este pequeno livro ter ultrapassado em muito os limites iniciais de seus objetivos. As exigências postas pelo grande empreendimento conquistador europeu dos séculos XV e XVI impunham um conhecimento de Astronomia mais pormenorizado do que o possuído pelos navegantes de então. O texto básico usado para formação de pilotos aptos a superar as dificuldades foi exatamente o Tractus de Sphera. Caso raro naquela época: um texto sai do mar fechado das universidades e cai na vastidão dos oceanos.

Note-se aqui que Pedro Nunes era ptolomaico e desenvolvia seu pensamento plenamente nos marcos do aristolelismo então reinante, o que não o impediu de tratar matematicamente os problemas com os quais se envolveu.(p.11-20).

O livro de Sacrobosco trata somente do círculo por se tratar de uma visão ptolomaica da astronomia, não temos em nenhum momento referência às outras cônicas.

Alpoin

Com o aparecimento das Aulas de Artilharia e Fortificações em Portugal e posteriormente no Brasil, isto em 1699, o estudo das cônicas é contemplado, em especial a parábola, pela sua importância na trajetória de morteiros. O livro adotado no Brasil foi o *Exame de Artilheiros* de José Fernandes Pinto Alpoin, que tratamos abaixo:

O autor descreve como se constrói uma parábola ponto a ponto da seguinte maneira:

...a parabólica se gera por seção de um cone, por um plano paralelo a um dos seus lados, com tudo, como não é fácil aos bombeiros de perceberem, me valho da idéia de Belidor (Novo Curso de Mathematica, secções cônicas p. 183):

Seja uma reta AB, na qual tomamos as partes AC e CD iguais do ponto A, sobre AB . Traçamos uma perpendicular em A, á reta AB, que denotamos OP. De C para B, dividimos esta altura, que quisermos para a parábola, em certo número de partes (podem ser iguais) e pelos pontos das divisões (T_1,T_2,T_3...) traçamos retas paralelas a OP, como EF, GH, IL, QN, MM etc; quantas forem para melhor se descrever a curva. Logo do ponto D fixo, fazemos DE e DF iguais a AK; DG e DH iguais a AD; DI e DL iguais a AT_1 e assim continuamos para achar uma quantidade de pontos, tais que, como E, G, I, Q, M de uma parte, e de outra F, H, L, N, M , e fazendo DM=AB , a curva que passa por estes pontos se chama parábola e é a que descreve os graus arrojados com morteiro violento.

Para isto, produziremos dois pontos D e E, tais que: BD=AC, ligando BC e traçando por D, DE paralela a BC. Como BC é paralela a DE, um dos lados do triângulo ADE é proporcional, assim AB está para BD, assim como AC está par CE. Mas BD é igual a AC, logo AB está para AC, assim como AC está para CE. Logo dados os dois segmentos AB e AC a terceira proporcional entre eles CE é encontrada.[1]

Alpoin mostra como achar o ângulo do morteiro em três casos: quando o alvo está no mesmo plano (bombardear horizontalmente), quando o alvo está num plano mais elevado que o morteiro (bombardear verticalmente) e quando está abaixo (bombardear de mergulho).

Para calcular o ângulo de inclinação do morteiro, conhecendo a distância do objeto a ser bombardeado, Alpoin usava uma tabela, que ele denominou de "tabuada de Galeleo", de seno de ângulo duplos. Sabendo que o ângulo que tinha tiro de alcance máximo era de 45°, para o seno deste ângulo fez corresponder o valor do alcance de 10,000 e para os outros valores o seno do duplo do ângulo dado.

Para calcular o ângulo Alpoin se utilizava de uma simples regra de três. Por exemplo, atirando-se uma bomba (referêncial) com o ângulo de 15°, obtemos um alcance de 66 braças. Pela taboada 15° dá um alcance de 5.000. Querendo que a bomba alcance 108 braças, pela regra de três $x = \frac{108 \times 5.000}{66} = 8.181$. Voltando à taboada, o valor mais próximo para 8.181 é o de 27°, que deve ser o ângulo de elevação do morteiro. (Alpoin, p.193).

c - Bézout

Em 1792 é criado no Rio de Janeiro a Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho e os livros adotados eram*: Geometria Prática de Bélidor* e a *Aritmética de Bézout.* . O livro de Bélidor, em seu prefácio, escreveu que *o lançamento de bombas e o cálculo de volutas em construção, onde há necessidade de conhecimento das secções cônicas,....recomenda o livro Traité des Sections Coniques de M. le Marquis de L´Hôpital* *(para aqueles que querem se aprofundar neste assunto).* Não consegui ter acesso aos livros citados.(Valente, 1999 p. 67). Já o livro de Bézout : *Cours de Mathématiques a l´usage des Gardes Du Pavillon et de La Marine*, tem uma secção somente ao estudo das cônicas.(Bézout. p. 361).

O autor introduz, o conceito das coordenadas de um ponto de uma curva, a abscissa e a ordenada de um ponto como conhecemos hoje, mas sem traçar os eixos cartesianos. Na página 372 inicia o estudo das cônicas propriamente ditas:

De L´Ellipse:

Propomos agora examinar quais serão as curvas que terão a seguinte propriedade, que a soma das duas distâncias MF + Mf de cada um dos seus pontos à dois ponto fixos F e f, serão sempre iguais a uma linha dada a.(Bézout. p. 372)

Para encontrar sua equação Bézout fixa a distância AB=a, os pontos F e f na semi-reta AB e toma como origem das abscissas o ponto A. Seja C o ponto médio entre F e f. Se M é um ponto da curva então satisfaz a condição MF + Mf = a. A distância MP, do ponto M à semi-reta AB é y, a distância AP é x e AF é c.. Com essas notações a equação da elipse fica: $y^2 = \frac{4ac-4c^2}{a^2}(ax - x^2)$.

Bézout começa, então, a mostrar todas as relações de proporcionalidade que aparece nos escritos de Apolônio (262 – 190 aC).

Logo depois, trata da construção da tangente à elipse em um dos seus pontos, define o que é normal, subnormal e subtangente, e de como calcular seus valores.

Na página 382, Bézout mostra que pela propriedade do ângulo de reflexão, se um raio luminoso sai de um foco, atinge a elipse e reflete passando pelo outro foco.

Ele trata, também, de algumas propriedades do elipsóide, sólido gerado por uma elipse quando girado em torno de um dos seus eixos.

Finalmente, ele mostra o uso da elipse na construção naval. (p.398)

<u>De l´Hyperbole</u>

Na página 401 de seu livro Bézout trata de hipérbole, usando a definição que aparece nos livros didáticos até hoje:

Consideremos agora a curva que teremos, em cada um dos seu pontos M, esta propriedade, que a diferença Mf-MF das distâncias Mf e MF de dois pontos fixos f e F, seja sempre a mesma e igual a uma linha dada <u>a.</u>(Bezout, p. 410)

Para a equação algébrica que descreve a hipérbole, Bezout usa como para a elipse as seguintes notações: toma A um ponto qualquer na semi-reta Ff, como origem das abscissas e C o ponto médio entre a distância Ff . Fazendo o ponto A pertencer à curva, então Af-AF=a. Sendo o ponto B, tal que, AF=Bf, Bf + BA-AF = a assim BA = a, então AC= $\frac{1}{2}a$. Chama f e F de focos, A e B de vértices. Se M é um ponto na curva e P a interseção da perpendicular a fF passando por M, chamamos de AP=x, PM=y e FM = c e usando semelhança de triângulo chegamos a equação: $y^2 = \frac{4ac+4c^2}{a^2}(ax + x^2)$.

Como na elipse ele usa de um artifício para descrever a curva:

Fixamos no ponto f uma régua indefinida que possa girar em torno deste ponto. No ponto F e num ponto qualquer Q da régua prendemos as extremidades de um fio FMQ, menos longo que fQ, cuja a diferença com fQ seja igual a AB, então, por meio de um lápis, esticamos M . Fazendo mover o lápis de M para o ponto A, mantendo sempre o fio, a régua vai abaixando e distância FM diminuindo, desta maneira o lápis descrevera um ramo da hispérbole.(Bézout. p. 403).

Usando as coordenadas (x,y) obtem na página 406 a equação da hipérbole: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax + x^2)$.

Temos, também, aqui a demonstração de todas as proporções que aparecem no livro de Apolônio.

Quando a=b chama de hipérbole eqüilátera.

Não aparece nenhuma aplicação prática desta curva, como no caso da elipse, escreve somente que se um raio de luz sai de F em certo ângulo com o eixo fF, reflete no ramo da hipérbole e parte na direção de f.

<u>De la Parabole</u>

Trata-se agora de encontrar as propriedades de uma curva onde cada ponto está distante igualmente de um ponto fixo F e de uma reta XZ, cuja posição é conhecida, isto é, a curva, tal que, para cada ponto M, baixando a perpendicular MH, temos MF = MH. (p.428)

De um ponto F traçamos FV perpendicular a reta dada XZ .Dividimos FV em duas partes iguais em A; A será um ponto da curva, pois, AV=AF. Esse ponto é chamado de vértice.

Para encontrar as propriedades desta curva, ele determina uma equação que exprima a relação entre as perpendiculares MP, baixada sobre FV e as distância AP ao ponto A. Nomearemos, então, AV ou AF por c; AP de x e PM de y. Chega-se assim na equação $y^2 = 4cx$.

Mostra, também, como traçar uma parábola usando um esquadro e uma régua.

Como aplicação dessa curva Bézout mostra o traçado na construção de uma embarcação. Faz, também, todo o tratamento por proporção como em Apolônio.

<u>Dentro dessa história vamos tratar da criação dos cursos de nível secundário</u>:

Em 1810, o Príncipe Regente, futuro rei D. João VI, cria a Academia Real Militar, que substituiu a antiga Real Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho. A Academia Real dos Guardas-Marinha já tinha sido trazida ao Brasil pela vinda da corte portuguesa em 1808. Acontece que a Academia Real Militar se transforma em um curso superior e a de Guardas-Marinha em um curso de nível secundário. Para a primeira o livro de Bezout é o adotado e para a segunda, onde a matemática ensinada era a de ensino secundário, ainda foi sugerido o livro de Bézout. (Valente, 1999 – p.120).

d – Lacroix

O primeiro livro de geometria adotado pelo Colégio Pedro II foi o *Elementos de Geometria* de Lacroix, numa tradução de Manuel Ferreira de Araújo Guimarães. O livro de Lacroix, tinha como título *Éléments de Géometrie a l´usage de l´Ecole Central des Quatre-Nations*.

Nesta edição de 1808, que é a sétima, não consta o estudo de cônicas.

Lacroix estuda cônicas no livro *Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique*, (na quarta edição de 1807), a partir de uma equação do segundo grau em duas variáveis:

$y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex = f$*...la quantité* $4c - b^2$ *est positive, négative , ou nulle. Les courbes représentées para primiére....sont désignées sous le nom d´éllipse, Celles que Donna La seconde...se nomment hyperboles . Enfins La troisième équation est celle des paraboles.*(grifo do autor) (Lacroix, p. 168)

$e -$ Serrasqueiro

José Adelino Serrasqueiro foi também um professor de matemática que publicou uma série de livros didáticos nos meados do século XIX. O seu livro *Tratado de Geometria Elementar, composto segundo o Programma Official para o ensino de sciencia nos Lyceus*, 7ª edição de 1890, que tive acesso, contém a teoria das cônicas:

Serrasqueiro trata neste capítulo das cônicas sob o olhar do desenho geométrico, (ps 170 e seguintes). A elipse tem a definição conhecida.

Para se obter um ponto da curva, marca-se um ponto C entre F e F´; tomando os focos como origem traçamos arcos de círculos de raios CA e CA´, respectivamente, a interseção destes arcos D,D´,D´´ e D´´´são pontos pertencentes à elipse.

Serrasqueiro constrói a tangente à uma elipse por um ponto:

> A bissectriz do ângulo, formado por um raio vector de um ponto da ellipse e pelo prolongamento do outro, é tangente à ellipse nesse ponto .(Serrasqueiro. p.275)

Para a hipérbole o autor usa a definição mais usada, que conhecemos, isto é,

> A curva plana que a diferença das distâncias de cada um dos seus pontos a dois pontos fixos F e F´, situados no seu plano, é constante. (p.177)

Usa denotações análogas as da elipse: F e F´ são os focos FF´= 2c a distância focal, MF e MF´ raios vetores e a diferença MF – MF´= 2a. Então, concluímos que a excentricidade de uma hipérbole é sempre maior que 1. ($e = \frac{c}{a} > 1$)

Na construção de um ponto qualquer da hipérbole, dados os focos e a diferença dos raios vetores de um ponto qualquer, considera um ponto C no prolongamento de FF´. A construção segue o mesmo processo da construção de pontos de uma elipse. Quanto as propriedades desta curva Serrasqueiro descreve os eixos de simetria, dos pontos do plano que estão no interior e no exterior da curva, isto é, se a diferença dos raios vetores é <, ou > que 2a, que a bissetriz do ângulo, formado pelos raios vetores de um ponto dela é tangente à hipérbole, nesse ponto, a definição de semelhança entre hipérboles, que é a mesma da elipse e, finalmente que hipérboles semelhantes têm distâncias focais proporcionais aos eixos.

Quanto à parábola, o autor segue o mesmo caminho; parte de sua definição: é uma curva plana, que tem todos os seus pontos eqüidistantes de um ponto fixo e de uma reta fixa.

O ponto fixo sendo o foco e a reta a diretriz. A distância de um ponto qualquer da curva ao foco ele chama de raio vetor, e a reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz de eixo. O ponto A é o vértice. A corda BB´ é o parâmetro que é designado de 2p.

Somente neste caso Serrasqueiro diz que vai chamar a perpendicular, baixada de um ponto qualquer da parábola sobre o eixo, de *ordenada*, e a distância da ordenada ao vértice de *abcissa* .Entretanto não descreve a equação algebrcica desta curva.

Nas três cônicas Serrasqueiro mostra a maneira de se construir por "movimento contínuo": a elipse com um barbante fixado nos focos, a hipérbole com um barbante e uma reta e finalmente a parábola com um barbante, uma reta e um esquadro:

f - FIC.

Valente escreve no seu livro, quando faz a introdução dos livros chamados de FIC (Coleção usada pelas escolas da Congregação dos *Frères de l´Instruction Chrétienne* (FIC), na França no século XIX):

No final do século XIX, surge no Brasil uma literatura didática, marcada sempre pela sigla FIC. São os Elementos de Arithmetica por FIC, os Elementos de Geometria por FIC etc. Deve-se ao prof. Eugênio de Barros Raja Gabaglia a introdução, no país, desses livros. Isso é ressaltado por Euclides Roxo: "Entre muitos livros novos que entre nós introduziu, contam-nos as obras da Coleção FIC, que traduziu e adaptou ao nosso ensino, sendo a edição brasileira, não raro, superior ao original. (Valente 1999, p.176).

No capítulo VII, que o autor chama de Livro III, que trata de Curvas Usuaes e § 1, tem-se o estudo da Elipse. Nos preliminares do capítulo o autor define: eixo de uma curva, vértice, centro, tangente, normal, corda, curva convexa, coordenadas retilíneas e equação. (FIC, p.290).

Quando inicia o tratamento da elipse faz uso da definição usual e seu traçado, também, com um fio fixo nos focos. O traçado ponto a ponto é o mesmo de Serrasqueiro. As propriedades da elipse, além das já apresentadas por outros autores, têm os seguintes teoremas:

Teorema 624: *O lugar do ponto simétrico a um foco em relação a uma tangente qualquer é o círculo diretor descrito de outro foco. (Ele chama a atenção de que a palavra círculo é empregada por circunferência).*

Teorema 626 – *de La Hire – O lugar geométrico das projeções dos focos sobre as tangentes à elipse é a circunferência descrita sobre o eixo maior como diâmetro*.

Teorema 633 – de Poncelet – *A reta que une ponto exterior a um dos focos é bissetriz do ângulo formado pelos raios vetores que vão deste foco aos dois pontos de contato.*

Das páginas 299 até 304 estuda as propriedades da elipse tratada como projeção do círculo. O autor diz :

Teorema 634 - *A projeção de um circulo sobre um plano é uma elipse.(demonstraçào de Mr.Courcelle).*

Teorema 637 – *A área da elipse é igual ao produto dos semi-eixos pela constante* π

Teorema 641- *Um ponto qualquer de uma reta cujas extremidades escorregam respectivamente sobre duas retas retangulares, descreve uma elipse cujos eixos estão sobre as retas retangulares e o centro no seu ponto de interseção.*

Hipérbole (p. 305). O Fic não traz nenhuma novidade quanto à hipérbole: sua definição, seu traçado com régua e barbante, suas assíntotas e o traçado das tangentes. Quanto a área de um segmento de hipérbole, diz o autor, não é dada por uma fórmula elementar; podendo empregar as fórmulas aproximadas, uma das quais , a de Poncelet explicada na página 175.

Parábola (p.314) Neste livro a parábola é tratada, também, seguindo o mesmo método que foi feito para as outras curvas: definição, traçado com régua, esquadro e barbante, propriedades e traçado da tangente. O que diferencia das outras é um parágrafo dedicado ao cálculo da área. Inicia com um lema: A paralela ao eixo, tirada pelo ponto de concorrência de duas tangentes à parábola, passa no meio da corda de contato. Esse lema tem como corolários: 1º As tangentes PM e PN consideradas desde o ponto de concorrência até aos pontos de contato têm projeções iguais sobre a diretriz, pois que temos HE = HB. 2º A reta PG que une o ponto de concorrência dos pontos de tangencias, ao meio da corda dos contatos é paralela ao eixo. Finalmente o teorema já conhecido por Arquimedes, que a área do segmento parabólico limitado pela curva e por uma perpendicular ao eixo, é os 2/3 do retângulo que tem por dimensão a corda considerada e a parte do eixo compreendido entre esta corda e o vértice. (p.323)

No apêndice do livro FIC, a segunda parte (p.365) é dedicada as "seções cônicas" e inicia com as seções do cilindro e com o teorema de Dandelin: *Todo plano obliquo ao eixo de um cone de revolução determina uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole.* Outro teorema é que *a seção de um cilindro e de um cone de revolução por um plano que encontra todas as geratrizes é uma elipse*.

O teorema 820 diz que a seção de um cone de revolução por um plano paralelo a um só geratriz é uma parábola; e por um plano que encontra as duas folhas temos uma hipérbole.

Obs: Apesar de o autor iniciar o estudo das cônicas dando os eixos coordenados, não aparece em nenhum caso a equação algébrica das cônicas.

Matemática como disciplina

No período das décadas de 20 à 30 do século XX, temos no Brasil, além das escolas primárias, a criação dos cursos jurídicos, do Colégio Pedro II e o aparecimento dos liceus provinciais, sendo que o ensino secundário se caracterizava pela preparação às escolas superiores.(Valente, 1999-p.119). Neste período Cristiano Benedito Ottoni foi figura primordial na educação brasileira. Diretor do Colégio Pedro II, com grande influência no governo, tradutor de vários livros didáticos de matemática e autor de outros, foi quem praticamente estabeleceu todo o programa de matemática no Brasil. Seu livro *Elementos de Geometria e Trigonometria Rectilínea Compilados* foi adotado no Colégio Pedro II e é uma adaptação do livro *Cours de Géometrie Élémentaire* de A,-J.H.Vincet, no qual Ottoni retira todo o capítulo sobre cônicas. (Valente 1999- p.149). Mais tarde, outro professor do Colégio Pedro II, Timotheo Pereira, escreve o livro *Curso de Geometria* onde recoloca as cônicas abandonada por Ottoni. Valente sita que a 11ª edição deste livro data de 1927.

Inicia na década de trinta do século passado os livros editados em São Paulo, depois da reforma de Francisco Campos em 1931, com grande apoio de Euclides Roxo, professor do Colégio Pedro II. Com essa reforma o ensino da matemática é todo acoplado em uma só disciplina. Anteriormente tinha-se: aritmética, álgebra e geometria, passando então a disciplina Matemática para todo o ensino secundário.

g - Stávale

Os primeiros livros de São Paulo, já com esta reforma, são os de Jacomo Stávale, professor no Instituto Caetano de Campos e outros colégios da capital.

Vamos analisar como são tratadas as cônicas no livro do Quinto Ano de Matemática. O capítulo IV é dedicado ao estudo elementar das seções cônicas. Ele inicia com a elipse, sua definição usual, seu traçado é apresentado pelo processo dos "jardineiros", isto é, duas estacas nos focos e uma corda e o traçado dos seus pontos geométricos pelo desenho com régua e compasso. Define os focos, os vértices, os eixos e a excentricidade. Chama atenção para algumas conclusões interessantes:

> O centro é uma elipse cuja distância focal é nula.
>
> Um segmento de reta é uma elipse cuja distância focal é igual ao comprimento deste mesmo segmento. (Stávale p.115)

No parágrafo 55 o autor trata do círculo principal da elipse e faz uma ressalva no roda-pé:

Este parágrafo tem por fim ensinar um processo muito cômodo para traçar uma elipse; entretanto, pode ser dispensado pelo srs, professores. (Stávale p. 116).

Stávale introduz então a ordenada de um ponto M qualquer da elipse com a notação x.

O círculo principal de uma elipse é o círculo construído sobre o eixo maior da elipse tomado com diâmetro, e pontos correspondentes de uma elipse e de seu círculo principal, dois pontos situados na mesma perpendicular ao eixo maior, por exemplo, N e M. Usa estes conceitos para traçar uma elipse. Em seguida, trata da tangente em um ponto da curva e a normal. Aparece pela primeira vez o enunciado: A elipse é uma curva convexa. (Sátavale p. 121)

Depois vem o estudo da hipérbole, seguindo a mesma metodologia: definição por distância, traçado com régua e barbante, traçado geométrico com os dois ramos e definição como lugar geométrico. Introdução dos conceitos de eixos, vértice e centro da hipérbole. Na página 130 Stávale usa os teremos ordenada e abscissa para um ponto M qualquer da curva: $OP = x\ ordenada\ e\ MP = y\ abscissa$. O *parâmetro* de uma hipérbole é o dobro da ordenada de um dos focos, que é representado por 2p. Chama de eixo transverso o X` e BB´ o eixo imaginário.

Na página 131 o autor define o círculo principal de uma hipérbole como, o círculo construído sobre o transverso, tomado como diâmetro. Acredito que aqui o autor cometeu um erro, pois pelo desenho o círculo principal tem com diâmetro a distância entre os vértices. Logo em seguida vem o traçado da tangente em um ponto e das assíntotas.

Já na página 136 inicia o estudo da parábola seguindo o mesmo caminho feito para as outras duas: definição, traçado com esquadro, régua e barbante, construção geométrica por pontos, lugar geométrico e traçado da tangente um ponto. Para a parábola o autor não usa os termos: ordenada e abscissa de um ponto.

No final do capítulo trata de Seções Cônicas em um parágrafo 70, p. 141.

No capítulo V: *Noções de Geometria Analítica*, estuda o lugar geométrico dos pontos de coordenas (x,y), que satisfaz a equação do segundo grau: $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$.

Primeiro o autor mostra quando esta equação se refere à equação de um círculo, depois quando podemos reduzir à equação da elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; da hipérbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; da hipérbole eqüilátera: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$; hipérboles conjugadas: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \mp 1$; das assíntotas: $y = \mp \frac{bx}{a}$ e, finalmente da parábola: $y^2 = 2px$.(Stávale p.169)

Seguindo a sugestão da reforma proposta por Klien, abalizada pelos comitês internacionais de educação matemática de 1908, Stávale trouxe no seu livro nos capítulos: VII – Noções rudimentares de Cálculo Integral, VIII- Séries e no IX, o que chamou de Complementos. Neste último trata de vários assuntos que não foram tratados anteriormente, acredito que com o propósito de que o professor poderia, ou não, abordá-los em suas aulas. Dentro dos assuntos aí tratados, temos na página 347 – A área da elipse. Ele o faz usando a integral da função

$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ entre 0 e a. Com isto obtém a área de ¼ da elipse. Logo, a área da elipse= πab.

h- Thiré

Outro professor do Colégio Pedro II, que publicou vários livros didáticos, que foram usados em todo território nacional, foi Cecil Thiré (1892-1963). Ele segue, também a sugestão da reforma de Klien, introduzindo neste livro o conceito de função. Já na página 11, estuda a função parabólica: $y = ax^2 + bx + c$ e faz sua construção por pontos, em coordenadas cartesianas. Também, por pontos constrói a curva parábola $y = \sqrt{x}$.

Análise dos livros mais recentes

Em 2 de outubro de 1951, por meio da Portaria nº 966, o então ministro da Educação Ernesto Simões da Silva Freitas Filho, incube a congregação do Colégio Pedro II, para as modificações nos Programas do Ensino Secundário. Dessa forma o Colégio Pedro II, além de ser responsável pelos conteúdos a serem trabalhados, determinou também como eles deveriam ser abordados, e os conteúdos dos livros didáticos são um reflexo destes conteúdos elencados. O resultado é um programa que, na Matemática, mantém os conteúdos anteriores, com pequena mudança na seriação. Entre 1945 e 1963 a Geometria Analítica era estudada como uma cadeira à parte. A partir de 1964 é reunida com o Cálculo Diferencial e Integral.

i) Freire.

Em 1961 é distribuído pela Livraria Francisco Alves, a 48ª, edição do livro: *Desenho geométrico e noções de geometria,* de Olavo Freire, livro de uso autorizado pelo Ministério da Educação, registro 863. Inteiramente refundida e adaptada ao uso das escolas profissionais e técnicas. (tendo sua primeira edição em outubro de 1894). No capitulo XXII – faz um estudo completo de elipse, falsa elipse, oval, parábola, hipérbole, espiral e hélice, como lugares geométricos.

j) Marmo.

Em 1966, temos o importante livro (o 4 de cônicas) de Carlos M. B. Marmo . No prefácio, Marmo esclarece:

Há ótimos compêndios de Geometria, inclusive alguns volumes que só tratam das Cônicas. Estudar cônicas por esses livros exige do estudante muito esforço, trabalho e tempo, bem como uma noção precisa do que se exige no nível do curso Secundário, nos Vestibulares de Engenharia e Arquitetura e nos Vestibulares às Faculdades de Filosofia. Não podendo satisfazer a todos esses requisitos o estudante se perde no meio de tanta matéria. Este Livro 4 tem por função ensinar o assunto Cônicas sem se perder nos detalhes. Foi concebido para permitir a qualquer estudante que saiba "TANGÊNCIA" entender a teoria e resolver os exercícios. A idéia de estudar simultaneamente as três Cônicas, o Autor a teve em 1952 e desde essa data vem lecionando esse assunto dessa maneira aos alunos do CURSO "Anglo-

Latino" com boa aceitação. Este livro 4 é uma reedição de um livro sobre o assunto editado em 1954 e esgotado em 1960.

Na página 12 encontramos a seguinte definição das cônicas:

Consideremos na figura 1 do anexo, uma circunferência γ de centro e raio 2a e um ponto, interno a γ, na figura 2 uma circunferência γ de centro e raio 2a e um ponto externo a γ; e na figura3 uma reta de centro impróprio e raio 2a tendendo ao infinito e também um ponto (não se pode e nem interessa saber se é interno ou externo à reta γ).

É interessante observar que o autor define reta como sendo uma circunferência de centro impróprio e raio tendendo ao infinito.

Observa que:

Existem infinitas circunferências contendo e tangenciando γ (vale para as três figuras 1,2 e 3); deve o estudante, usando sua "visão animada" imaginar uma circunferência variável passando sempre por e tangenciando γ e acompanhar com a vista o centro dessa circunferência".

O lugar geométrico (l.g.) dos centros dessas circunferências é uma linha denominada cônica.

Na figura 1,onde é interno à γ, a cônica recebe o nome de elipse.

Na figura 2, onde é externo à γ, a cônica recebe o nome de hipérbole.

Na figura 3, onde γ é reta, a cônica recebe o nome de parábola.

Assim: CÔNICA É O L.G. DOS CENTROS DAS CIRCUNFERÊNCIAS QUE CONTÊM F_2 E TANGENCIAM γ.

Marmo introduz as definições clássicas de elipse, hipérbole e parábola, como propriedades da definição acima, e encontra as tangentes às cônicas num ponto P.

Na página 23, ele distingue o que é *CONSTRUIR* uma cônica e o que é *TRAÇAR* uma cônica com as seguintes palavras:

"Traçar" é executar um traço continuo representando a cônica. É impossível "traçar" uma cônica com régua e compasso, todavia existem processos mecânicos para o traçado das cônicas. "Construir"é obter com régua e compasso ou só pontos , ou só tangentes ou ainda pontos e tangentes e a seguir a cônica é "traçada à mão livre", passando pelos pontos e inscrita nas tangentes. Evidentemente, obtendo pontos e tangentes ao invés de só pontos ou só tangentes, a cônica resultará muito mais precisa e bem traçada.

O primeiro processo de construção das cônicas é exibido na página 24 e é por pontos e tangentes (são as figuras 1,2 e 3 do anexo, construídas com o software geogebra). No parágrafo 6, p. 51, ele exibe os processos "usuais" de construção das cônicas, dados os focos e vértices.

No capitulo 2 trata de propriedades peculiares de cada cônica. No caso da elipse, parágrafo 2, p. 59, obtém-se a equação de uma elipse com centro na origem e focos no eixo dos x . Ainda faz a construção da elipse pelo processo dos círculos (principal e secundário), (figura 4 do apêndice) e o da tira de papel. Faz também para a elipse a construção via os diâmetros conjugados.

No caso da parábola obtém a equação cartesiana da parábola. No caso da hipérbole não encontra a sua equação cartesiana. Diz que, das cônicas, a parábola é a mais importante na Engenharia, e por isso merece um estudo mais acurado. No capitulo 3, denominado “Estudo Complementar”, enuncia e demonstra O TEOREMA DE PONCELET. Sobre este teorema, na página. 75 escreve o seguinte:

Tenho o prazer de apresentar uma nova demonstração para o teorema de Poncelet que me parece mais fácil e mais concatenada com a teoria geral das cônicas:

Enunciado: a) as tangentes a uma cônica conduzidas por um ponto externo M formam ângulos iguais com as retas determinadas por esse ponto M e pelos focos.

b) a reta que contem o ponto externo e um foco é bissetriz do ângulo cujo vértice é esse foco e cujos lados contem os pontos de tangência.

No parágrafo 6 deste capitulo 3, enuncia várias aplicações das cônicas na Engenharia, Matemática e na Física. Vale lembrar que Marmo não estabelece todas as equações cartesianas das cônicas, somente da elipse. Em seguida exibe traçados mecânicos das cônicas, com alfinetes, barbantes, réguas e lápis.

MATEMÁTICA MODERNA

l) Sangiorgi.

Nas décadas de 1960 e 1970, o ensino de Matemática no Brasil, assim como em outros países, foi influenciado por um movimento de renovação que ficou conhecido como Matemática Moderna. A Matemática Moderna nasceu como um movimento educacional inscrito numa política de modernização econômica e foi posta na linha de frente do ensino, por se considerar, juntamente com a área de ciências, uma via de acesso privilegiada para o pensamento científico e tecnológico. Para tanto se procurou aproximar a Matemática desenvolvida na escola, da Matemática, como é vista pelos estudiosos e pesquisadores. No entanto, estas reformas deixaram de considerar um ponto básico que viria tornar-se seu maior problema: o que se propunha estava fora do alcance dos alunos, em especial daqueles das séries iniciais do ensino fundamental. No Brasil, o movimento Matemática Moderna, veiculado principalmente pelos livros didáticos do Oswaldo Sangiorgi teve grande influência durante longo tempo.

O livro de Oswaldo Sangiorgi, Renate Watanabe e Jacy Monteiro, volume 1, não estuda as cônicas. Considera a parábola como gráfico de uma função quadrática.

m) SMSG.

Contudo, em pleno tempo da Matemática Moderna, foi traduzido um texto do School Mathematics Study Group (SMSG), série Mathematics for High School, produzido em inglês pela Yale Universitypress, New Haven (EUA) em 1961. O texto foi adaptado e traduzido pela equipe de professores do Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura, IBECC- Secção de São Paulo, e da Fundação Brasileira para o Desenvolvimento do Ensino de Ciência e Cultura.

Apesar do livro do Sangiorgi não conter as cônicas, neste livro tem no capitulo 11, - equações do primeiro e segundo graus em duas variáveis – 11.3 – parábola, 11.4 – definição geral da cônica, 11.5-círculo e a elipse, 11.6 - a hipérbole. O objetivo é deduzir as equações algébricas das cônicas a partir da definição. Em geral, faz um estudo de uma equação algébrica de segundo grau em duas variáveis.

n) Bezerra.

O Ensino Médio até 1967 era dividido em cientifico, clássico e normal. Em seguida mudou-se o nome para colegial. Os três primeiros anos eram comuns a todos e para o Clássico, e o Normal se exigia mais um ano. Desde 1996, o colegial é considerado a última fase da educação básica. A lei 9394 de 20 de dezembro de 1996, Lei de Diretrizes e Bases-LDB, estabelece sua regulamentação especifica e uma composição curricular mínima para o colegial.

Em 1960 já temos a terceira edição do livro *Curso de Matemática*, para primeiro, segundo e terceiro anos dos cursos: clássico e científico, de Manoel Jairo Bezerra. Nesta época o ensino médio era dividido em **clássico, científico e normal**. Normalmente os alunos que cursavam o **científico**, seguiam carreira de ciências exatas, engenharia, ou matemática e física ou de biologia, como medicina. Já o pessoal que cursava o **clássico** ia para as carreiras de ciências sócias, como advogado, ou de línguas.

Um autor muito importante na Matemática do colegial desta época foi Manoel Jairo Bezerra. Vamos fazer uma análise da terceira edição do Bezerra, de 1962: Este livro é dividido em: Aritmética e Álgebra, (primeiro, segundo e terceiro anos), Geometria (primeiro ano), Trigonometria (primeiro ano) e Geometria Analítica (terceiro ano). As **secções cônicas** se encontram no tópico Geometria, capítulo 9. O assunto é apresentado da seguinte maneira:

Chama-se de um modo geral, secção cônica ou simplesmente cônica ao lugar geométrico L, dos pontos comuns a uma superfície cônica de revolução P e a um plano H.

Seja A o ân*gulo agudo constante que a geratriz de uma superfície cônica de revolução, de vértice P, faz com o seu eixo e de B o angulo agudo que um plano H* faz *com o eixo da superfície. Podemos chegar aos seguintes resultados que resumiremos no seguinte quadro:*

I) o plano H passa pelo vértice P: se B< A, L são duas retas distintas, se B=A, L são duas retas coincidentes e se B>A, L é um ponto.

II) o plano H não passa pelo vértice P : se B < A , L é uma curva chamada uma hipérbole, se B = A , L é uma curva chamada parábola, se B > A e B≠ 90 graus, L é uma *curva chamada elipse, se B >A e B = 90 graus, L é uma circunferência.*(Bezerra, p. 465)

Em seguida, ele apresenta as definições clássicas de elipse, hipérbole e parábola como também define a excentricidade destas curvas. Ensina a fazer o traçado de cada uma delas por *movimento continuo (mecânico, como no Marmo),* realizados com fios, réguas etc e o traçado *por pontos.* (como no Serrasqueiro). Define e constrói as assíntotas da hipérbole. Obtém também várias propriedades das tangentes a estas curvas, o teorema de Poncelet. No caso da elipse, faz o traçado por pontos, como no Serrasqueiro (observação: Bezerra diz que o ponto P varia no eixo maior, contudo na realidade ele deve variar somente entre os dois focos.). No caso da hipérbole e da parábola faz também faz como Serrasqueiro. Em seguida, para fechar o capítulo ele enuncia o teorema de Dandelin, que demonstra a equivalência das duas definições.

o) Quintella.

Na mesma época, temos o livro de Ary Quintella, (exemplar número 8599, nona edição). Neste livro está escrito que o conteúdo é de acordo com os programas em vigor (conforme Portarias números 966, de 2/10/1951 e 1045, de 14/12/1951). Este livro está dividido em cinco unidades, Unidade 1- Cálculo Aproximado; Unidade II, Progressões; Unidade III, Logaritmos e equações exponenciais; Unidade IV, Retas e planos. Superfícies e poliedros em geral, corpos redondos usuais, definições e propriedades, áreas e volumes; Unidade V, secções cônicas.

Vamos examinar a Unidade V: a unidade apresenta as definições clássicas de elipse, hipérbole e parábola, como lugar geométrico. Vejamos como faz os traçados da elipse , da hipérbole e da parábola: primeiro processo é o mecânico descrito no livro do Marmo; segundo processo: construção por pontos, como no Serrasqueiro. Sobre as tangentes às cônicas ele enuncia o teorema de Poncelet e o demonstra para cada uma delas. Na página 262, apresenta o resultado de La Hire, como no FIC. Temos ainda a secção IV desta unidade: **Secções cônicas, é destinada ao curso cientifico**. Nesta secção ele descreve as secções cônicas, como faz Bezerra, e em seguida enuncia e demonstra o Teorema de Dandelin.

Conclusão

O estudo das cônicas no ensino brasileiro aparece e desaparece dependendo do momento político e também pelo bel prazer das editoras.

Damos abaixo um quadro geral onde elencamos os principais autores e os conteúdos que contemplam em seus livros. Acreditamos que esse quadro dá uma idéia geral com esse assunto foi apresentado na história da educação brasileira.

O que temos atualmente? Encontramos no artigo: Tradução comentada da obra Novos Elementos das Secções cônicas (Philippe de la Hire- 1679) e sua relevância para o ensino da matemática – Franciso Quaranta Neto e Luiz Carlos Guimarães o seguinte:

Ano	Autores	Cônica como lugar geométrio	Cônica como secção	Como gráfico de funções	Na geometria analítica
1233	Sacrobosco	Circunferência	Não	Não	Não
1748	Alpoin	Parábola	Sim	Não	Não
1766	Bezout	Todas	Sim	Sim	Não
1808	Lacroix	Todas	Sim	Sim	Não
1890	Serrasqueiro	Todas	Sim	Sim	Não
1829	Fic	Todas	Sim	Sim	Não
1942	Stávale	Todas	Sim	Sim	Sim
1934	Thiré	Todas	Sim	Sim	Sim
1961	Freire	Todas	Sim	Não	Não
1966	Marmo	Todas	Sim	Não	Não
1969	Sangiorgi	Não	Não	Sim, com a parábola	Não
1971	Catunda	Todas	Sim	Não	Sim
1975	SMSG	Todas	Não	Não	Sim

1979	Nilton Lapa	Todas	Não	Não	Sim
1987	Chico Nery	Todas	Não	Não	Sim
1990	Gelson Iezzi	Todas	Não	Não	Sim
1992	Elon Lages Lima et al.	Parábola	Não	Não	Parábola
1993	Youssef	Todas	Não	Não	Sim
1993	Katia Smole	Todas	Sim	Não	Sim
1994	Giovanni	Todas	Não	Não	Sim
1998	Antonio dos Santos Machado	Todas	Não	Não	Sim
2002	Gelson Iezzi	Todas	Não	Não	Sim
2004	Dante	Todas	Não	Não	Sim
2005	Giovanni	Todas	Não	Não	Sim
2009	Sampaio	Todas	Não	Não	Não

Atualmente o ensino de cônicas no Brasil tem uma abordagem que costuma se limitar ao universo da Geometria Analítica. A partir da propriedade bifocal, são deduzidas as equações. Além disso, quase nada é apresentado. Para reconhecer uma elipse, por exemplo, é possível somente através de sua equação. Nenhuma outra propriedade é apresentada, explorada ou provada. Normalmente a sequência didática mais executada pelos livros didáticos do ensino médio quando se propõem a ensinar as curvas: elipse, parábola e hipérbole, são o seguinte: são apresentadas no plano cartesiano através das propriedades bifocais e assim surgem as formas geométricas das curvas. A seguir vêm os exercícios. Diversos autores ao longo de 24 séculos de história, apresentaram muitas outras caracterizações para estas curvas. As primeiras se serviam de um cone como elemento de partida. A seguir, vieram: a do foco e diretriz, a caracterização bifocal, as que servem de construções mecânicas, a que faz uso de ângulos como parâmetros, a que utiliza álgebra linear. Se existem varias formas de se apresentar as cônicas, por que apenas a caracterização bifocal dessas curvas sobreviveu para o ensino do inicio deste nosso século?O ensino de cônicas no ensino médio no Brasil, provavelmente não acontece para a maioria dos alunos. E, quando acontece , se restringe normalmente a um curto período (uma a duas semanas) no terceiro ano do ensino médio. A forma que se ensina é geralmente a que foi citada acima. Exceção feita à parábola, que por ser a única a se enquadrar com o conceito de função, é estudada como função quadrática ou polinomial do segundo grau, na oitava serie do ensino fundamental e no primeiro do ensino médio. Serve como bom exemplo de função, mas a sua intima ligação com o universo das cônicas, costuma ser ignorada pelos professores na sua apresentação. Sendo o estudo de cônicas muito mais antigas que o estudo das funções, constata-se que diminuiu a importância dada para o ensino das cônicas. (as funções só aparecem com François Viète, no século XVI).(Quaranta, Guimarães, p.1-2)

Atualmente no Estado de São Paulo, desde 2008, (sendo atualizados em 2009) os professores da rede pública de ensino, devem seguir uns cadernos denominados "Caderno do Professor". Neles as grades curriculares vêm explicitadas, bimestre por bimestre. São dadas sugestões de exercícios, e de avaliação. O conteúdo é explicado através de atividades para o aluno. Na sexta série, terceiro bimestre, é estudado o tema proporcionalidade. No caso de duas grandezas inversamente proporcionais é sugerido que se colocados os valores correspondentes dessas grandezas num plano cartesiano, elas devem seguir uma curva que é chamada de hipérbole. O termo hipérbole aparece somente como um nome da curva, sem nenhuma explicação. No primeiro ano do ensino médio, a parábola aparece somente como gráfico de uma função quadrática. No primeiro bimestre do terceiro ano, as cônicas aparecem na geometria analítica. A parábola é apresentada como: dadas duas grandezas x e y que estão inter relacionadas, se y e são diretamente proporcionais, temos como gráfico uma parábola. No caso de uma elipse, se diz que ela é uma circunferência "achatada" e obtém o a equação de uma elipse através da equação da circunferência, como no Marmo, ps. 60 e 61. A hipérbole aparece como a curva que modela duas grandezas x e y que são inversamente proporcionais. Da equação xy = constante, é deduzida a equação normal da hipérbole.

Bibliografia

ALPOIN, J.F.P.- (1748) -Exame de bombeiros- Madri - Franciso Maritnezpad.

BEZERRA. M. J. – (1974)- Curso de Matemática – São Paulo- Companhia Ed. Nacional

BÉZOUT, M. –(1766) - Cours de mathématiques, a l´ usage des grandes du pavillon et de La marine – Paris- Musier fils libraire.

BOURBAKI, N. – (1974)- Éléments d´histoire des mathématiques – Paris – Hermann

CATUNDA, O. DANTAS,M.S. NOGUEIRA,N.C.- (1971)- Matemática 1- Rio de Janeiro - Livro Tecnico.

DANTE,L.R.(2004) - Matemática, contexto e aplicações-São Paulo – Editora Ática.

FREIRE, O. –(1961)- Desenho Geométrico e Noções de Geometria- São Paulo- Liv. Francisco Alves.
FIC –(1829) -Elementos de Geometria, contendo noções sobre as curvas usuaes – Revisto e Adaptado à Instrução Secundária do Brazil por Raja Gabaglia-Livraria Garnier – Impresso por Dupont em Paris.
FUNBEC- (1975)- Mathematics for High School. Intermediate Mathematics Parte 1- Teacher's commentary.- São Paulo - Livraria Editora Ltda.
HEATH, T.L.- (1963) – A History of Greek Mathematics – Oxford – Clarendon
GIOVANNI,J.R.BONJORNO,GIOVANNI,J.-.(1994)-Matemática fundamental- segundo grau-volume único- São Paulo -FTD.
IEZZI,G.DOLCE,O.TEIXEIRA,C.MACHADO,N.GOULART-(1990)- Matemática- terceira série do ensino medio- São Paulo - Atual Editora.
IEZZI,G.DOLCE,O.DEGENSZAJN,D.PERIGO,R.(2002)- Matemática-volume único– São Paulo- Editora Atual.
LACROIX, S.–(1807)- Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et sphérique et d´application de l´Algèbre a la Geométrie – Paris –Courcier.
LACROIX, S.–(1808)-Éléments de Géometrie, a la usage de l École Centrale des Quatre-Nations– Paris – Courcier.
LAPA,N. SAMPAIO,J.L. CAVALCANTE,S.- (1979)-.Estudos de matemática-terceira série-segundo grau-São Paulo-Editora Moderna.
LIMA,E.MORGADO,E.CARVALHO,P.WAGNER,E. - (1992) - A matemática do ensino médio, volumes 1,2 e 3- Rio de Janeiro - SBM.
MARMO,C.M.B-(1966)-Curso de desenho-livro 4- Cônicas -São Paulo - distribuido pela Livraria Nobel S.A.
NERY,C. JAKUBOVIC,J. -(1987)- Curso de Matemática-volume3 -São Paulo -Editora Scipione..
PAPUS D´ALEXANDRIE- (1982) – La Collection Mathématique- Trd. Eechke- Paris – Blanchard.
QUARANTA. F.N. e GUIMARÃES L. C. (2011) http://www.sbemrj.com.br/spemrj6/artigos/d6.pedf.
QUINTELLA, A. – (1951)- Matemática para o 3º ano científico - São Paulo – Comp. Ed. Nacional
ROXO, E. – (1946) – Curso de Matemática- 3ªSérie (Geometria)- Rio de Janeiro – Liv. Francisco Alves.
SACROBOSCO, J. – (1991) - Tratado da Esfera- trad.Pedro Nunes- (atualização do português Carlos Ziller)- Rio Claro -Editora Unesp
SAMPAIO, F. A. - (2009) - Matemática – historia ,aplicações e jogos matemáticos- volume3.-São Paulo- Editora Papirus.
SANGIORGI,O.WATANABE,R.MONTEIRO,J - (1969) - Curso moderno- segundo ciclo-volume1- São Paulo - Companhia Editora Nacional
SERRASQUEIRO, J.A. – (1890)- Tratado de Geometria Elementar- 7ª edição – Coimbra – Universidade de Coimbra
SMOLE,K.ROKU- (1993) -.Matemática-ensino médio-volume3.São Paulo :Editora Saraiva.
STÁVALE, J. –(1942)- Quinto Ano de Matemática- São Paulo –Comp. Edt. Nacional.
THIRÉ, C. –(1934) - Manual de Matemática- 4º ano- Rio de Janeiro - Liv. Francisco Alves.
VALENTE, W. –(1999)- Uma História da Matemática Escolar no Brasil (1730-1930) – São Paulo – Annablume.
VALENTE, W. (0rg.) - (2004) – O Nascimento da Matemática no Ginásio— São Paulo.
YOUSSEF,A.FERNANDES,V.P. - (1993).Matemática, conceitos e fundamentos-São Paulo:Editora Scipione