TRABAJO FIN DE MÁSTER

DESEMPEÑO DE ALUMNOS DE SEGUNDO CURSO DE SECUNDARIA EN UNA PROPUESTA DIDÁCTICA BASADA EN EL MÉTODO DE LA CAJA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

MÁSTER EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Rocío Pérez Batanero

Granada, Julio de 2020

UNIVERSIDAD
DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

MÁSTER EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

CURCO 2019/2020

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Trabajo Fin de Máster realizado bajo la tutela de la doctora Dª. Marta Molina González del Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca que presenta Rocío Pérez Batanero, dentro del Máster Universitario en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada.

Fdo: Rocío Pérez Batanero

Vº Bº de la tutora

Fdo. Marta Molina González

RESUMEN

Ante la necesidad de investigar nuevos métodos de enseñanza que favorezcan un aprendizaje significativo de las identidades notables, este trabajo presenta una propuesta didáctica para su enseñanza basada en el método de la caja. Se propone el uso de diferentes representaciones (simbólica, geométrica y simplificada) de manera que el alumno aprenda a desarrollar y factorizar identidades notables teniendo como referencia la representación geométrica de las mismas. Mediante un experimento de enseñanza con alumnado de segundo curso de secundaria se estudian las potencialidades y dificultades de la propuesta diseñada analizando los errores cometidos y el nivel de desempeño individual de los sujetos.

Términos clave: identidades notables, álgebra escolar, método de la tabla, modelo de área, factorización, educación secundaria, educación matemática.

ABSTRACT

In the context of researching new teaching methods that promote meaningful learning in school algebra, this study presents a teaching unit designed to enhance students' learning of quadratic identities using the box method. Using different representations (symbolic, geometric and simplified) the students learn to expand and factorise quadratic identities helped by a mental image of the geometric representations. Through a teaching experiment with second-year secondary school students we made a research of the potentialities and difficulties of the teaching unit analysing the mistakes and the individual performance level of the students.

Keywords: quadratic identities, school algebra, box method, area model, factorisation, secondary education, mathematic education,

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría dedicar estas líneas a la doctora Dª. Marta Molina por las enseñanzas y experiencias transmitidas. Por mostrar su comprensión, paciencia, exigencia y sabiduría que me han guiado en mi primera experiencia en la investigación en educación mientras ha mostrado su apoyo y cercanía durante todo el proceso.

A mi familia y a las personas cercanas que de alguna manera han colaborado conmigo en este trabajo, escuchándome, mostrando interés y ofreciéndome apoyo emocional, les expreso mi más sincero agradecimiento. En especial, a aquellas personas que en los momentos de mayor dificultad me han animado a seguir superándome.

Al grupo 2 ESO A del IES Montes Orientales por valorar mi trabajo, por adaptarse a las nuevas circunstancias y por contagiarme siempre su alegría y buen humor. En especial, quiero dedicar mi agradecimiento al grupo de estudiantes que ha podido participar en esta investigación y ha hecho posible este trabajo realizando las entregas como las circunstancias lo exigían. En esta situación tan excepcional han mostrado una excelente predisposición y entusiasmo por aprender y me han acompañado en la distancia.

A la Universidad de Granada, por ofrecer el Máster en Didáctica de las Matemáticas acercando la investigación en educación al mundo de la docencia, en mi caso, en secundaria. A todos los profesores que han sabido transmitirnos su pasión y entusiasmo por la educación, mejorando con su esfuerzo la educación pública que tanto valoro. Este curso ha resultado exigente, pero sin duda, ha merecido la pena.

El presente trabajo de investigación se ha realizado dentro del proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2016-75771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

ÍNDICE

Introducción 1

I. Planteamiento del problema de investigación 3

I. 1. Motivación del problema a investigar 3

I. 2. Justificación de la investigación 4

I. 3. Problema y objetivos de la investigación 6

II. Marco teórico y antecedentes 7

II. 1. El álgebra escolar 7

II. 2. Representaciones 7

II. 3. La enseñanza de las identidades notables 9

II. 4. Métodos para la enseñanza de las identidades notables que combinan varios sistemas de representación 10

II.4.1. El modelo de área 10

II.4.2. El método de la caja 11

II.4.3. Algebra Tiles 12

II.4.4. Estudios previos 14

II.4.5. Uso combinado del método de la caja con el modelo de área 17

III. Metodología y diseño de la investigación 21

III. 1. Tipo de investigación 21

III. 2. Sujetos 22

III. 3. Diseño de la propuesta didáctica 22

III. 4. Descripción de las sesiones 23

III. 5. Diseño de la recogida de datos 26

III. 6. Instrumentos de recogida de datos 28

III.6.1. El cuaderno de trabajo 28

III.6.2. Diseño de las entrevistas semiestructuradas 35

III. 7. Desarrollo de las sesiones 36

IV. Análisis de datos y resultados ... 39
IV. 1. Clasificación de los errores ... 39
IV. 2. Análisis de los errores ... 42
IV. 3. Análisis individual del desempeño de los sujetos ... 46
IV.3.1. Análisis del desempeño del sujeto A ... 47
IV.3.2. Análisis del desempeño sujeto Al ... 48
IV.3.3. Análisis del desempeño de la alumna An ... 49
IV.3.4. Análisis del desempeño de la alumna C ... 50
IV.3.5. Análisis del desempeño de la alumna Cl ... 51
IV.3.6. Análisis del desempeño de la alumna D ... 52
IV.3.7. Análisis del desempeño de la alumna J ... 52
IV.3.8. Análisis del desempeño del alumno Ju ... 53
IV.3.9. Análisis del desempeño del alumno R ... 54
IV. 4. Discusión de los resultados obtenidos ... 55
V. Conclusiones ... 58
VI. Referencias ... 61
ANEXO 1: Propuesta Didáctica ... 64
ANEXO 2: Guía de preguntas para las entrevistas semiestructuradas ... 110
ANEXO 3: Tabla de errores ... 112

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Conexiones entre las diferentes representaciones 8
Figura 2 . Modelo de área para la multiplicación de polinomios 10
Figura 3. Método de la caja para multiplicar polinomios 11
Figura 4 . Método de la caja para factorizar polinomios 12
Figura 5. Piezas de Algebra Tiles 13
Figura 6. Modelos de matrices en los que se basa Norton 13
Figura 7. Ejemplo del método FOIL 14
Figura 8. Ejemplo del método cross-multiplication para factorización......................... 16
Figura 9. Diferentes representaciones para la multiplicación de una expresión algebraica 17
Figura 10. Destrezas a desarrollar por el alumnado 29
Figura 11. Ejemplo de error 11 40
Figura 12. Errores 12 y 13 41
Figura 13. Errores 31 y 32 41
Figura 14. Error por desconocer el procedimiento (33) 42
Figura 15. Error 55 42
Figura 16. Distribución de cada tipo de error por alumno (En %) 46
Figura 17. Ejemplo de diana de desempeño (alumno Al) 46
Figura 18. Dianas de desempeño de todos los alumnos 47
Figura 19.Error al transcribir información (54) 48
Figura 20. Respuesta al ejercicio F2d del alumno Al 49
Figura 21. Errores 11, 12 y 13 de la alumna C 50
Figura 22. Respuesta a la actividad 11D de la alumna C 50
Figura 23. Respuesta de la alumna Cl a la actividad 14a 51
Figura 24. Respuestas de la alumna Cl a las actividades 16b, 16d y F3c. 52
Figura 25. Respuesta de la alumna J en la actividad F3a 53
Figura 26. Respuesta a la actividad F4 de la alumna J 53
Figura 27. Respuesta a la actividad F1a del alumno Ju 54
Figura 28. Respuesta a la actividad 9d del alumno Ju 54
Figura 29. Respuesta a la actividad F3f del alumno Ju 54
Figura 30. Respuesta en la actividad 14n del alumno R 55
Figura 31. Respuestas a las actividades 15b y F3a 55

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Diferentes representaciones del cuadrado de una suma 18
Tabla 2. Adaptación del método de la caja para factorizar identidades notables........... 19
Tabla 3. Índice de la propuesta didáctica 23
Tabla 4. Objetivos y contenidos de la sesión 1 23
Tabla 5.Objetivos y contenidos de la sesión 2 24
Tabla 6. Objetivos y contenidos de la sesión 3 25
Tabla 7. Objetivos y contenidos de la sesión 4 25
Tabla 8. Objetivos y contenidos de la sesión 5 26
Tabla 9. Objetivos y contenidos de la sesión 6 26
Tabla 10. Organización y características generales de las sesiones de trabajo en aula .. 27
Tabla 11. Distribución de las actividades del cuaderno realizadas por sesiones............ 28
Tabla 12. Clasificación de las actividades del cuaderno de trabajo según las destrezas 30
Tabla 13. Descripción de la destreza I1.1.. 31
Tabla 14. Descripción de la destreza I1.2.. 31
Tabla 15. Descripción de la destreza I1.3.. 32
Tabla 16. Descripción de la destreza I.2.. 33
Tabla 17. Descripción de la destreza I3... 34
Tabla 18. Descripción de la destreza I4... 34
Tabla 19. Descripción de la destreza II1 35
Tabla 20. Descripción de la destreza II2 35
Tabla 21. Desarrollo de las sesiones.. 36
Tabla 22. Clasificación de los errores según su origen 40
Tabla 23. Recuento total de errores por alumno.. 43
Tabla 24. Tipos de errores relacionados con las distintas destrezas.............................. 43
Tabla 25. Síntesis de los errores cometidos según las destrezas 44
Tabla 26. Número de errores que comete cada alumno según las destrezas.................. 45
Tabla 27. Distribución de los tipos de error por alumno... 45

INTRODUCCIÓN

Este documento constituye la memoria del Trabajo de Fin de Máster de su autora Rocío Pérez Batanero, realizado en el máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. El estudio que se describe se ha realizado durante el curso 2019/2020 bajo la tutela de la doctora Dª Marta Molina.

La investigación viene motivada por el interés de la comunidad educativa en resolver las dificultades que muestra el alumnado de educación secundaria en tareas que implican el reconocimiento y aplicación de las identidades notables. Para ello, se plantea un experimento de enseñanza en el que, a través de una propuesta didáctica para estudiantes de segundo curso de secundaria, se promueve y analiza el aprendizaje de las identidades notables mediante una aproximación geométrica al método de la caja (nomenclatura que utilizaremos de aquí en adelante como traducción de su nombre en inglés “box method”) basada en el modelo de área.

La presente memoria consta de cinco capítulos cuyo contenido se describe de forma breve a continuación.

En el primer capítulo, *I. Planteamiento del problema de investigación*, se define el problema y los objetivos de la investigación, y se aporta una justificación de la misma. Dicha justificación está basada en la experiencia personal docente de la investigadora, la consideración curricular del álgebra escolar y la necesidad de implementar nuevas propuestas didácticas en el aula.

El siguiente capítulo *II. Marco teórico y antecedentes*, se recogen las ideas teóricas que sustentan el trabajo y se revisan los trabajos previos o antecedentes que hemos considerado más relevantes para la presente investigación. Está organizado en cuatro apartados relativos, respectivamente, al álgebra escolar, las representaciones, la enseñanza de las identidades notables y los métodos para la enseñanza de las identidades notables que combinan varios sistemas de representación. En este último apartado, se describen el modelo de área, el método de la caja, Algebra Tiles, los estudios previos y la propuesta de uso combinado del método de la caja con el modelo de área.

En el tercer capítulo, *III. Metodología y diseño de la investigación*, se define la metodología de la investigación y los criterios utilizados en su diseño. Dado que se trata de un experimento de enseñanza, se describen las diferentes etapas de la investigación incluyendo la preparación de las sesiones, la implementación de las mismas y los análisis de datos realizados.

En el capítulo cuarto, *IV. Análisis de datos y resultados,* se describe el análisis descriptivo de los datos recogidos en la investigación y se presentan los resultados obtenidos de acuerdo con las categorías de análisis definidas previamente. Además, se realiza un análisis individual del desempeño de cada uno de los sujetos en base a las diferentes destrezas requeridas para la resolución de las diferentes actividades. Al finalizar este capítulo se discuten los resultados obtenidos y se destacan los principales aportes de la investigación llevada a cabo.

Finalmente, en el capítulo *V. Conclusiones,* se responde a las preguntas y objetivos planteados en el primer capítulo, a partir de los resultados obtenidos en la investigación. Paralelamente a las conclusiones extraídas, se plantean las limitaciones del presente trabajo y posibles líneas de investigación para su continuación.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La investigación que se describe en esta memoria consiste en un experimento de enseñanza realizado con estudiantes de segundo curso de secundaria en el que se diseña e implementa una propuesta didáctica para la enseñanza de las identidades notables a través de una adaptación del método de la caja. En dicha propuesta se pretende que el alumnado aprenda a desarrollar y factorizar identidades notables teniendo como referencia una representación geométrica de las mismas. En dicho contexto se analiza el éxito del alumnado y la mejora de sus habilidades, así como las potencialidades y limitaciones de la propuesta.

En este primer capítulo detallamos la motivación del problema de investigación planteado en este trabajo, justificamos su interés y presentamos el problema definiendo los objetivos generales y específicos de la investigación.

I. 1. MOTIVACIÓN DEL PROBLEMA A INVESTIGAR

La motivación del trabajo de investigación que se presenta radica en las dificultades que presenta el alumnado de educación secundaria en el aprendizaje del álgebra. Muchos estudiantes muestran un nivel competencial insuficiente para resolver satisfactoriamente los problemas algebraicos que se les presentan. En particular, muestran gran dificultad en tareas que implican la identificación, desarrollo y factorización de identidades notables.

En su breve experiencia profesional, la autora de este trabajo se ha encontrado ante la dificultad, año tras año, de conseguir que gran parte del alumnado realice transformaciones de expresiones algebraicas en diferentes contextos de forma correcta, encontrándose con el obstáculo de que los estudiantes incurren de forma reiterada en los mismos errores sin lograr un correcto desempeño.

A raíz de estas observaciones, surge la necesidad de investigar sobre nuevos métodos de enseñanza-aprendizaje que favorezcan un aprendizaje significativo de las identidades notables y de su utilidad en la factorización de expresiones algebraicas. De este modo, la presente investigación aporta una propuesta didáctica para la enseñanza de las identidades notables basada en un método para la factorización y desarrollo de las identidades notables que se apoya en un organizador gráfico.

La elección de dicho método surge por la experiencia de la investigadora como profesora en el Reino Unido y por el éxito del mismo que lo ha llevado a ser utilizado en diversos países como Australia, Estados Unidos, México o Reino Unido e incluido en el currículo de otros como Singapur. No en todas las propuestas curriculares se hace referencia al método con el mismo nombre. Una de las denominaciones más frecuentes en inglés es "*box method*" según la búsqueda online realizada, en consecuencia hemos decidido hacer referencia a este con el nombre de *"Método de la caja"* (Clausen-May, 2005; Chua, 2017; Leitze y Kitt, 2000; Sandoval, Sepúlveda y Suárez, 2017)

I. 2. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra resulta difícil para muchos estudiantes y muchos docentes constatan que estos no llegan a obtener un conocimiento algebraico satisfactorio a pesar del empeño puesto en su enseñanza, motivo por el cual numerosas investigaciones en educación matemática se centran en las dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar (Castro, 2012). Así, por ejemplo, Welder (2012) recopila variadas investigaciones que reflejan las dificultades más comunes y persistentes y ofrece información al profesorado para poder detectarlas. Paralelamente, Hoch y Dreyfus (2005) analizan las dificultades en el trabajo con expresiones algebraicas al aplicar fórmulas en contextos diferentes, cuyo caso particular son las fórmulas de las identidades notables.

Uno de los conceptos que el alumnado no llega a dominar durante gran parte de la enseñanza secundaria es el desarrollo y factorización de las identidades notables. Así, son numerosas las investigaciones dedicadas a las dificultades que muestran los alumnos en el trabajo con las identidades notables (Méndez y Martínez, 2008; Morales, 2008; Vega-Castro, Molina y Castro, 2012; Leong et al, 2010).

Por otro lado, las identidades notables tienen una importancia a nivel curricular en el álgebra escolar debido a las frecuentes aplicaciones de estas en los cursos de educación secundaria y bachillerato. Los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables que se deben trabajar en la asignatura de matemáticas en secundaria en España se recogen en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. En lo que se refiere al currículo del segundo curso de secundaria, curso en el que se contextualiza la presente investigación, encontramos que se hace referencia a las identidades notables en el bloque 2. Números y álgebra. Así, el criterio de evaluación

6 indica que el alumno debe ser capaz de “Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas”. (Real Decreto 1105/2014, 2015, p. 441). Y más concretamente, cabe destacar el contenido del estándar *6.3.: “*Utiliza las **identidades algebraicas notables** y las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas” (Real Decreto 1105/2014, 2015, p. 441). De forma análoga aparecen en los cursos sucesivos.

Si bien, el objetivo de la investigación se centra en un contenido muy concreto del álgebra escolar, las identidades notables, creemos que la propuesta didáctica que se describe es relevante para trabajar otros contenidos. De un lado, mediante la aplicación directa del método, se puede trabajar la factorización de expresiones cuadráticas con raíces enteras y la resolución de ecuaciones de segundo grado mediante la obtención de raíces del polinomio. De otro, la implementación de la propuesta didáctica permite trabajar otros contenidos como son la propiedad distributiva, jerarquía de las operaciones, expresiones algebraicas, áreas y perímetros y favorece el desarrollo del sentido espacial y del sentido estructural. Además permite al alumnado relacionar y conectar diferentes representaciones.

Finalmente, nos gustaría destacar la necesidad de la puesta en práctica y análisis de nuevas propuestas didácticas que mejoren los resultados actuales. Así, Leitze y Kitt (2000), mencionan que para el aprendizaje significativo en los productos notables en la asignatura de matemáticas dentro del ámbito educativo es indispensable el uso de varias herramientas que den alternativas y representen una nueva forma de trabajo en el aula, incluyendo material manipulable. De dicho trabajo se concluye que la adecuada aplicación de nuevas estrategias para la construcción del aprendizaje forma un importante apoyo para la adquisición de nuevos conocimientos.

Por todo lo anterior, creemos que la presente investigación contribuye, si bien en pequeña medida, a mejorar la enseñanza del álgebra adaptando una propuesta de enseñanza ya implantada en otros países, pero novedosa en España, y analizando el desempeño en la misma de los estudiantes.

I. 3. PROBLEMA Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Nos planteamos las siguientes preguntas de investigación que sirven de guía a este trabajo: ¿Qué errores y dificultades presentan los estudiantes de secundaria cuando abordan la factorización y desarrollo de identidades mediante una aproximación geométrica del método de la caja? ¿El uso de este método favorece un buen rendimiento del alumno en tareas de factorización y desarrollo de identidades notables? ¿Influye la capacidad del alumnado de relacionar y conectar las diferentes representaciones que intervienen en dicho método, en el rendimiento en tareas con identidades notables?

De esta forma, el problema de investigación viene definido por los siguientes objetivos **generales**:

- OG1. Diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza de las identidades notables a estudiantes de segundo curso de secundaria basada en el método de la caja.
- OG2. Analizar potencialidades y dificultades de dicha propuesta a partir del análisis de los errores cometidos y el desempeño de los estudiantes en las tareas que se incluyen en la propuesta didáctica.

Estos objetivos se concretan por medio de los siguientes objetivos específicos:

- OE1. Identificar y analizar en la literatura las propuestas de uso del método de la caja para la enseñanza de la factorización de identidades notables.
- OE2. Diseñar un experimento de enseñanza basado en una propuesta didáctica para la enseñanza de las identidades notables basada en el método de la caja.
- OE3. Analizar y clasificar los errores cometidos por el alumnado al trabajar con el método de la caja en el contexto del experimento de enseñanza.
- OE4. Describir el nivel de desempeño del alumnado en las tareas trabajadas en el contexto del experimento de enseñanza. Estas implican relacionar y conectar diversos métodos de representación y desarrollar y factorizar identidades notables.

II. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

En este capítulo presentamos el marco teórico y antecedentes de la investigación de forma sintética dadas las limitaciones de extensión de esta memoria. Se ha organizado en cuatro apartados: el álgebra escolar, representaciones, la enseñanza de las identidades notables y métodos para la enseñanza de las identidades notables que combinan varios sistemas de representación. Este último incluye el modelo de área, el método de la caja, Algebra Tiles, los estudios previos y la propuesta de uso combinado del método de la caja con el modelo de área.

II. 1. EL ÁLGEBRA ESCOLAR

La concepción actual del Álgebra es multidimensional y engloba el estudio de las relaciones funcionales, el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de estructuras abstractas de cálculos y relaciones, el desarrollo y la manipulación del simbolismo y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones (Kaput, 1998, 2000).

A nivel curricular, Kaput (2000) nos plantea que la imagen tradicional del álgebra se reduce a la simplificación de expresiones algebraicas, la resolución de ecuaciones y el aprendizaje de reglas de manipulación de símbolos, y que el álgebra ha sido enseñada y aprendida como un conjunto de procedimientos desconectado del resto del conocimiento matemático y del mundo real y cercano a los estudiantes. Para poder mejorar el currículo del álgebra en educación secundaria, Kaput (1995) define tres dimensiones a tomar en cuenta: (1) Amplitud de concepciones del álgebra coherentemente implementadas, (2) integración curricular del álgebra con otros contenidos matemáticos y (3) aproximación e implementación de una metodología más activa y relacionada con la tecnología.

En este trabajo abordamos las dos últimas. Como veremos más adelante, al introducir las representaciones geométricas para la enseñanza de las identidades notables estamos trabajando contenidos del bloque de geometría, incidiendo especialmente en el concepto de área. Por otro lado, al utilizar una plataforma multimedia con el recurso Algebra Tiles, estamos haciendo uso de tecnología, si bien de forma complementaria, pero permitiendo al alumno participar de forma activa.

II. 2. REPRESENTACIONES

En el contexto del álgebra se destaca el uso de variedad de representaciones externas (e.g., simbolismo algebraico, lenguaje verbal, tablas, gráficos) que ayudan a hacer presentes los objetos matemáticos abstractos que intervienen en esta subárea de las matemáticas . Es mediante el trabajo con las representaciones como las personas asignan significado y comprensión de las estructuras matemáticas y un sujeto tendrá una comprensión más completa de un concepto matemático cuanto mayor sea su conocimiento de las representaciones que lo hacen presente y de las propiedades del mismo que cada representación explicita (Rico, 2009).

Palarea (1998) indica que en el aprendizaje del álgebra la habilidad para conectar entre diferentes representaciones es esencial y muchas de las dificultades que el alumnado presenta pueden ser explicadas como una falta de coordinación de registros de las representaciones. Abordar el aprendizaje algebraico desde el uso de diferentes sistemas de representación proporciona al alumno medios que le ayudan a reflexionar sobre sus propios procesos cognitivos, además de facilitar las interacciones entre el profesor, los estudiantes y el contenido. En su estudio, Palarea presenta una propuesta en la que el álgebra es lenguaje que admite diferentes representaciones. En la Figura 1 se muestran las representaciones y conexiones utilizadas.

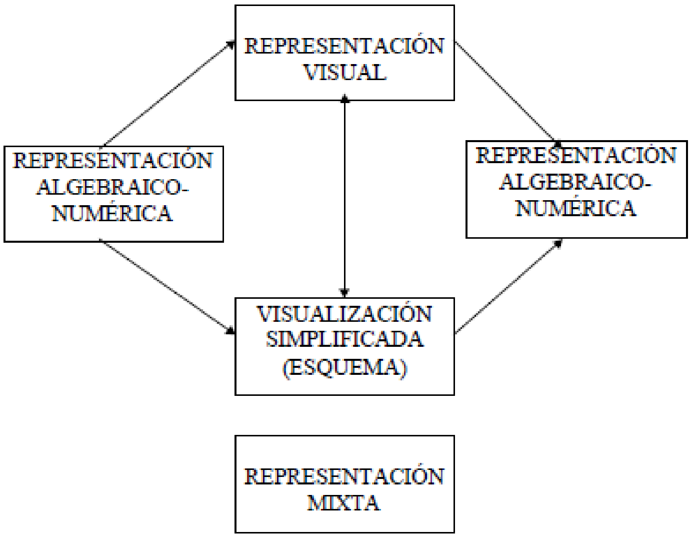


Figura 1. Conexiones entre las diferentes representaciones (Palarea, 1998)

Flores (2002) destaca, a su vez, que para poder aprovechar la fortaleza del simbolismo algebraico en la eficacia y rapidez en la manipulación simbólica, es importante que desde que el alumno se inicia en la manipulación de estos símbolos, dé significado y sentido a lo que representa esa manipulación. El uso de representaciones geométricas puede ayudar al estudiante a establecer una conexión con el simbolismo algebraico y a entender qué representan cada uno de los términos de una ecuación algebraica.

Partiendo de estas recomendaciones, en este trabajo, en el contexto de la factorización de las identidades notables, se combina la representación visual geométrica de áreas de rectángulos con el simbolismo algebraico, poniéndose en conexión.

II. 3. LA ENSEÑANZA DE LAS IDENTIDADES NOTABLES

En el álgebra escolar se distinguen diferentes tipos de expresiones algebraicas las cuales están compuestas de signos operacionales, numerales, letras y, opcionalmente, el signo igual o símbolos de orden (≤; ≥). Dentro de las expresiones que contienen el signo igual (igualdades algebraicas) pueden distinguirse entre ecuaciones e identidades según sean ciertas para algún valor de la variable (o incluso ninguno) o para cualquier valor de la variable (Vega-Castro, 2013). En ambos casos las expresiones contenidas en ambos miembros pueden ser fraccionarias o polinómicas, estando compuestas por monomios operados mediante operaciones aditivas y/o multiplicativas.

En este trabajo nos centramos en las identidades algebraicas polinómicas, concretamente en las conocidas como identidades notables: cuadrado de una suma, cuadrado de una resta y la diferencia de cuadrados. Estas identidades son de especial utilidad para la trasformación de expresiones algebraicas en el contexto de la simplificación de expresiones y la resolución de ecuaciones, y en este sentido se trabajan en la educación secundaria según las directrices curriculares.

En este contexto es relevante considerar el constructo sentido estructural algebraico[1], siendo este la competencia cognitiva o conjunto de capacidades necesaria para el trabajo flexible con las expresiones algebraicas, más allá de la aplicación mecánica de procedimientos de transformación de las mismas. Este conjunto de habilidades requiere el uso combinado de conocimiento conceptual y procedimental (Vega-Castro, 2013). Dicho concepto fue definido por primera vez por Hoch (2003) como la capacidad de reconocer la estructura algebraica y utilizar las características apropiadas de una estructura en un contexto dado, como guía para elegir las operaciones a realizar.

Al hablar de la estructura de expresiones algebraicas se distinguen dos acepciones: la estructura externa y la interna. La estructura externa hace referencia a los términos que componen la expresión, los signos que los relacionan y el orden de los diferentes elementos. Por otra parte, la estructura interna se refiere al valor de la expresión y las relaciones entre los componentes de la expresión con el mismo. Dos expresiones que

[1]De aquí en adelante nos referiremos al sentido estructural algebraico como sentido estructural

comparten estructura interna son equivalentes, y viceversa. Mediante el proceso de simplificación o transformación de una expresión, el cual implica un cambio de estructura externa, puede revelarse la estructura interna de la misma (Castro, 2012).

La factorización de expresiones algebraicas es uno de los procesos que modifica la estructura externa y no la interna. Se define como el proceso recíproco al de la multiplicación, que tiene como finalidad descomponer un polinomio en un producto de otros polinomios de grado menor, de una manera similar a como expresamos un número entero en un producto de otros enteros (Morales, 2008). La factorización es relevante en el álgebra escolar pues sirve de herramienta para simplificar, resolver ecuaciones y transformar expresiones. Una de las utilidades más destacadas de las identidades notables es la factorización de expresiones algebraicas.

II. 4. MÉTODOS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS IDENTIDADES NOTABLES QUE COMBINAN VARIOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

En esta investigación se diseña una propuesta didáctica para la enseñanza de las identidades notables que combina el método de la caja con el modelo de área y se complementa con el recurso online Algebra Tiles. En este apartado describimos los métodos de enseñanza de las identidades notables encontrados en la literatura en los que se combinan diferentes representaciones y sintetizamos los resultados de estudios previos al respecto de estos.

II.4.1. El modelo de área

Clausen-May (2005) presenta el método del modelo de área para la multiplicación de expresiones algebraicas como un método que ayuda al alumnado a dotar de significado a la operación. El modelo de área se presenta en contextos aritméticos para posteriormente aplicarlo a las expresiones algebraicas. Este método se apoya en la interpretación de la multiplicación como el cálculo del área de un rectángulo a partir de sus dos dimensiones. Por ejemplo, el producto $(x+3)(x+1)$ es presentado como el cálculo del área de un rectángulo de dimensiones (x+3) y (x+1). Ver Figura 2.

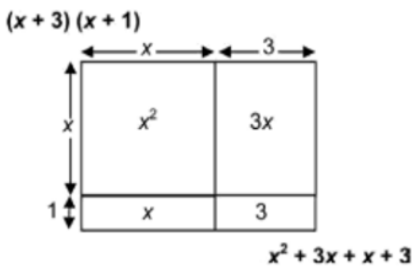


Figura 2 . Modelo de área para la multiplicación de polinomios (Clausen-May, 2005)

II.4.2. El método de la caja

Chua (2017) se refiere al método de la caja como “multiplication frame method” con sus siglas MF, término empleado en los centros de educación secundaria en Singapur. Este método se propone para desarrollar y factorizar expresiones algebraicas. En la Figura 3, se explica el procedimiento para desarrollar expresiones algebraicas.

<table>
<tr>
<td>Desarrolla $(x+2)(x+3)$
Paso 1. Escribe los términos del primer binomio en la primera fila y los términos del segundo binomio en la primera columna. Para referirnos al resto de celdas, le asignamos un número del 1 al 4 en sentido horario.</td>
<td>Ejemplo:
<table>
<tr><td>$\cdot$</td><td>x</td><td>2</td></tr>
<tr><td>x</td><td>Celda 1</td><td>Celda 2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Celda 4</td><td>Celda 3</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Paso 2. La celda 1 contiene el producto de x con x. Calcular el resto de productos de forma análoga para el resto de las celdas.</td>
<td>
<table>
<tr><td>$\cdot$</td><td>x</td><td>2</td></tr>
<tr><td>x</td><td>x^2</td><td>$2x$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$3x$</td><td>6</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Paso 3. Sumar los términos de las cuatro celdas para obtener el trinomio</td>
<td>Celda 1: x^2
Celda 2 y celda 4: $2x+3x=5x$
Celda 3: 6
$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$</td>
</tr>
</table>

Figura 3. Método de la caja para multiplicar polinomios, adaptada de Chua (2017)

En la Figura 4 se muestra un ejemplo de factorización utilizando este método. Chua indica que, en los libros de educación matemática de Singapur, en lugar de buscar el par de factores cuya suma se corresponda con el término lineal (paso 2a), el alumno realiza tantas cajas como pares haya y comprueban en el paso 3d.

<table>
<tr>
<td>Factoriza $x^2+8x+12$
Paso 1a. Escribe el término de grado 2 y el término independiente en las esquinas opuestas.
Paso 1b. Calcula el producto de ambos términos. El producto es $12x^2$.</td>
<td>
<table>
<tr><td>$\cdot$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>x^2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>12</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>Paso 2a. Descompón el producto calculado en el paso 1b ($12x^2$) en producto de factores de grado 1 y encuentra el par cuya suma sea igual a 8x. (Igualmente se puede descomponer el término de grado 1, 8x, en pares de factores que sean semejantes y buscar el par cuyo producto sea $12x^2$)
Paso 2b. Escribe los términos hallados en las otras dos celdas.</td>
<td><table><tr><td>·</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>x^2</td><td>$2x$</td></tr><tr><td></td><td>$6x$</td><td>12</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Paso 3a. Observa los dos términos de la fila central. Esto es, x^2 y $2x$, en el ejemplo.
Halla el máximo común divisor (MCD) de ambos y escríbelo a su izquierda.</td>
<td><table><tr><td>·</td><td></td><td></td></tr><tr><td>x</td><td>x^2</td><td>$2x$</td></tr><tr><td></td><td>$6x$</td><td>12</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Paso 3b. Divide cada uno de los dos términos por su MCD y escribe los resultados en la fila superior.
Por ejemplo, el resultado de dividir x^2 y $2x$ por x, es x y 2, respectivamente. De este modo, ya hemos hallado el factor $(x + 2)$.
Nota: Este paso debe ser conocido por los estudiantes ya que deben ser capaces de extraer factor común.</td>
<td><table><tr><td>·</td><td>x</td><td>2</td></tr><tr><td>x</td><td>x^2</td><td>$2x$</td></tr><tr><td></td><td>$6x$</td><td>12</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Paso 3c. Fijándote en los dos términos de la última fila, halla su MCD y escríbelo a su izquierda.</td>
<td><table><tr><td>·</td><td>x</td><td>2</td></tr><tr><td>x</td><td>x^2</td><td>$2x$</td></tr><tr><td>6</td><td>$6x$</td><td>12</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Paso 3d. Verifica que el producto de los factores hallados se corresponde con los términos de la tabla.
En el ejemplo, si multiplicamos 6 por x, obtenemos $6x$ y si multiplicamos 6 por 2, obtenemos 12.</td>
<td><table><tr><td>·</td><td>x</td><td>2</td></tr><tr><td>x</td><td>x^2</td><td>$2x$</td></tr><tr><td>6</td><td>$6x$</td><td>12</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Paso 4a. Expresa el trinomio inicial como producto de los dos binomios hallados en el paso 3d.
Paso 4b. Comprueba tu respuesta desarrollando el producto de dichos binomios.</td>
<td>$x^2 + 8x + 12 =$
$= (x + 2)(x + 6)$</td></tr>
</table>

Figura 4 . Método de la caja para factorizar polinomios, adaptado de Chua (2017)

II.4.3. Algebra Tiles

Algebra Tiles es un recurso online manipulativo que ayuda al alumno a comprender conceptos algebraicos usando figuras geométricas. Utiliza tres tipos de piezas de diferentes dimensiones cuyas áreas representan los monomios x^2, x y 1. También hay piezas de diferente color para representar términos negativos (Leitze y Kitt (2000). Con ellas se puede representar cualquier polinomio de segundo grado y realizar operaciones, resolver sistemas de ecuaciones, modelizar expresiones algebraicas y factorizar polinomios (Sandoval et al., 2017). Podemos encontrar esta herramienta en formato multimedia en diferentes plataformas que ofrecen este material didáctico gratuitamente. En nuestra propuesta didáctica utilizamos la creada por la OAME (Ontario Association for Mathematics Education, 2020). En la Figura 5 mostramos las piezas de este material.

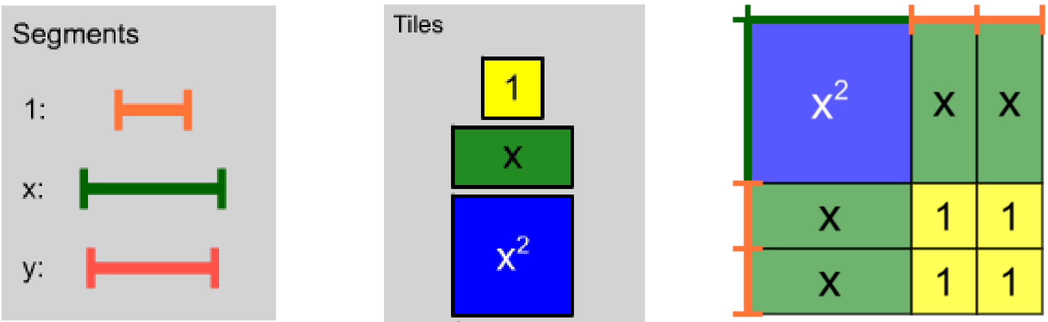


Figura 5. Piezas de Algebra Tiles (OAEM, 2020)

Norton (2007) describe cómo multiplicar y factorizar expresiones algebraicas con Algebra Tiles basándose en un modelo matricial de la multiplicación, similar al modelo de área. En este modelo, la multiplicación de dos factores se representa como el total de elementos de una matriz que tiene por dimensiones dichos factores. Su fundamentación es análoga al método del modelo de área. Así, con las piezas de Algebra Tiles se forma la matriz equivalente a la multiplicación que se desea calcular. Para factorizar se pide que el alumno tome las piezas que representan el polinomio y las coloque formando una matriz rectangular incidiendo en que el número de filas y columnas en que se puede colocar son los divisores y factores de la expresión dada. El objetivo final es que una vez el alumno haya conceptualizado el procedimiento, el material deje de ser necesario.

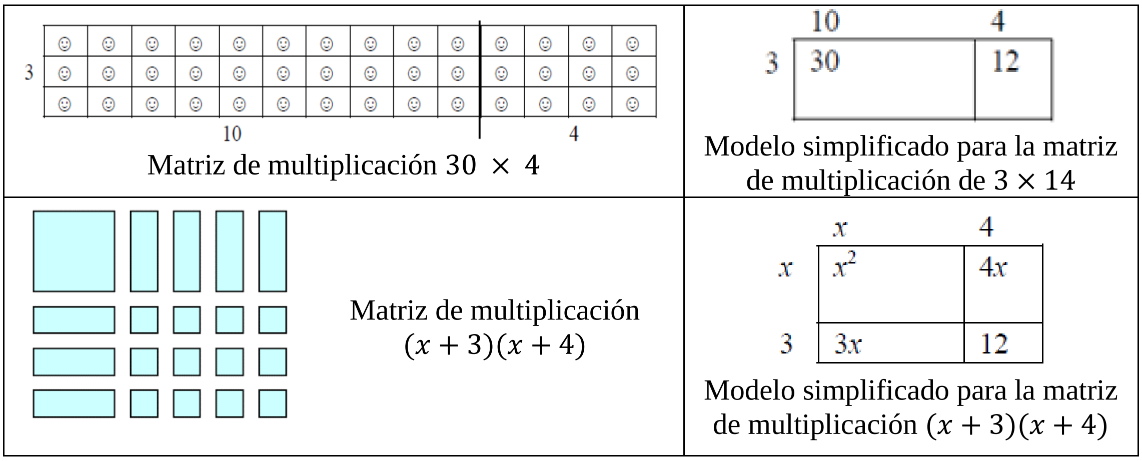


Figura 6. Modelos de matrices en los que se basa Norton (2007)

II.4.4. Estudios previos

Maseko (2012) estudia las fortalezas y debilidades de diferentes métodos para la factorización de polinomios: método de la caja, modelo de área, FOIL (por sus siglas en inglés, First term, Outer term, Inner term and Last term, consistente en ir multiplicando término a término, véase Figura 7).

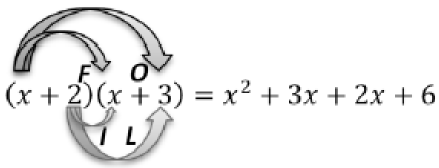


Figura 7. Ejemplo del método FOIL (Chua, 2017)

Indica que el principal inconveniente del método de la caja y el método del modelo de área está en la dificultad de encontrar los factores por prueba y error, cuyo cálculo mental resulta exigente y desmotivador para aquellos alumnos con más dificultades de cálculo. Asimismo, requieren que el alumno domine conocimientos previos tales como el cálculo del máximo común divisor y sacar factor común. Por otro lado, destaca que la principal fortaleza de estos métodos es que el estudiante es consciente de que debe encontrar los factores correctos y que se comprueba multiplicando.

Respecto al método de la caja, Sandoval (2017) realiza un estudio con alumnos de primer curso de universidad implantando el método de la caja para factorizar usando el algoritmo mostrado en la Figura 4. Los resultados indican que los estudiantes mejoran su rendimiento y muestran una mejor actitud y predisposición por aprender.

Sin embargo, Clausen-May (2005) desaconseja su uso por considerarlo como un método que se implementa rápidamente en el aula y se convierte en la aplicación mecánica de un procedimiento que no permite al alumno aprender de manera progresiva. Considera que dicho método ayuda a algunos alumnos a seguir el procedimiento de forma ordenada pero difícilmente les va a ayudar a comprender qué están haciendo. No permite comprender el significado de los términos negativos y el hecho de que todas las celdas de la caja tengan el mismo tamaño no permite al alumnado comprender los principios de la multiplicación de expresiones algebraicas. Según este autor, este método puede convertirse en un algoritmo irrelevante y fácil de olvidar.

Para evitar lo anterior, Chua (2017) propone una implementación del método de la caja para la factorización a través del aprendizaje por descubrimiento. Siguiendo una metodología centrada en el alumno, en lugar de que el docente explique y demuestre el algoritmo para la factorización, será el alumno quien lo descubra y defina. Para ello, se proponen una serie de actividades de dificultad progresiva que los alumnos resolverán trabajando en grupo y compartiendo sus explicaciones. Chua señala que la adaptación propuesta requiere tiempo, si bien, su aplicación favorece un aprendizaje significativo.

Existe otro método para la factorización denominado "ensayo y error" (Trial and error) y su algoritmo es similar al método de la caja, pero sin ayuda de la tabla para organizar la información. Por tanto, ambos métodos presentan las mismas dificultades. Yahya y Shahrill (2015) analizan estas dificultades. Unas derivan de déficits en la comprensión del método y de no saber ejecutarlo correctamente, otras, se deben a las dificultades con las operaciones de números enteros y monomios. El mismo estudio revela que la mayoría de los participantes solo habían adquirido un conocimiento instrumental de procedimientos, sin llegar a desarrollar un pensamiento relacional.

Morales (2008) diseña una propuesta didáctica basada en el modelo de área obteniendo buenos resultados y encontrando indicios de aprendizajes potencialmente significativos estableciendo significados geométricos a los símbolos y las operaciones algebraicas, mejorando las operaciones algebraicas, buen nivel de desempeño y comprensión de la factorización y mejora de la actitud hacia las matemáticas. Destacan que el tiempo fue insuficiente en varias ocasiones para realizar las actividades.

Sobre Algebra Tiles Gatley (1991), Thornton (1995) y Larbi (2011) indican que esta herramienta mejoró el rendimiento de aquellos estudiantes que la emplearon frente a los que utilizaron una metodología tradicional. Leong et al. (2010) y Leitze y Kitt (2000) destacan el aumento de la motivación del alumnado. Alcívar e Imacaña (2018) argumentan la importancia de utilizar material didáctico multimedia para el aprendizaje de productos notables. Norton (2007) destaca que usando Algebra Tiles aquellos alumnos con pensamiento visual desarrollado mejorarán sus habilidades de manipulación simbólica. Méndez (2012) indica que esta herramienta permite que el alumno desarrolle habilidades cognitivas relacionadas con estructuras lógico matemáticas como la reversibilidad (al descomponer el polinomio) y favorece el pensamiento abstracto al buscar regularidades.

Otras propuestas combinan más de un método. Leitze y Kitt (2000) proponen el uso de Algebra Tiles combinado con el método de la caja para mejorar el pensamiento algebraico. Los autores reclaman la necesidad de trabajar con materiales manipulativos y convertir el álgebra en una materia menos abstracta. Destacan la necesidad de reducir el número de alumnos que tratan el álgebra de forma memorística. En su propuesta, son los alumnos los que construyen las piezas del modelo de Algebra Tiles recortando una plantilla. Posteriormente, plantean una actividad inicial para trabajar los conceptos multiplicación y factor mediante la construcción de rectángulos que tengan una determinada área. Seguidamente, proponen un acercamiento constructivista donde el alumno aprende a factorizar por descubrimiento. Dado un polinomio, el estudiante debe agrupar las piezas de Algebra Tiles hasta formar un rectángulo y representar este trabajo mediante un boceto. Así, acaban identificando los pasos seguidos durante el proceso y definiendo el algoritmo. Finalmente, cuando dominan la técnica, se les presenta el método de la caja como modelo simplificado de sus bocetos. Sugieren que el uso de Algebra Tiles requiere dejar tiempo suficiente al alumnado para que se familiarice con el modelo. Con esta propuesta mejoraron los resultados en estudiantes de muy diferente nivel intelectual y motivacional (fue implementada con alumnado de secundaria, universitarios y de centros penitenciarios).

Finalmente, Leong et al. (2010) ofrecen una propuesta de enseñanza de la factorización de expresiones cuadráticas que combina AlgeCards, el “cross-method” y el diagrama rectangular (similar al método de la caja). Con ella pretenden ofrecer un método que requiera pocos conocimientos previos, resulte sencillo al alumno y refuerce la idea de la factorización como operación inversa a la multiplicación. La propuesta se presenta como una transición de los procedimientos manipulativos a los simbólicos. Comienza usando las AlgeCards (piezas similares a las de Algebra Tiles) de igual manera que Leitze y Kitt (2000). Posteriormente, se introduce el diagrama rectangular (similar al método de la caja) para aplicar el algoritmo cross-multiplication method para factorizar, ya conocido por el alumnado. En la Figura 8 se muestra cómo factorizar $x^2 + 8x + 12$ con este método.

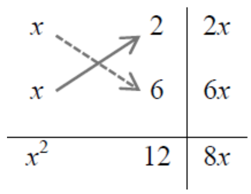


Figura 8. Ejemplo del método cross-multiplication para factorización (Chua 2017)

El objetivo es que comprendan la conexión entre las distintas representaciones (simbólica, modelo con Algebra Tiles y el diagrama rectangular). En la siguiente sesión, se invita al alumnado a que únicamente utilice el diagrama rectangular presentando términos con coeficientes de mayor valor absoluto y términos negativos. Una vez el alumno ha conceptualizado la conexión entre representaciones, seguirá utilizando el método “cross-multiplication” para la factorización de polinomios. Los resultados del estudio mostraron mejoras significativas en la factorización de expresiones cuadráticas y una mayor motivación por parte del alumnado, si bien la implantación del método requirió bastante tiempo.

II.4.5. Uso combinado del método de la caja con el modelo de área

Atendiendo a las dificultades y limitaciones del método de la caja referidas en la literatura y para dar respuesta al objetivo de investigación OE2, nuestra propuesta es adaptarlo y trabajar de forma combinada con el modelo de área. Se persigue que el alumno se forme una imagen mental de la representación geométrica de las identidades notables, evitando reducir el uso del método de la caja a la ejecución de un procedimiento sin comprender su significado. Además, al utilizar el mismo método para el desarrollo y la factorización de las identidades notables reforzamos la idea de que la multiplicación y la factorización están relacionadas siendo una la operación inversa de la otra.

De esta forma, optamos por un uso combinado de tres tipos de representaciones: una representación geométrica, la representación por medio de simbolismo algebraico y una representación intermedia que denominamos simplificada. En la Figura 9 se muestra, a modo de ejemplo, la triple representación del producto $2x \cdot (3x + 1)$. Para calcular su resultado basta con sumar las áreas de los rectángulos parciales.

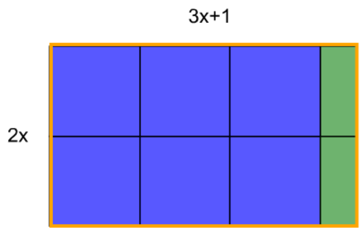
Representación simbólica	Representación geométrica	Representación simplificada (método de la caja)
$2x \cdot (3x+1) =$ $= 2x \cdot 3x \ + \ 2x \ \cdot \ 1 \ =$ $= \ 6x^2 \ + \ 2x$		$\cdot$ | 3x | + 1 2x | $6x^2$ | +2x

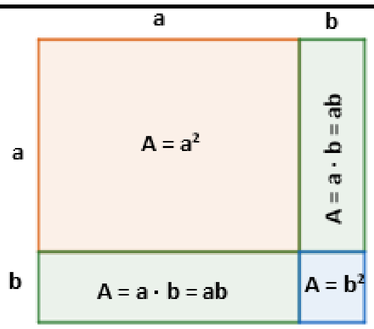
Figura 9. Diferentes representaciones para la multiplicación de una expresión algebraica (Adaptada de Palarea, 1998)

De este modo se busca favorecer que el alumnado asocie la operación multiplicación con el cálculo de áreas y haga uso de la propiedad distributiva en operaciones algebraicas. Utilizamos el método de la caja como organizador gráfico que nos permite representar de forma simplificada el modelo geométrico. Esta representación en forma de tabla también alude a las áreas, pero sin la necesidad de que su tamaño sea proporcional a los rectángulos que representan. Así se calculan de forma ordenada las áreas o productos parciales y luego se suma para hallar el resultado final.

Siguiendo las recomendaciones de Alcívar e Imacaña (2018) sobre la utilización de material didáctico multimedia para el aprendizaje de productos notables, en la propuesta didáctica se hace uso de la herramienta Algebra Tiles para complementar el método antes expuesto y facilitar la visualización y la representación de los polinomios.

En la propuesta didáctica se aborda el estudio de las identidades notables utilizando las tres representaciones señaladas y se parte de la representación geométrica del cuadrado de una suma (Tabla 1). Esta representación geométrica nos muestra de forma visual la equivalencia de dos expresiones con diferente estructura externa: $(a+b)^2$ que corresponde al área de un cuadrado de lado (a + b) y $a^2 + 2ab + b^2$ que es el área total, formada por dos cuadrados (a^2 y b^2) y dos rectángulos idénticos (2ab).

Tabla 1 Diferentes representaciones del cuadrado de una suma

<table>
<tr><th>Representación simbólica</th><th>Representación Geométrica</th><th>Representación simplificada (Método de la caja)</th></tr>
<tr><td>$(a+b)^2 =$
$= a^2 + 2ab + b^2$</td><td>
</td><td><table><tr><td>·</td><td>A</td><td>+ b</td></tr><tr><td>a</td><td>a^2</td><td>ab</td></tr><tr><td>+b</td><td>ab</td><td>b^2</td></tr></table></td></tr>
</table>

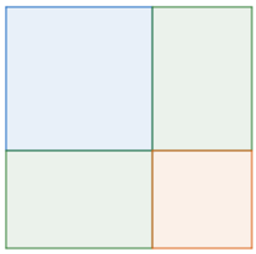
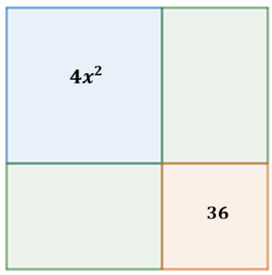
Se propone que el alumno desarrolle las identidades notables de este modo. Para introducir el método se elige el cuadrado de una suma por no tener coeficientes negativos y porque facilita su representación geométrica, pero de igual forma se va a trabajar con expresiones con coeficientes negativos. El docente explicará que, aunque la representación geométrica cambie, el procedimiento sigue siendo válido por corresponderse con la aplicación de la propiedad distributiva.

Una vez los alumnos han conceptualizado la relación entre las diferentes representaciones, se introduce el procedimiento para factorizar las identidades notables. Dado que factorizar es la operación inversa a la multiplicación, basándonos en el modelo de área presentamos la factorización de una identidad notable como el proceso de hallar los lados de la representación geométrica de la expresión a factorizar. Los pasos a seguir para factorizar una identidad notable son los siguientes:

1. Identificar si se trata de una identidad notable
2. Visualizar y relacionar dicha expresión con la representación geométrica de la identidad notable cuadrado de una suma
3. Usar el método de la caja para factorizar
    a. Identificar los términos que se corresponden con cuadrados perfectos
    b. Situarlos en la posición relativa de los cuadrados de la representación geométrica cuadrado de una suma
    c. Hallar los factores de dichos cuadrados (pensando que es el lado de la figura)
    d. Completar el resto de la caja y comprobar que la suma de los factores coincide con la expresión inicial
4. Escribir la solución
5. Comprobar la operación

En la tabla 2 se muestra el ejemplo de factorización con el método de la tabla recogido en la propuesta didáctica.

Tabla 2. Adaptación del método de la caja para factorizar identidades notables

Factoriza $\mathbf{4x^2 + 36 + 24\,x}$ **Paso 1.** Identifico una posible identidad notable ✓ Tiene tres términos ✓ Dos de ellos son cuadrados ✓ El tercero es par Vamos a imaginar siempre que la identidad notable se corresponde a una figura como esta	
Paso 2. Relaciono los términos que se pueden corresponder con las diferentes áreas de la figura. Los términos cuadrados son $\mathbf{4x^2}$ y $\mathbf{36,}$ por lo que son los que van en las áreas azul y naranja	

Paso 3. En lugar de utilizar un dibujo, vamos a representarlo en una tabla como hacíamos con el método de la caja. Los términos que son **cuadrados** quedan situados en los espacios de la tabla que representan los cuadrados del dibujo inicial.	$\begin{array}{c\|c\|c} \cdot & & \\ \hline & 4x^2 & \\ \hline & & 36 \end{array}$
Paso 4. Buscamos los lados de los cuadrados que representan esas áreas. Es decir, buscamos los factores cuyo cuadrado sea igual a dichos términos. $\sqrt{4x^2} = 2x\,;\ \sqrt{36} = 6$	$\begin{array}{c\|c\|c} \cdot & 2x & 6 \\ \hline 2x & 4x^2 & \\ \hline 6 & & 36 \end{array}$
Paso 5. Completamos la multiplicación en la tabla hallando los términos que faltan, sabiendo que representan las áreas de los rectángulos y comprobamos que la **suma de los términos semejantes** coincide con la solución buscada. Observando el dibujo estos términos deben ser iguales, pues representan áreas de dos rectángulos iguales.	$\begin{array}{c\|c\|c} \cdot & 2x & 6 \\ \hline 2x & 4x^2 & 12x \\ \hline 6 & 12x & 36 \end{array}$
Paso 6. Escribimos la solución: la identidad notable como cuadrado de una suma, de una diferencia o suma por diferencia.	$4x^2 + 36 + 24\,x =$ $= (2x + 6)^2$

En este proceso de factorización es importante reconocer el significado geométrico que le estamos otorgando a la factorización de la identidad notable: se trata de hallar los lados de la figura que representan. De este modo se persigue evitar un aprendizaje memorístico (dificultad señalada por varios autores como Clausen-May, 2005; Méndez y Martínez, 2008; Vega-Castro, Molina y Castro, 2012; Chua, 2017). Por ello, creemos que es importante iniciar el trabajo con el cuadrado de una suma hasta que tenga lugar el proceso de abstracción de manera progresiva.

En este punto queremos señalar que al aplicar el método de factorización a las identidades notables, se reducen las dificultades destacadas por otros autores relativas al esfuerzo de encontrar los factores, cuyo cálculo mental resulta exigente y desmotivador para aquellos alumnos con más dificultades de cálculo. En nuestro caso, basta con que aprendan a identificar los términos cuadrados perfectos y hallen su raíz.

III. METODOLOGÍA Y DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Este capítulo está dedicado a caracterizar el tipo de investigación desarrollada, describir los sujetos participantes en el estudio y el diseño de la propuesta didáctica, así como detallar la recogida de datos realizada a partir de la descripción del diseño y aplicación de los instrumentos elaborados.

III. 1. TIPO DE INVESTIGACIÓN

Esta investigación es cuantitativa y cualitativa, de carácter descriptivo. Se trata de un experimento de enseñanza y se enmarcan en el paradigma de la investigación de diseño. Estos experimentos de enseñanza permiten estudiar las diferentes componentes de un proceso de enseñanza en su contexto natural. Su objetivo es comprender y mejorar la realidad educativa, a la vez que se busca desarrollar y analizar un diseño de enseñanza específico (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

Un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000). El investigador se convierte en una parte integral del sistema que está investigando, experimentando de primera mano el aprendizaje y razonamiento del alumnado ((Kelly y Lesh, 2000; Steffe y Thompson, 2000). Así, la investigación pretende explicar empíricamente por qué funcionan los diseños y sugerir cómo pueden adaptarse a nuevas circunstancias (Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer, y Schauble, 2003; Valverde, 2014).

En la presente investigación, se ha diseñado un experimento de enseñanza que incluye una propuesta de enseñanza implementada en modalidad online. Se persigue conseguir información que pueda ser exportada y adaptada a situaciones de enseñanza similares. Dicha propuesta se basa en una estrategia de enseñanza, el método de la caja, que se aplica en otros países para la multiplicación y factorización de polinomios y, en particular, el desarrollo de binomios al cuadrado (Chua, 2017). El presente estudio busca analizar su efectividad evaluando el proceso de aprendizaje de los sujetos participantes en un centro español donde tradicionalmente la metodología de enseñanza de dicho contenido difiere de la propuesta.

Al tratarse de un experimento de enseñanza, la investigación se lleva a cabo en tres fases: preparación del experimento (descrita en los apartados III.3, III.4, III.5 y III.6), experimentación (descrita en el apartado III.7) y análisis retrospectivo de los datos (desarrollado en el capítulo IV).

III. 2. SUJETOS

El centro educativo seleccionado es un Instituto de Educación Secundaria Obligatoria público calificado como centro de difícil desempeño por las características socio económicas desfavorables de muchas de las familias. Se encuentra situado en la localidad de Iznalloz (Granada), y a él acuden alumnos de diversas localidades cercanas de menor población. La muestra seleccionada es un grupo de 31 alumnos que cursaban segundo curso de secundaria (13-14 años de edad) durante el curso 2019-2010. Del total de alumnos, 25 cursaban la asignatura de matemáticas ordinaria, siendo 3 de ellos alumnos absentistas y el resto se desdoblaba en un grupo de compensatoria.

La elección de esta muestra de sujetos viene motivada por encontrarse la investigadora impartiendo docencia en él y tener la posibilidad de conocer a los sujetos de estudio y trabajar con ellos.

Debido a la situación excepcional de emergencia de salud pública ocasionada por el COVID-19, dos semanas antes de la implementación de este experimento de enseñanza la actividad docente pasó a realizarse en modalidad a distancia y online, con aquellos estudiantes que disponían de los medios necesarios. Así, la muestra quedó reducida a un total de 9 alumnos (6 niñas y 3 niños) que cursaron de forma virtual las sesiones de las que se compone este experimento de enseñanza. Para referirnos a los sujetos protegiendo su identidad, usaremos la inicial de su nombre.

Los estudiantes seleccionados constituyen una muestra representativa de los diferentes niveles del grupo clase, por lo que su rendimiento académico es variado. En las sesiones virtuales que forman parte de esta investigación muestran una buena disposición a participar y comunicarse. Previamente a la realización del experimento de enseñanza, se familiarizó al alumnado a trabajar en la modalidad online por un periodo de dos semanas. Antes de participar en el experimento, los alumnos no habían trabajado con identidades notables ni estaban familiarizados con el método de la caja.

III. 3. DISEÑO DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

En este apartado describimos el diseño de la propuesta didáctica cuya guía para el docente se adjunta en el Anexo 1. Se trata de una secuencia didáctica de actividades teórico-prácticas para enseñanza de las identidades notables en la asignatura de matemáticas del segundo curso de secundaria. Dicha propuesta utiliza el método de la caja combinado con el modelo de área que adaptamos y describimos en el *capítulo 2*.

La propuesta didáctica está organizada en seis sesiones cuya descripción general recogemos en la Tabla 3. En cada sesión se incluye una explicación de los contenidos mediante teoría y ejemplos, actividades e indicaciones didácticas para el docente. Describimos en detalle dichas actividades en el apartado *III.6.1. Cuaderno de trabajo*.

Para el diseño de las tareas de esta propuesta didáctica se ha tenido en cuenta que el proceso de abstracción para relacionar las tres representaciones (simbólica, geométrica y simplificada) es progresivo y por ello, el alumno debe ser capaz de reconocer las diferencias y semejanzas entre los tres. De esta forma, las actividades se han diseñado con un nivel de dificultad creciente que permite al alumno ir desarrollando las destrezas necesarias para ejecutar e interpretar geométricamente el método de la caja.

Tabla 3. Índice de la propuesta didáctica

Sesión	Resumen de contenidos de la propuesta didáctica
1	Introducción del modelo geométrico de área para trabajar la multiplicación y la propiedad distributiva
2	Introducción del método de la caja como representación simplificada del modelo geométrico de área para trabajar la multiplicación y la propiedad distributiva. Modelo geométrico “Algebra Tiles” para representar polinomios de segundo grado como complemento del modelo geométrico de área.
3	Introducción del método de la caja como representación simplificada del modelo geométrico Algebra Tiles de área para trabajar la multiplicación y la propiedad distributiva en contextos algebraicos.
4	Aplicación del modelo de la caja con expresiones con coeficientes negativos. Introducción de las identidades notables. Interpretación geométrica del cuadrado de una suma. Uso del método de la caja como representación simplificada del modelo geométrico de área para desarrollar identidades notables.
5	Actividades para desarrollar identidades notables. Método de la caja para la factorización de identidades notables.
6	Cuestionario final para medir el grado de adquisición de los contenidos

III. 4. DESCRIPCIÓN DE LAS SESIONES

Describimos los objetivos y contenidos de las sesiones en las siguientes tablas.

Tabla 4. Objetivos y contenidos de la sesión 1

Sesión	1
Objetivos	▪ Introducir la representación geométrica de rectángulos para trabajar la multiplicación en contextos aritméticos ▪ Introducir un esquema de conexión entre la representación simbólica y la representación geométrica

	▪ Identificar la estructura de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma en contextos aritméticos en los casos $a \cdot (b+c)$, $(a+b) \cdot c$ y $(a+b) \cdot (c+d)$ y utilizar la representación geométrica para trabajarla
Contenido curricular	Expresiones numéricas, propiedad distributiva, jerarquía de las operaciones, área del rectángulo, conversiones entre la representación simbólica (aritmética) y la representación geométrica.
Explicación de los contenidos	En la primera sesión, se introduce el modelo de representación geométrico de área de rectángulos para trabajar la multiplicación en contextos aritméticos. En primer lugar, se presenta la multiplicación como operación con la que podemos representar el área de un rectángulo. A continuación, se relaciona con la propiedad distributiva del producto respecto de la suma yuxtaponiendo rectángulos, de forma que el factor común venga caracterizado por la longitud en común de los rectángulos representados. Para ello, se representan diferentes rectángulos de dimensiones numéricas unitarias o binarias (divididas). De esta forma, el alumno debe conectar la representación geométrica con la representación simbólica (expresiones aritméticas) y se abordan los casos del tipo $a \cdot (b+c), (a+b) \cdot c$ y $(a+b) \cdot (c+d)$. Paralelamente, se trabaja la jerarquía de las operaciones en la comprobación de resultados obtenidos. Se espera que al finalizar esta sesión el alumnado sea capaz de relacionar la representación simbólica del producto de factores (monomios y binomios) con la representación geométrica de una yuxtaposición de rectángulos en la que calculamos su área.
Actividades	1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7

Tabla 5.Objetivos y contenidos de la sesión 2

Sesión	2
Objetivos	▪ Introducir el método de la caja como representación simplificada de la representación geométrica de rectángulos para trabajar la multiplicación en contextos aritméticos ▪ Introducir un esquema de conexión entre la representación simbólica, la representación geométrica y la representación simplificada. ▪ Identificar la estructura de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma en contextos aritméticos en los casos $a \cdot (b+c)$, $(a+b) \cdot c$ y $(a+b) \cdot (c+d)$ ▪ Utilizar la representación geométrica para trabajar la propiedad distributiva en contextos aritméticos ▪ Introducir Algebra Tiles para representar multiplicaciones de expresiones algebraicas
Contenido curricular	Propiedad distributiva, jerarquía de las operaciones, uso e interpretación de las letras en representaciones, expresiones algebraicas, conversiones entre la representación simbólica, la representación geométrica y la representación simplificada (método de la caja), identificación de longitudes y áreas de rectángulos formados con piezas para representar polinomios de segundo grado (1, x, x^2) con Algebra Tiles.
Explicación de los contenidos	En esta segunda sesión se introduce el método de la caja como modelo de representación simplificado a partir de la representación geométrica de rectángulos para trabajar la multiplicación en contextos aritméticos. En primer lugar, se motiva la utilización de la representación simplificada y su conexión con el modelo de área para el cálculo de producto de monomios y binomios. A partir de ahí, vuelve a relacionarse con la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, de forma que el alumno sea capaz de conectar la representación con la simbólica. Se trabajan los casos del tipo $a \cdot (b+c), (a+b) \cdot c$ y $(a+b) \cdot (c+d)$. Paralelamente se trabaja la jerarquía de las operaciones para comprobar los resultados obtenidos.

	En la segunda parte de la sesión, se introduce el método Algebra Tiles para la representación de polinomios de forma que el alumnado pueda representar geométricamente multiplicaciones cuyos factores tengan términos desconocidos (monomios o binomios algebraicos). Para ello se utiliza un recurso digital al que se accede a través de una página web o aplicación móvil que permite al alumnado aprende a representar rectángulos cuyas longitudes son desconocidas. En las actividades se hace hincapié en la identificación de longitudes y cálculo de áreas observando los modelos polinómicos.
Actividades	8 y 9

Tabla 6. Objetivos y contenidos de la sesión 3

Sesión	3
Objetivos	▪ Identificar la estructura de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma en contextos algebraicos en el caso $(a+b)\cdot(c+d)$ ▪ Utilizar el modelo de área para trabajar la propiedad distributiva en contextos algebraicos ▪ Hacer conversiones de una representación simbólica, a representación geométrica y a representación visual simplificada y viceversa
Contenido curricular	Propiedad distributiva, jerarquía de las operaciones, expresiones algebraicas, área del rectángulo, representaciones, conversiones entre las representaciones formal, geométrica y simplificada, identificación de longitudes y áreas de rectángulos formados con piezas para representar polinomios de segundo grado (1, x, x^2) con Algebra Tiles.
Explicación de los contenidos	En esta tercera sesión seguimos trabajando con el modelo de representación geométrica "Algebra Tiles" para afianzar las habilidades de los estudiantes para identificar las longitudes de los rectángulos representados, así como sus áreas. Es imprescindible insistir en las unidades básicas de áreas, 1, x y x^2. Posteriormente se conecta con el método de la caja como representación simplificada del modelo anterior para trabajar la multiplicación de binomios algebraicos, relacionándolo con la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, de forma que el alumno sea capaz de conectar la representación simplificada con la representación simbólica. Se trabajan los casos del tipo $(a+b)\cdot(c+d)$. Finalmente, se plantean dos cuestiones de respuesta abierta para verificar si el alumnado es capaz de conectar la representación geométrica mediante el modelo Algebra Tiles y el método de la caja, así como su comprensión de las ventajas de cada uno de los modelos y procedimientos empleados.
Actividades	10, 11, Preguntas 1 y Pregunta 2

Tabla 7. Objetivos y contenidos de la sesión 4

Sesión	4
Objetivos	▪ Extensión del método de la caja a expresiones con coeficientes negativos en contextos algebraicos ▪ Identificar la estructura de las identidades o productos notables ▪ Utilizar la representación geométrica para representar el cuadrado de una suma ▪ Hacer conversiones entre las representaciones simbólica, geométrica y simplificada (método de la caja) con las identidades notables
Contenido curricular	Propiedad distributiva, expresiones algebraicas, área del rectángulo, representaciones, conversiones entre las representaciones simbólica, geométrica y simplificada (método de la caja), identidades notables.
Explicación de los contenidos	En esta cuarta sesión extendemos el uso del modelo de la caja para expresiones algebraicas con coeficientes negativos.

	A continuación, se presentan las identidades notables. En primer lugar, se insiste en la estructura externa de las mismas, de modo que el alumnado sea capaz de identificar los términos a y b, así como los tres tipos diferentes de identidades notables. Posteriormente, centramos el trabajo en la interpretación geométrica del cuadrado de la suma y se conecta con el método de la caja como representación simplificada del modelo anterior para el desarrollo de las identidades notables. Finalmente, se pretende que el alumno reconozca las estructuras interna y externa de las identidades notables en su forma más simple. Las expresiones propuestas a lo largo de la propuesta didáctica solo incluyen identidades notables cuyos términos a y b con monomios.
Actividades	12, 13 y 14

Tabla 8. Objetivos y contenidos de la sesión 5

Sesión	5
Objetivos	▪ Relacionar la estructura de las identidades notables con su representación geométrica ▪ Utilizar la representación simplificada (método de la caja) para factorizar identidades notables basándonos en la representación geométrica para representar el cuadrado de una suma ▪ Hacer conversiones entre las representaciones simbólica, geométrica y simplificada (método de la caja) con las identidades notables
Contenido curricular	Área del rectángulo, representaciones, conversiones entre las representaciones simbólica, geométrica y simplificada (método de la caja), identidades notables y su interpretación geométrica, desarrollo y factorización de identidades notables
Explicación de los contenidos	Primero el alumnado afianzará el desarrollo de las identidades notables mediante el modelo de la caja. Posteriormente se presenta el concepto de factorización de una expresión algebraica y se propone un procedimiento basado en el modelo de representación geométrica del cuadrado de la suma. Para ello, se insiste en identificar la estructura externa del desarrollo de la identidad notable cuadrado de una suma a partir de su representación geométrica, de modo que factorizar dicha expresión consiste en hallar los lados del rectángulo que modeliza la misma. Se finaliza la sesión con una actividad en la que el alumnado debe factorizar identidades notables utilizando dicho procedimiento.
Actividades	15 y 16. La actividad 17 es de refuerzo.

Tabla 9. Objetivos y contenidos de la sesión 6

Sesión	6
Objetivos	Medir el grado de adquisición de los objetivos del alumnado
Contenido curricular	Conversiones entre las representaciones simbólica, geométrica y simplificada (método de la caja), interpretación geométrica, desarrollo y factorización de identidades notables
Contenidos	Esta última sesión se dedica al cuestionario final de la investigación.
Actividades	Prueba final

III. 5. DISEÑO DE LA RECOGIDA DE DATOS

La experimentación en el aula de la que consta este experimento de enseñanza se organizó en ocho sesiones (ver la organización y principales características de las mismas en la Tabla 10). Las seis primeras, de aproximadamente 60 minutos de duración cada una, fueron de docencia virtual. Es estas sesiones se implementó la propuesta didáctica, incluida la realización de la prueba final. En las dos últimas sesiones se llevaron a cabo entrevistas semiestructuradas (online) a cinco estudiantes.

Tabla 10. Organización y características generales de las sesiones de trabajo en el aula

Sesión	Fecha	Alumnos	Duración	Objetivos principales (docentes)	Actividades
1	15/04/20	9	60 min	1. Introducir la RG para la multiplicación en contextos aritméticos 2. Aplicarlo para trabajar la propiedad distributiva	1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7
2	17/04/20	9	60 min	1. Introducir el MC para la multiplicación en contextos aritméticos 2. Introducir Algebra Tiles para representar rectángulos algebraicos	8 y 9
3	20/04/20	8	75 min	1. Introducir la RG para la multiplicación en contextos algebraicos 2. Introducir el MC para la multiplicación en contextos algebraicos	10, 11, Preguntas 1 y 2
4	22/04/20	9	60 min	1. Aplicar el MC con coeficientes negativos 2. Introducir las IN 3. Conectar las representaciones del cuadrado de una suma	12, 13 y 14
5	24/04/20	9	60 min	1. Aplicar el MC para el desarrollo de IN 2. Introducir la factorización de IN mediante el MC	15 y 16
6	27/04/20	9	60 min	1. Medir el grado de adquisición de los objetivos de las sesiones anteriores	Prueba final
7	28/04/20	3	90 min	1. Identificar y analizar las estrategias utilizadas 2. Detectar y analizar dificultades	Entrevistas
8	29/04/20	2	60 min	1. Identificar y analizar las estrategias utilizadas 2. Detectar y analizar dificultades	Entrevistas

RG = Representación geométrica, MC = Método de la caja, IN = Identidades Notables

Durante las sesiones el alumnado siguió las explicaciones de la docente-investigadora a través de videoconferencia y realizó las actividades de la propuesta didáctica, de manera individual, en su cuaderno de trabajo. En la propuesta didáctica se recomienda que el alumnado tenga impresas las actividades a realizar. En nuestra investigación no ha sido posible debido a la falta de medios de los estudiantes.

En primer lugar, la docente-investigadora proyectaba y explicaba con ayuda de una pizarra virtual los nuevos contenidos a trabajar, realizando ejemplos y resolviendo dudas. La interacción entre alumnado y docente se realizó a través del audio. El alumnado exponía sus dudas y la docente permitía participar, de forma ordenada, a cada uno de ellos. El alumnado disponía de tiempo suficiente para realizar las actividades de forma individual en su cuaderno de trabajo. Una vez todos los estudiantes habían concluido cada actividad, la docente-investigadora continuaba avanzando en la sesión.

Al finalizar cada una de las sesiones, el alumnado entregaba las tareas realizadas en su cuaderno de trabajo durante dichas sesiones, a través de la plataforma Google Classroom, digitalizándolas mediante escáner o fotografía.

III. 6. INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS

Los datos recogidos durante la implementación del experimento de enseñanza proceden de tres fuentes de información: (1) el cuaderno de trabajo con las actividades de la propuesta didáctica realizadas diariamente por los estudiantes y entregado en formato digital a través de la plataforma Google Classroom, (2) la grabación en vídeo de todas las sesiones y (3) entrevistas individuales a cinco de los estudiantes. En el cuaderno de trabajo se incluye la prueba final realizada en la última sesión.

El análisis de las producciones de los estudiantes, recogidas en el cuaderno de trabajo, y las entrevistas semiestructuradas permiten dar respuesta a los objetivos OE3 y OE4. Aquí se describe y justifica el diseño de ambos instrumentos de recogida de datos.

III.6.1. El cuaderno de trabajo

El cuaderno de trabajo está formado por las actividades de la propuesta didáctica. Su diseño se deriva del diseño de la propuesta didáctica y forma parte de la misma. Consta de 17 actividades a realizar en el aula durante el desarrollo de las sesiones, una tarea de 2 actividades de refuerzo para realizar en casa y una prueba final para medir el grado de adquisición de los objetivos. La mayoría están divididas en varios apartados, lo que hacen un total de 89 ítems diferentes a analizar. Se detalla su distribución en la Tabla 11

Tabla 11. Distribución de las actividades del cuaderno realizadas por sesiones

Sesión	1	2	3	4	5	6
Actividades	1-7	8, 9	10, 11, Preguntas 1 y 2	12 - 14	15, 16	F1 - F4

Para diseñar las actividades y dar respuesta a los objetivos OE3 y OE4 se han tenido en cuenta las destrezas (Figura 10. Destrezas a desarrollar por el alumnado) que el alumno debe desarrollar progresivamente para ser capaz de ejecutar e interpretar geométricamente el método de la caja.

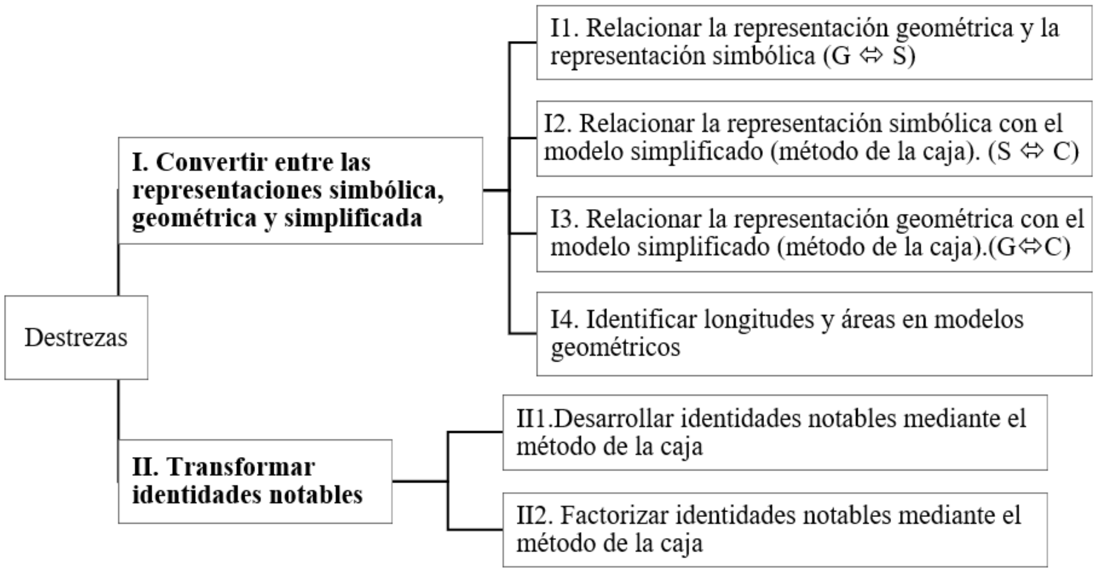


Figura 10. Destrezas a desarrollar por el alumnado

La Tabla 12 presenta la clasificación de las actividades del cuaderno en función de las destrezas que pone en juego, los objetivos específicos de la investigación con los que se vincula y si las expresiones son aritméticas o algebraicas, especificando aquellas que trabajan con identidades notables (IN). La notación empleada para referir las actividades es: número de actividad, apartado y subapartado. Así, las actividades de la prueba final inicial con la letra F, las de refuerzo para casa con la letra C. Los subapartados se corresponden con Algebra Tiles (AT), Método de la caja (M), Dibujo (D) y Relacionar (R). Seguidamente, ejemplificamos cada uno de los tipos de actividades y variaciones. El resto de actividades se recogen en el *Anexo 1. Propuesta didáctica*.

Las actividades incluidas en el cuaderno de trabajo siguen el orden natural del proceso de abstracción necesario para relacionar las tres representaciones (simbólica, geométrica y simplificada), por lo que su nivel de dificultad es progresivo. De esta manera, las actividades 1 a la 8 tienen un contexto aritmético, de la 9 a las 13 se introduce el contexto algebraico y de la 13 a la última se trabajan las identidades notables. Paralelamente, se trabaja la conversión de la representación geométrica a la simbólica, de la simbólica a la simplificada y de la geométrica a la simplificada. Una vez el alumno está familiarizado con el método de la caja, se trabaja el desarrollo y factorización de las identidades notables en las actividades 15 y 16. De esta forma, las actividades se han diseñado con un nivel de dificultad creciente que permite al alumno ir progresando en su desarrollo de las destrezas necesarias.

Tabla 12. Clasificación de las actividades del cuaderno de trabajo según las destrezas necesarias para su resolución

Destreza trabajada		OE	Actividades	Contexto
I. Convertir entre las representaciones simbólica, geométrica y simplificada				
I1. Relacionar la representación geométrica con la simbólica (G ⇔ S)	I1.1. Relacionar la representación geométrica y la representación simbólica (ambas dadas).	OE3, OE4	1, 5a, 5b	Aritmético
	I1.2. Convertir de la representación simbólica a geométrica.	OE3, OE4	2, 5e, 7	Aritmético
		OE3, OE4	11b AT, 11c AT,	Algebraico
		OE3, OE4	14aD, 14bD, F1D	Algebraico (IN)
	I1.3. Convertir de la representación geométrica a simbólica.	OE3, OE4	3, 4, 5c, 5d, 6	Aritmético
I2. Relacionar la representación simbólica y el modelo simplificado con el método de la caja. (S ⇔ C)	I2. Convertir entre la representación simbólica y la representación simplificada (método de la caja).	OE3, OE4	8	Aritmético
		OE3, OE4	11, 12	Algebraico
		OE3, OE4	14aM, 14bM, 15	Algebraico (IN)
I3. Relacionar la representación geométrica y el modelo simplificado con el método de la caja (G ⇔ C)	I3. Conexión entre la representación geométrica y el método de la caja	OE3, OE4	Pregunta 1, 14aR, 14bR	Algebraico (IN)
I4. Identificar longitudes y áreas en modelos geométricos		OE3, OE4	9, 10	Algebraico
II. Transformar identidades notables				
II1. Desarrollar identidades notables mediante el método de la caja		OE3, OE4	14aM, 14bM, 15, C1, F1M, F2, F4	Algebraico (IN)
II2. Factorizar usando el método de la caja		OE3, OE4	16, C2, F3	Algebraico (IN)

En las Tabla 13 a Tabla 20 se describen las destrezas necesarias para resolver los diferentes tipos de actividades propuestas. Se muestra un ejemplo de actividad, el tipo de expresiones implicadas, el contexto y las diferentes variaciones.

Tabla 13. Descripción de la destreza I1.1

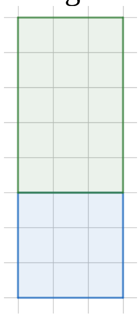
Destreza	I1.1. Relacionar la representación geométrica con la simbólica
Enunciado	**Actividad 5** Completa las expresiones correspondientes a las siguientes áreas: a) Figura 1  $(5+\_\_)\cdot 3 = 5\cdot 3 + 3\cdot 3$ $(8)\cdot 3 = \_\_\_ + 9$ $24 = \_\_\_$
Descripción	El foco es la relación entre la representación simbólica y geométrica, insistiendo en el concepto de área y en la propiedad distributiva. Es importante que el alumno siga un orden en la posición de los factores. En nuestro caso, el primer factor de la representación simbólica siempre se corresponde con la altura de la figura.
Expresiones	$a\cdot(b+c)\ y\ (a+b)\cdot c$
Contextos	Aritmético
Actividades	1a, 1b, 5a, 5b
Variaciones	En la actividad 1, se da la expresión numérica completa y el alumno debe relacionar con colores la representación simbólica y geométrica.

Tabla 14. Descripción de la destreza I1.2

Destreza	I1.2. Convertir de la representación simbólica a geométrica
Tipo 1	
Enunciado	**Actividad 2** Dibuja un rectángulo (usa dos colores) para cada una de las siguientes expresiones imitando los ejemplos que hemos trabajado: a) $3\cdot(5+7) = 3\cdot 5 + 3\cdot 7$
Descripción	El foco es que el alumno sepa representar geométricamente una expresión dada. Es importante que el alumno identifique cuáles van a ser las dimensiones del rectángulo a representar.
Expresiones	$a\cdot(b+c), (a+b)\cdot c\ y\ (a+b)\cdot(c+d)$
Contextos	Aritmético

Actividades	2a, 2b, 5e, 7a, 7b
Variaciones	En la actividad 5e la expresión aritmética viene desarrollada parcialmente.
Tipo 2	
Enunciado	**Actividad 11** Realiza las siguientes operaciones utilizando el método de la caja y represéntalas en Algebra Tiles. $\boldsymbol{a}$) $(\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{1})\cdot(\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{4})=$
Descripción	El objetivo es que el alumno sepa representar geométricamente una expresión algebraica dada. Esta actividad tiene la dificultad añadida de introducir dimensiones desconocidas. Para ello se trabaja con la aplicación Algebra Tiles y las piezas de áreas x^2, x y 1. Es importante que el alumno identifique cuáles van a ser las dimensiones del rectángulo a representar y cómo se representan en el contexto algebraico. Al trabajar paralelamente con la representación simbólica (método de la caja) se facilita la conversión y abstracción entre representaciones.
Expresiones	$(a+b)\cdot(c+d)$
Contextos	Algebraico
Actividades	11bAT, 11cAT
Tipo 3	
Enunciado	**Actividad 14** Representa gráficamente la identidad notable: $(\mathbf{2}+\boldsymbol{x})^{\mathbf{2}}$
Descripción	El objetivo es que el alumno sepa representar geométricamente la identidad notable cuadrado de una suma. El foco está en que identifique la estructura interna y externa de la identidad notable gracias a su representación geométrica. Se incide en el hecho de que al estar elevada al cuadrado, su representación gráfica se corresponde con el área de un cuadrado. Es importante incidir en el hecho de que un cuadrado tiene sus dos lados iguales y que su área se corresponde con la operación potencia al tener el mismo factor dos veces. Es importante que el alumno identifique las áreas parciales con el desarrollo de la identidad notable, de cara a los ejercicios de factorización. Al trabajar paralelamente con la representación simbólica (método de la caja) se facilita la conversión y abstracción entre representaciones.
Expresiones	$(a+b)^2$
Contextos	Identidades notables
Actividades	14aD, 14bD, F1D

Tabla 15. Descripción de la destreza I1.3

Destreza	I1.3. Convertir de la representación geométrica a simbólica

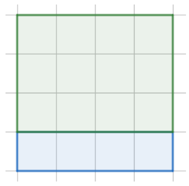
Enunciado	**Actividad 4** Calcula las áreas de los siguientes rectángulos aplicando la propiedad distributiva, siguiendo el ejemplo anterior. Usa colores para relacionar el cálculo con el dibujo como se ha hecho en el ejemplo anterior. 
Descripción	En estas actividades se muestra la representación geométrica y el alumno debe escribir la expresión simbólica. El foco es la relación entre la representación simbólica y geométrica, insistiendo en el concepto de área y en la propiedad distributiva. Es importante que el alumno siga un orden en la posición de los factores. En nuestro caso, el primer factor de la representación simbólica se corresponde con la altura de la figura.
Expresiones	$a \cdot (b + c), (a + b) \cdot c$ y $(a + b) \cdot (c + d)$
Contextos	Aritmético
Actividades	3b, 3c, 4a, 4b, 5c, 5d, 6ª, 6b

Tabla 16. Descripción de la destreza I.2

Destreza	I2. Convertir de la representación simbólica y la representación simplificada (método de la caja).
Tipo 1	
Enunciado	**Actividad 8** Realiza las siguientes multiplicaciones utilizando el método de la caja y **comprueba** la operación aplicando la jerarquía de operaciones. a) 2 · (5 + 6) =
Descripción	Estas actividades son clave para que el alumno sea capaz de ejecutar el método de la caja. Es fundamental insistir en la transición que realizamos desde la representación geométrica a la representación simplificada mediante el método de la caja, destacando sus similitudes y diferencias: las celdas de la caja representan los rectángulos parciales sin la necesidad de que el dibujo mantenga las proporciones y los factores que situamos a los lados se corresponden con las dimensiones de los rectángulos que queremos representar de forma simplificada. Es necesario insistir en la necesidad de sumar todas las áreas parciales.
Expresiones	$a \cdot (b + c), (a + b) \cdot c$ y $(a + b) \cdot (c + d)$
Contextos	Aritmético
Actividades	8a, 8b, 8c y 8d
Tipo 2	
Enunciado	**Actividad 12** Realiza las siguientes operaciones aplicando el método de la caja. a) $(-3x + 4) \cdot (2x\ -\ 5) =$

Descripción	Después de haber trabajado la propiedad distributiva con el método de la caja en el contexto aritmético, avanzamos con expresiones algebraicas (en primer lugar con coeficientes positivos y posteriormente con coeficientes negativos). En estas actividades se añade la dificultad de operar con monomios, tanto en la multiplicación como en la suma. Es necesario insistir en la necesidad de sumar las áreas parciales.
Expresiones	$(a+b)\cdot(c+d)$
Contextos	Algebraico
Actividades	11b, 11c, 12a, 12b, 12c

Tabla 17. Descripción de la destreza I3

Destreza	I3. Conexión entre la representación geométrica y el método de la caja
Enunciado	**Actividad 14** Representa gráficamente la identidad notable, calcúlala con el método de la caja y relaciona la solución con el dibujo: $\mathbf{(2+x)^2}$
Descripción	En estas actividades se pretende profundizar en la conexión e interpretación geométrica que los alumnos tienen del método de la caja.
Expresiones	$(a+b)^2$
Contextos	Identidades notables
Actividades	Pregunta 1, 14aR, 14bR
Variaciones	Pregunta 1 “Compara y conecta el método de Algebra Tiles y el método de la caja ¿Qué similitudes encuentras entre ellos? Puedes utilizar dibujos y tablas en tu explicación.”

Tabla 18. Descripción de la destreza I4

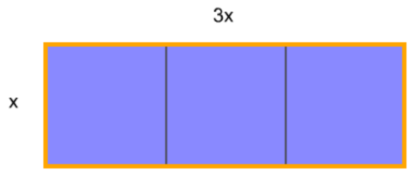
Destreza	I4. Identificar longitudes y áreas en modelos geométricos de dimensiones algebraicas
Enunciado	**Actividad 10** Con ayuda de la página Algebra tiles calcula el área los siguientes rectángulos 
Descripción	Para facilitar la representación geométrica de expresiones algebraicas se introduce el modelo geométrico Algebra Tiles. Algunos alumnos muestras dificultades con los conceptos de área y perímetro en el uso de las piezas de Algebra Tiles. Es importante insistir en cuáles son las dimensiones de las piezas individuales y sus áreas y evitar la confusión, puesto que la pieza de área x, tiene de dimensión 1 y también x.
Expresiones	$(a+b)\cdot(c+d)$
Contextos	Algebraico
Actividades	9a, 9b, 9c, 9d, 9e, 9f, 10a, 10b, 10c, 10d

Tabla 19. Descripción de la destreza II1

Destreza	II1. Desarrollar identidades notables mediante el método de la caja
Enunciado	**Actividad 15** Indica a cuál de las identidades notables corresponde y desarrolla la expresión utilizando el método de la caja: $(7 + 2x)^2 =$
Descripción	Después de haber trabajado la propiedad distributiva con el método de la caja en el contexto algebraico, introducimos las identidades notables. Al ser la primera vez que trabajan con estas expresiones, las identidades notables presentadas sólo incluyen monomios en los términos a y b.
Expresiones	$(a + b)^2$; $(a - b)^2$ y $(a + b)(a - b)$
Contextos	Identidades notables
Actividades	14aM, 14bM, 15a, 15b, 15c, 15d, C1, F1M, F2a,F2b, F2c, F2d, F2e

Tabla 20. Descripción de la destreza II2

Destreza	II2. Factorizar usando el método de la caja
Enunciado	**Actividad F3** Factoriza la siguiente identidad notable: a) $4x^2 + 12x + 9 =$
Descripción	En las actividades de factorización se debe insistir en la representación geométrica y estructura interna y externa de las identidades notables, incidiendo en el hecho de que estamos hallando los lados del rectángulo (operación inversa al desarrollo de las identidades notables). En estos ejercicios las dificultades son varias: la identificación del tipo de identidad notable, la identificación de los cuadrados perfectos, el cálculo de sus raíces cuadradas, el ajuste de los signos, la comprobación del término lineal y la identificación de la solución.
Expresiones	$(a + b)^2$; $(a - b)^2$ y $(a + b)(a - b)$
Contextos	Identidades notables
Actividades	16a 16b, 16c, 16d, C2, F3a, F3b, F3c, F3d, F3e, F3f

III.6.2. Diseño de las entrevistas semiestructuradas

Las entrevistas semiestructuradas consisten en una guía de preguntas en las cuales la entrevistadora tiene la libertad de introducir cuestiones adicionales para precisar conceptos u obtener más información sobre los temas deseados (Hernández, et al., 2010). Las entrevistas, individuales, fueron realizadas de forma virtual (videoconferencia). Su duración fue 30 minutos y se grabaron mediante captura de pantalla. La entrevistadora mostró en pantalla las respuestas al estudiante y ambos interactuaron oralmente. La selección de los sujetos se realizó según los resultados de la prueba final, escogiendo una muestra representativa de los niveles de desempeño que identificamos.

Las preguntas que componen la entrevista (ver guía en Anexo 2) contribuyen a dar respuesta al objetivo específico OE4. Persiguen obtener información complementaria a la de las producciones escritas de los estudiantes que ayude a determinar su nivel de desempeño en función de las destrezas que evidencian para convertir entre las representaciones simbólica, geométrica y simbólica y para el desarrollo y factorización de las identidades notables. Están orientadas aclarar ciertos aspectos relativos a la interpretación de las producciones de los estudiantes, profundizar en los procedimientos utilizados por el alumnado en las actividades del cuaderno de trabajo y detectar un posible aprendizaje memorístico. Se incidió especialmente en cuestiones relativas a la interpretación geométrica de los procedimientos realizados y en explorar la capacidad de los estudiantes para relacionar las distintas representaciones. También se pidió a los estudiantes que revisaran sus actividades para detectar errores y poder solventarlos.

III. 7. DESARROLLO DE LAS SESIONES

En la Tabla 21 describimos las expectativas relativas al desarrollo de cada sesión, el desarrollo real de las mismas y las decisiones que se tomaron relativas a la planificación de las siguientes sesiones tras las observaciones en el aula.

Tabla 21. Desarrollo de las sesiones

Sesión 1
Expectativas de la sesión
Es posible que al terminar la sesión podamos comenzar a identificar varios tipos de perfiles de alumnos. Algunos serán capaces de reconocer los elementos en la operación multiplicación y relacionarlos con las figuras en los casos más sencillos (producto de un factor por un binomio) y otros serán capaces de realizarlo también en los casos con dos binomios: $(a+b)\cdot(c+d)$. La capacidad para interpretar y conectar las representaciones será variada. Algunos alumnos serán capaces de relacionar ambas representaciones y otros se limitarán a proceder de forma algorítmica.
Desarrollo de la sesión
Durante la sesión algunos alumnos han tenido dificultades con la identificación de las dimensiones de los rectángulos y no tienen muy claro cómo relacionar ambas representaciones usando colores. La investigadora cree que si tuvieran el cuaderno impreso les resultaría más fácil. Los alumnos no son constantes con el orden en el que escriben los factores y a veces les trae confusión. La mayor dificultad ha aparecido en la representación del producto de dos binomios (Actividad 7). Los alumnos requieren más tiempo del estimado para la realización de las actividades.
Modificaciones de la próxima sesión

En la próxima sesión se incidirá en el orden en el que se escriben los factores. Seguiremos el criterio de que el primer factor de la expresión se corresponda con la altura del rectángulo. Además se incidirá en la representación geométrica del producto de dos binomios con las actividades de la siguiente sesión. Para las actividades con Algebra Tiles será la docente la que usará la aplicación para ajustar los tiempos.

Sesión 2

Expectativas de la sesión

Creemos que los alumnos serán capaces de reconocer x^2 como área de un cuadrado de lado x. Habrá problemas por confusión del elemento x como longitud y x como área.
La capacidad para interpretar y conectar la representación simbólica y el modelo de la caja del alumnado será variada. Algunos sujetos serán capaces de relacionar ambas representaciones y otros se limitarán a aplicarlo como si fuera un algoritmo.

Desarrollo de la sesión

El alumnado ha mostrado dificultades en reconocer las dimensiones de las piezas de Algebra Tiles. Ante la dificultad de la actividad 9, la docente ayudó al alumnado. Los alumnos confunden los conceptos de área y longitud.

Modificaciones de la próxima sesión

Se insistirá en los conceptos área y longitud, sobre todo con el uso de Algebra Tiles. Se elimina la actividad de multiplicación de factores de más de dos términos por ajuste de tiempo a las necesidades del alumnado.

Sesión 3

Expectativas de la sesión

Creemos que al incidir sobre las dimensiones y áreas de las unidades básicas de área se producirá una mejorar en el rendimiento del alumnado. Aplicar el método de la caja en este nuevo contexto puede implicar errores en la multiplicación de monomios.

Desarrollo de la sesión

Ante la dificultad de que los alumnos utilicen la aplicación Algebra Tiles mientras siguen la clase en directo, el apartado del ejercicio 11 correspondiente al uso de la misma se deja para el final de la clase. De esta forma, los alumnos han podido utilizar por primera vez dicha aplicación a su ritmo, desconectándose al terminar. La clase continúa para resolver dudas referidas a la aplicación. No da tiempo a realizar la actividad 12.

Modificaciones de la próxima sesión

Se comenzará por la actividad 12.

Sesión 4

Expectativas de la sesión

Creemos que no habrá mayor dificultad a la hora de conectar la representación simbólica del cuadrado de la suma con su representación geométrica. Si bien aplicar el

método de la caja en este nuevo contexto puede seguir acarreando errores en las operaciones con monomios.
Desarrollo de la sesión
En esta sesión tuvimos problemas técnicos debidos a la plataforma utilizada lo que nos restó tiempo de la sesión. Los alumnos muestran dificultades en las operaciones de suma y resta de enteros, multiplicación de monomios y agrupar términos semejantes. En la actividad 14 no han sabido especificar la relación entre la representación geométrica, el método de la caja y la representación simbólica.
Modificaciones de la próxima sesión
Se comenzará por la actividad 15 reduciendo sus apartados.

Sesión 5
Expectativas de la sesión
Creemos que algunos alumnos tendrán dificultades a la hora de comprender el concepto de factorización y de conectar dicho procedimiento con la representación geométrica del cuadrado de la suma.
Desarrollo de la sesión
Se tuvieron de nuevo problemas técnicos. Por ello, se prescindió del debate previsto sobre cómo identificar las identidades notables y fue comentado por la docente. Aunque los alumnos son capaces de identificar su estructura externa sin desarrollar, no son capaces de reconocer que $a^2 + b^2 + 2ab$ se corresponde con el desarrollo de $(a + b)^2$. La docente tuvo que volver a incidir sobre el desarrollo e interpretación del cuadrado de una suma. La mayoría realiza adecuadamente, salvo errores derivados de las operaciones con monomios, la actividad de desarrollo de las identidades notables. En la actividad de factorización olvidan escribir la solución y no calculan correctamente los signos. Muestran dificultades para identificar los términos cuadrados perfectos.
Modificaciones de la próxima sesión
No se realiza ninguna.

Sesión 6
Expectativas de la sesión
Tras la realización de la prueba final podremos definir diferentes perfiles de alumno en función de su nivel de desempeño en las distintas destrezas. Las mayores dificultades aparecerán en las actividades de factorización, por la dificultad propia de la actividad y por lo limitado que ha sido su trabajo en la sesión anterior.
Desarrollo de la sesión
Esta última sesión se dedica a realizar el cuestionario final de la investigación. Por problemas en la plataforma fue imposible mantener una conexión con todos los sujetos por lo que trabajaron de forma autónoma sin la posibilidad de aclarar dudas.

IV. ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

En este capítulo describimos el análisis de los datos recogidos en esta investigación distinguiendo dos apartados. En primer lugar se analizan cuantitativamente los datos procedentes del cuaderno de trabajo de los estudiantes, incluida la prueba final. En segundo lugar, se complementa dicho análisis con la información obtenida de las transcripciones de las entrevistas para realizar un análisis individual del desempeño de los estudiantes en función de las destrezas necesarias para resolver las actividades. Este análisis persigue dar respuesta a los objetivos específicos OE3 y OE4.

Se han seleccionado para su análisis aquellas actividades que fueron entregadas en tiempo y forma tras la realización de las sesiones online. Las actividades 1a, 3a, 8a, 9a y 11a no han sido incluidos en el análisis puesto que fueron resueltos por la docente investigadora para servir de ejemplo al alumnado. Las actividades C1 y C2 se asignaron como tarea para practicar de forma autónoma en casa previa a la prueba final por lo que tampoco se han considerado para el análisis.

IV. 1. CLASIFICACIÓN DE LOS ERRORES

Diseñamos una clasificación para analizar los errores y dificultades mostrados en las producciones escritas. Nos basamos en la literatura consultada sobre análisis y tipologías de errores (Rico, 1995; Socas, 1997, 2007; Ruano, Socas y Palarea, 2008, Lupiáñez, 2010), realizando adaptaciones necesarias según las respuestas del alumnado.

Distinguimos dos grandes categorías de errores en función de su origen: (a) ausencia de sentido y (b) actitudes afectivas y emocionales. La primera categoría engloba todos aquellos errores ocasionados por las carencias de sentido de los objetos matemáticos. Los errores incluidos en la segunda tienen distinta naturaleza: faltas de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos, etc. Las categorías empleadas para codificar los errores detectados se recogen en la Tabla 22 y se ejemplifican a continuación de la misma.

Tabla 22. Clasificación de los errores según su origen

Errores según su origen en ...		**Descripción**	**Código**
Ausencia de sentido	Sentido espacial	No representa adecuadamente el modelo geométrico	11
		No reconoce las áreas en las figuras	12
		No reconoce las longitudes de las figuras	13
	Características propias del lenguaje algebraico	Error operacional en suma de monomios	21
		Error operacional en multiplicación de monomios	22
	Aprendizaje deficiente del procedimiento	Error al calcular los factores.	31
		No identifica la solución de la factorización	32
		Errores por desconocer el procedimiento	33
	Sentido estructural	No identifica la identidad notable	41
Actitudes afectivas y emocionales (falta de concentración, bloqueos, olvidos, etc.)		Error operacional	51
		Incompleto	52
		Error al determinar una longitud (conteo)	53
		Error al transcribir información	54
		No asocia correctamente los factores con las longitudes de los rectángulos	55

Los errores debidos a una ausencia de sentido espacial son debidos a dificultades para obtener información espacial de expresiones y/o figuras. Así, el error *No representa adecuadamente el modelo geométrico* (11), indica que el alumno no convierte adecuadamente la representación simbólica a geométrica como ejemplificamos en la Figura 11. Ejemplo de error 11. Esta alumna representa adecuadamente las dimensiones, pero muestra dificultades al realizar las particiones del área.

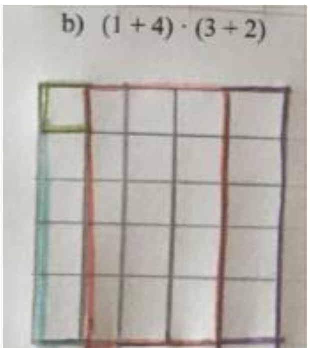


Figura 11. Ejemplo de error 11

Los errores *No reconoce las áreas en las figuras* (12) y *No reconoce las longitudes de las figuras* (13) se refieren, respectivamente, a errores para calcular las áreas y las longitudes de las representaciones geométricas. En la Figura 12 se ejemplifican ambos: en el ejemplo de la izquierda el alumno se equivoca al calcular el área y en el ejemplo de la derecha erra al identificar la altura.

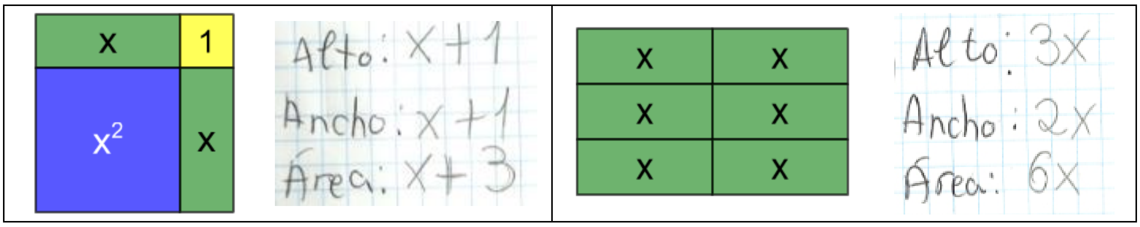


Figura 12. Errores 12 y 13

Los errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico están presentes en aquellas operaciones que hay que realizar con monomios donde distinguimos suma (21) o producto (22) de estos.

Otros errores son debidos a deficiencias en el aprendizaje del procedimiento de factorización. Cometen *errores al calcular los factores* (31), ya sea al calcular las raíces cuadradas ($\sqrt{9x^2} = 3x^2$ o al ajustar los signos en el segundo término en la factorización de $a^2 - 2ab + b^2$ o $a^2 - b^2$. De igual manera, comenten *errores al identificar la solución de la factorización* (32), bien por omisión o realizando otros cálculos sin sentido.

En la Figura 13 ejemplificamos los errores 31 y 32 ambos detectados en la cuestión "factoriza $x^2 - 9$". En ambos casos los estudiantes completan correctamente la tabla, por tanto factorizan correctamente completando la expresión y hallando los factores. En el primer caso no expresa la solución pedida. Se podría considerar que es un olvido, pero al preguntarle en la entrevista por la respuesta es necesario guiarle a través de una serie de preguntas para que indique cuáles son los factores, ya que cree que la respuesta es la identidad desarrollada. (Imagen a la izquierda en la Figura 13). Por otro lado, el alumno R calcula bien los factores de los monomios pero no identifica los factores de la identidad notable escribiendo como solución x3 (imagen a la derecha en la Figura 12).

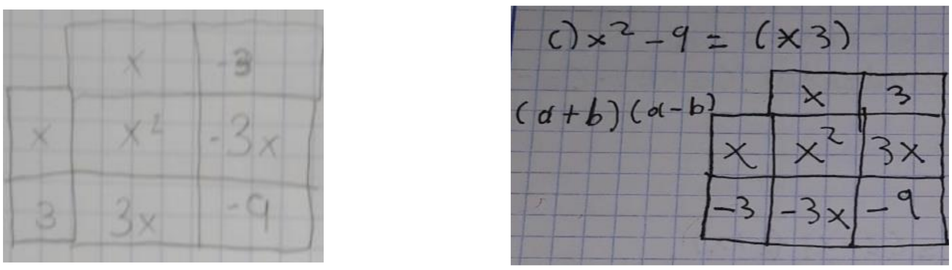


Figura 13. Errores 31 y 32

En esta misma subcategoría, incluimos los errores cometidos por los alumnos cuando no saben cómo factorizar y realizan cálculos sin orden ni sentido (Figura 14).

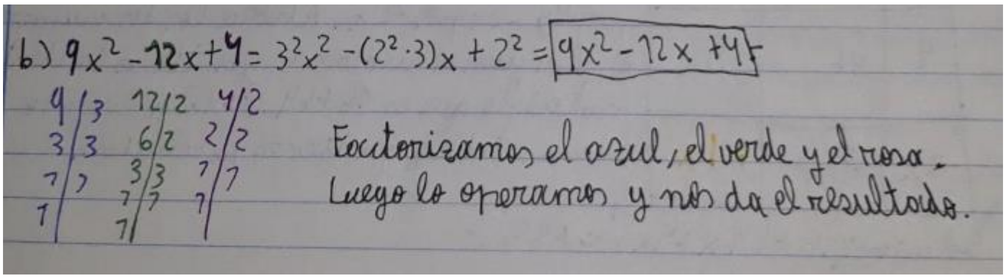


Figura 14. Error por desconocer el procedimiento (33)

En lo relativo a los errores cuyo origen es la ausencia de sentido estructural, identificamos el error *No identifica la identidad notable* (4). Por ejemplo, la alumna J da por válida la expresión $(x + 5)^2 = x^2 + 25$ en el ejercicio F4.

Finalmente, para identificar los errores cuyo origen está en las actitudes afectivas y emocionales ha sido necesario un análisis global del cuaderno de trabajo de cada alumno. Así, incluimos: a) los *errores operacionales* (51) o errores de cálculo de tipo aritmético, b) los errores al dejar la actividad *incompleta* (52), bien por no calcular la suma total de los términos, o porque el ejercicio tenía más de un apartado, c) el *Error al determinar una longitud (conteo)* (53) que refiere a errores de conteo en el cálculo de las dimensiones de la representación geométrica, d) el *Error al transcribir información* (54) por copiar mal alguna expresión o y finalmente, e) el error *No asocia los factores con las longitudes de los rectángulos* (55) cometidos al confundir alguno de los factores en la expresión simbólica, con las dimensiones de la representación geométrica. Véase la Figura 15.

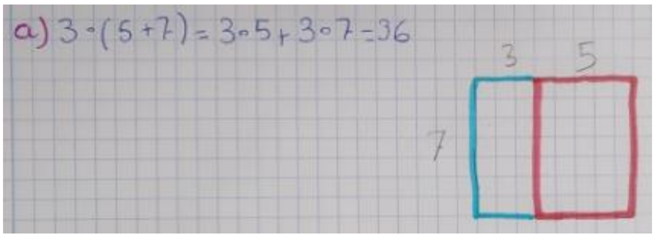


Figura 15. Error 55

IV. 2. ANÁLISIS DE LOS ERRORES

En este apartado se presentan una serie de tablas que informan de la cantidad y tipos de errores detectados en las respuestas a las diferentes actividades. En el *Anexo 3. Tabla de errores* se recoge la tabla de la que se extraen todos estos datos. Contiene los errores codificados de cada alumno en cada pregunta.

En general el número de errores que comete cada alumno fluctúa entre 3 y 12, siendo las alumnas A y D las que responden mayor número de actividades de forma correcta y el alumno R es el que más errores comete (ver Tabla 23).

Tabla 23. Recuento total de errores por alumno

	A	Al	An	C	Cl	D	J	Ju	R
✓	19	11	8	13	11	19	12	12	5
E	3	11	11	9	10	4	10	9	12
NR	1	1	4	1	2	0	1	2	6

Respuestas correctas (✓), Respuestas con algún error (E), Sin respuesta (NR)

La tabla 24 relaciona los errores ya codificados con las destrezas implicadas en cada actividad. Debemos precisar, que las actividades incluidas en la destreza I2.3 también lo están en la II1 (ya que ambas son destrezas empleadas al usar el método de la caja). Por ello, para calcular el total se excluye la columna correspondiente a la destreza I2 (I.N.) evitando incurrir en duplicidades.

Tabla 24. Tipos de errores relacionados con las distintas destrezas

	S. Espacial			*Álgebra*		*Procedimiento*			*S.E.*	*Afectivos y emocionales*				
	11	**12**	**13**	**21**	**22**	**31**	**32**	**33**	**41**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**
I1.1. Relacionar G ⇨ S										1	2			
I1.2. Convertir S ⇨ G (Arit.)	4										2			1
I1.2. Convertir S ⇨ G (Alg.)		1												
I1.2. Convertir S ⇨ G (I.N.)	2		1											
I1.3. Convertir G ⇨ S (Arit.)										3	8	6		
I2. Convertir S ⇨ C (Arit)														
I2. Convertir S ⇨ C (Alg)				11	13					1			2	
I2. Convertir S ⇨ C (I.N.)				**4**	**10**				**3**	**1**	**3**		**2**	
I3. Conectar G ⇨ C														
I4. Identificar área y longitud		24	15											
II1. Desarrollar usando C				17	30				4	4	3		2	
II2. Factorizar usando C					4	5	23	24		1	2		2	
Totales parciales	*6*	*25*	*16*	*28*	*47*	*5*	*23*	*24*	*4*	*10*	*17*	*6*	*8*	*1*
Total	*47*			*75*		*52*			*4*	*42*				

G: Representación Geométrica, F: R. Simbólica, C: Método Caja, S.E: Sentido Estructural

Vemos que el mayor número de errores se debe al manejo de expresiones algebraicas, seguidos de aquellos asociados a deficiencias en el procedimiento de la factorización y en tercer lugar situamos los errores asociados al desarrollo del sentido espacial. Llama especial atención, el elevado número de errores debidos a las actitudes afectivas y emocionales. Igualmente vemos que, como era de esperar, el alumnado comete más errores cuando trabaja con expresiones algebraicas y tiene mayor dificultad factorizando las identidades notables que calculando su desarrollo. Sintetizamos estos resultados en la Tabla 25.

Tabla 25. Síntesis de los errores cometidos según las destrezas

I1.1. Relacionar la representación geométrica y la representación simbólica
Tan solo se cometen 3 errores y son de tipo afectivo y emocional (51 y 52) bien porque dejan la actividad incompleta o porque cometen errores de cálculo en las áreas. Podemos decir que esta destreza no supone mayor dificultad.
I1.2. Convertir de la representación simbólica a geométrica
En la conversión entre la representación simbólica y geométrica la mayor dificultad es la relativa a comprender el modelo. Algunos alumnos muestran dificultades al representar el modelo rectangular de área cuando alguna de las dimensiones está partida. Hay que tener en cuenta que estas actividades se realizaron en la primera sesión. No obstante, algunos de ellos arrastran dicho error hasta la última sesión. Lo analizamos más adelante.
I1.3. Convertir de la representación geométrica a simbólica
Los errores cometidos al convertir de la representación geométrica a simbólica son todos de tipo afectivo. En su gran mayoría por estar incompletos y otros por la dificultad de contar la rejilla para calcular las dimensiones.
I2. Convertir de la representación simbólica y la representación simplificada (M. C.)
Estas actividades consisten en la aplicación directa del método de la caja. Vemos que una vez presentado el método, los alumnos no tienen ninguna dificultad en el contexto aritmético. Sin embargo, cuando se trabajan con expresiones algebraicas, aparecen los errores asociados con las operaciones con monomios. En el caso que nos ocupa, el alumnado ya mostraba deficiencias con estos contenidos previamente al desarrollo de este estudio.
I3. Conexión entre la representación geométrica y el método de la caja
En lo referido a esta destreza, no aparece ningún error porque ninguno de los alumnos respondió a las actividades. Para su análisis nos valemos de la información recogida en las entrevistas individuales.
I4. Identificar longitudes y áreas en modelos geométricos de dimensiones algebraicas
En estas actividades se utilizó el modelo de Algebra Tiles. Encontramos un gran número de errores a la hora de identificar las áreas y longitudes de las figuras. Nos encontramos ante el obstáculo de que algunos alumnos parecen no distinguir entre el concepto de área y el de longitud. Más adelante veremos que son solo parte de los alumnos los que cometen la mayoría de estos errores al no dominar las piezas unitarias del modelo.
II1. Desarrollar identidades notables mediante el método de la caja
El mayor número de errores aparece en las dos últimas destrezas, principalmente por dos factores. La dificultad es mayor y el número de apartados es mayor. A la hora de desarrollar identidades notables mediante el método de la caja, los alumnos cometen errores en las operaciones con monomios y otros tantos de tipo emocional. Llama la atención que aplicando este método también hay alumnos que en ocasiones (4) no reconocen la identidad notable.
II2. Factorizar usando el método de la caja
Esta destreza es la que más nos interesaba de la propuesta didáctica y vemos que la mayoría de los errores cometidos aquí están relacionados con lo que hemos llamado aprendizaje deficiente del procedimiento. En primer lugar, tenemos 5 errores relativos al cálculo de los factores, bien por el signo o bien por no dominar el concepto de raíz cuadrada. En segundo lugar, encontramos dificultades a la hora de expresar la solución. Algunos de ellos por no prestar la suficiente atención y otros de ellos porque no saben qué es lo que se busca. También llama la atención que, en 4 ocasiones, los alumnos tras haber realizado bien todo el procedimiento se equivocan al transcribir la solución.

A continuación, vamos a agrupar los errores atendiendo al sujeto que los ha cometido. En la Tabla 26 se expone el número de errores que comete cada alumno según las destrezas y el total. De esta forma podemos ver qué destrezas domina cada uno y describir su nivel de desempeño (ver apartado IV.3).

Tabla 26. Número de errores que comete cada alumno según las destrezas[2]

Sujeto	**I1.1**	**I1.2**			**I1.3**	**I2**			**I3**	**I4**	**II1**	**II2**	**Total**
A	0	0	0	0	2	0	0	*0*	0	1	2	2	*7*
Al	3	3	1	0	3	0	1	*1*	0	5	3	9	*28*
An	0	0	0	0	3	0	4	*4*	0	1	11	8	*27*
C	0	2	0	1	0	0	2	*2*	0	5	5	3	*18*
Cl	0	0	0	2	0	0	5	*2*	0	7	6	13	*33*
D	0	0	0	0	1	0	0	*0*	0	4	0	0	*5*
J	0	0	1	0	0	0	2	*3*	0	3	7	7	*20*
Ju	0	0	0	0	0	0	5	*7*	0	1	15	11	*32*
R	0	2	0	0	1	0	8	*7*	0	13	14	9	*47*

La Tabla 27 recoge la distribución de cada tipo de error por sujeto y se calcula el porcentaje de los errores que ha cometido cada sujeto sobre el conjunto total de errores. Fijándonos en los porcentajes podemos ya intuir que vamos a encontrarnos con tres perfiles de alumnos según su nivel de desempeño. Así, podemos suponer que las alumnas A y D tienen mejor nivel de desempeño (3% de los errores), seguidas de los alumnos C, J, An, Al, Cl y Ju(8-15%) y el alumno R que con un 21% de los errores parece mostrarnos que tendrá un nivel de desempeño más bajo.

Tabla 27. Distribución de los tipos de error por alumno

Sujeto	**11**	**12**	**13**	**21**	**22**	**31**	**32**	**33**	**41**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	Total	**%**
A			1	1	1							2	2		7	3%
Al		6			1		9			3	8			1	28	13%
An			1	3	12	4	2			3	2				27	12%
C	2	4	1		6		3			1			1		18	8%
Cl	2	6	1	1	10	1	2	6			2		2		33	15%
D		3								1		1			5	3%
J			3	2	2		1	6	1	2	2	1			20	9%
Ju			2	9	12		3	6					2		34	15%
R	2	6	7	12	3		3	6	3		3	1	1		47	21%

La información de la Tabla 27 se complementa con la Figura 16 que nos muestra de forma gráfica la distribución de errores por alumno. Por ejemplo, vemos que tan solo R comete errores al no asociar correctamente los factores de la expresión con los

[2] La fila I2.3 se excluye en el recuento

rectángulos (55), que An y Cl son las únicas que cometen errores al calcular los factores (31) y que Cl, J, Ju y R no conocen el procedimiento para factorizar (33).

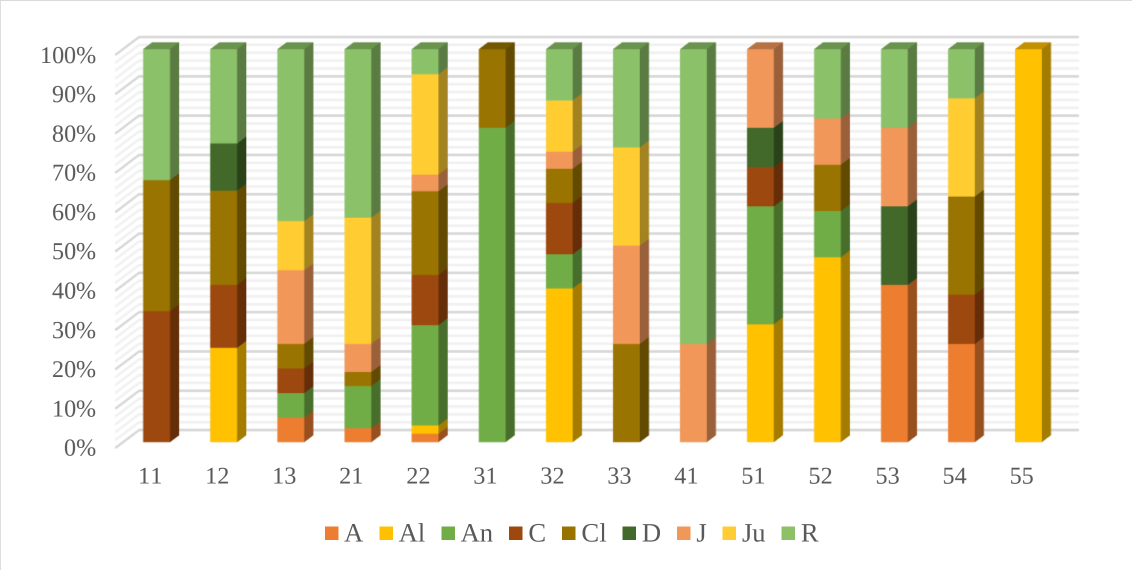


Figura 16. Distribución de cada tipo de error por alumno (En %)

IV. 3. Análisis individual del desempeño de los sujetos

En este apartado se analiza el nivel de desempeño final (distinguiendo entre alto, medio y bajo) de cada uno de los sujetos en cada una de las destrezas teniendo en cuenta la frecuencia y tipo de errores cometidos en las actividades. Para facilitar su visualización se han creado unas dianas de desempeño como la de la Figura 17. Los ejes representan cada una de las destrezas evaluadas y se dividen en los niveles alto, medio y bajo. Para formar el polígono naranja se unen los niveles alcanzados en cada destreza.

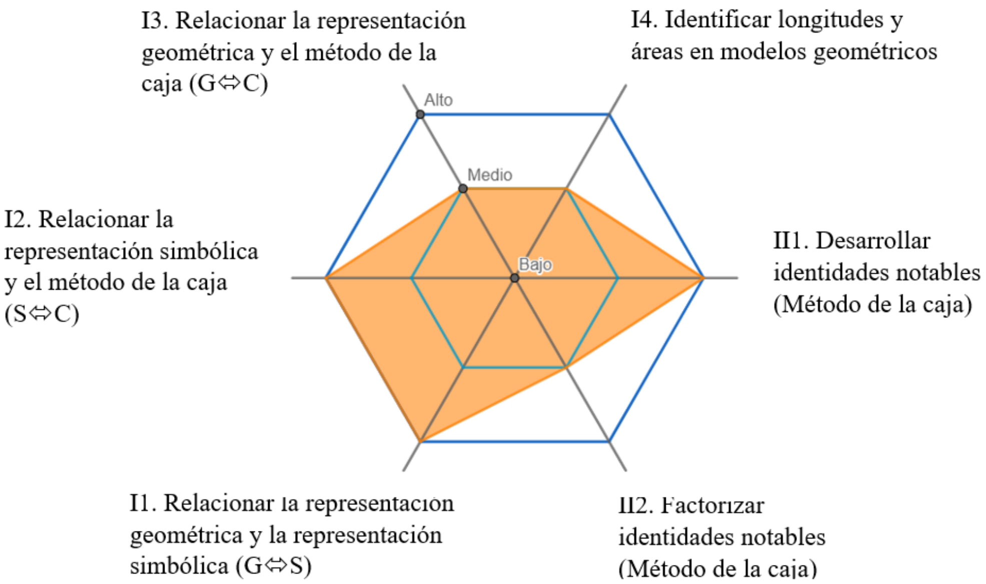


Figura 17. Ejemplo de diana de desempeño (alumno Al)

En los siguientes apartados se describen las dianas de desempeño de cada uno de los alumnos. Estas se muestran en la Figura 18.

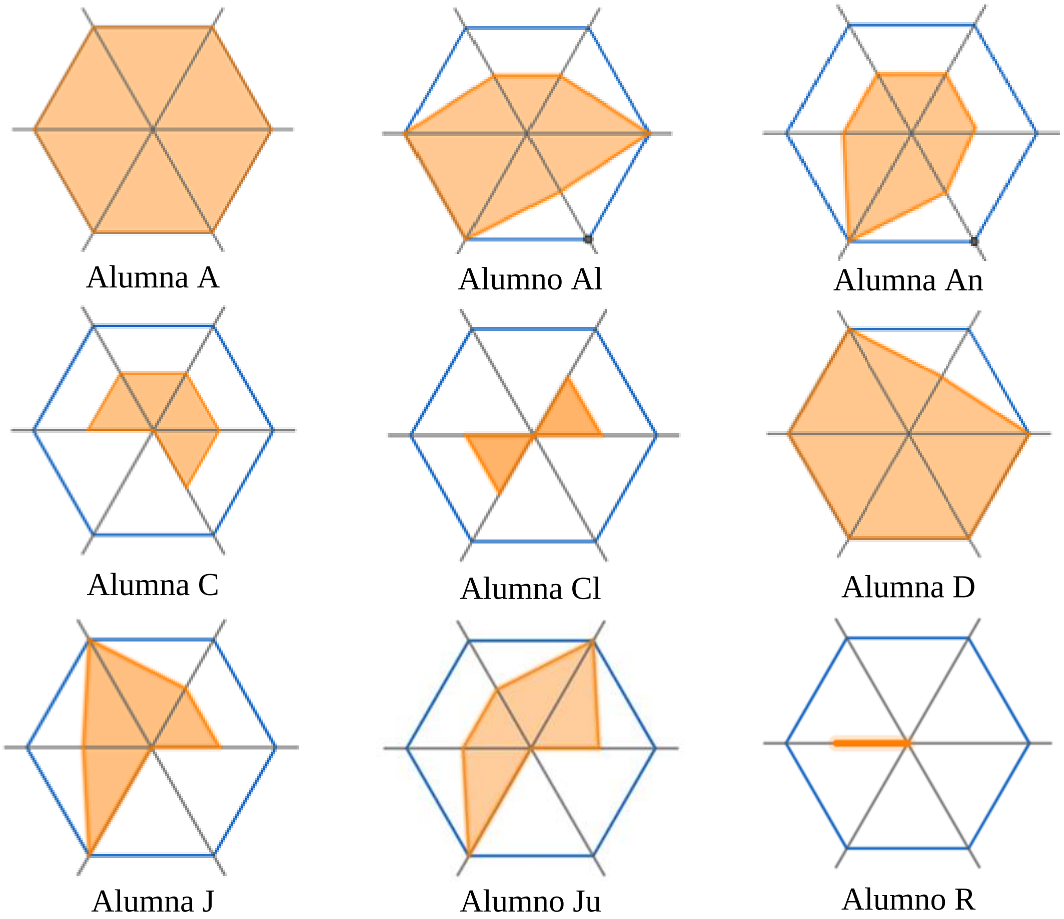


Figura 18. Dianas de desempeño de todos los alumnos

IV.3.1. Análisis del desempeño del sujeto A

Esta alumna realiza adecuadamente la mayoría de los ejercicios de la propuesta didáctica. Consideramos que su nivel de desempeño global es alto, así como lo son los niveles para cada una de las destrezas tal y como se muestra en la figura. Solo comete 7 errores (del tipo 13, 21, 22, 53, 54) para las destrezas I1.3, II1 y II2.

Entendemos que sus errores son algo anecdótico pues en el resto de actividades muestra que no tiene dificultades. En la prueba final se equivoca en el ejercicio 3 (factorización) al expresar las soluciones de los apartados c y f, si bien calcula correctamente los factores. En la entrevista le preguntamos sobre el procedimiento a seguir cuando estamos factorizando y tras explicar cómo realizó el apartado 3c (Figura 19) al enunciar cuál era la solución, la alumna supo rectificar dicho error.

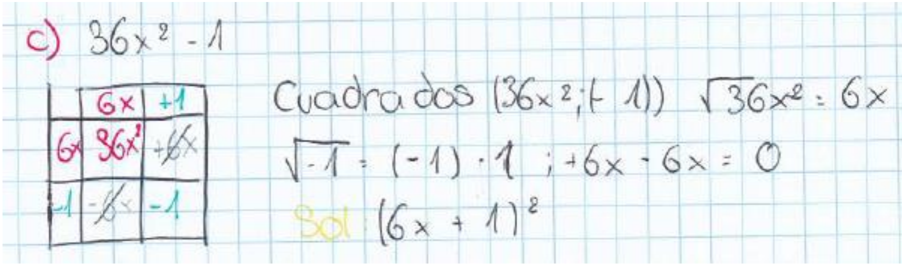


Figura 19.Error al transcribir información (54)

Por otro lado, en la entrevista la alumna muestra una buena comprensión de los tres diferentes modelos de representación, la conexión entre ellos y de cómo nos servimos de estas conexiones para trabajar con las identidades notables.

Cuando en la actividad F7.1 debe representar la identidad notable, la alumna explica que "*Primero tuve que pensar bien lo que había que hacer (…) lo del método de Algebra Tiles. Pensé que, haciendo el método de la tabla, a lo mejor iba a ser más fácil. (…). Hice algunos bocetos según lo que me daba en la tabla y de eso saqué el dibujo*". Para comprobar que la alumna realmente sabe lo que está representando, la investigadora le pregunta por el dibujo. La alumna responde que es un cuadrado y explica que tiene esta forma *"porque en la expresión es* $(2x+1)^2$", y enfatiza *al cuadrado*. Además explica que con el método de la caja calcula las áreas y que los factores son sus dimensiones.

IV.3.2. Análisis del desempeño sujeto Al

El nivel de desempeño de este alumno es medio ya que aunque para las destrezas I1, I2 e II1 su nivel de desempeño es alto, muestra dificultades en la resolución de tareas que implican las destrezas I3, I4 y II2. Los errores que comete relativos a la destreza I1 (Conversión G⇔S) y I2 (Conversión S⇔C) son del tipo afectivo y pueden ser solventados sin gran dificultad.

En lo que se refiere a la destreza I4, consideramos que su nivel de desempeño es medio. En la actividad 9, cuando debe calcular el área de las representaciones con Algebra Tiles, comete seis veces el error *No reconoce las áreas en las figuras (12)*. No obstante, muestra un dominio de este modelo al realizar bien las actividades 11a y 11b y además es el único alumno que en la prueba final (actividad 1) optó por representar geométricamente la identidad notable $(x+1)^2$ mediante Algebra Tiles. De igual manera, cuando en la entrevista le preguntamos por el valor de las áreas en el ejercicio F2d (Figura 20), el alumno hace referencia a las piezas de Algebra Tiles. "*Dentro quedaría, un cuadrado azul, en la derecha un verde de x, debajo 1 verde y luego estaría uno amarillo".*

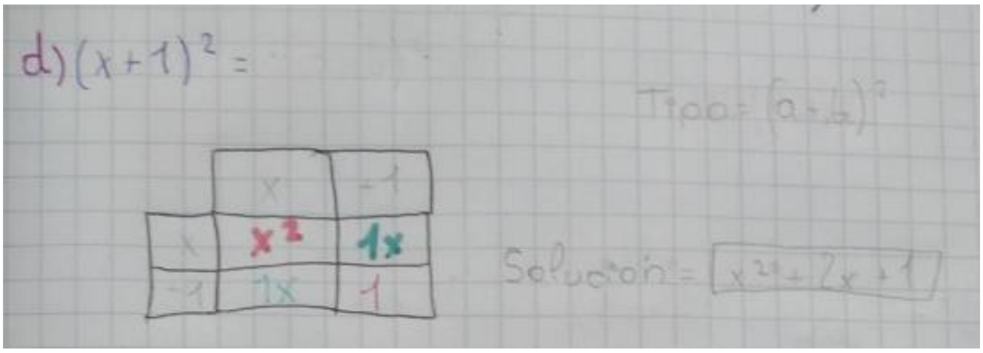


Figura 20. Respuesta al ejercicio F2d del alumno Al

En cuanto a la destreeza II1 para desarrollar identidades notables mediante el método de la caja, podemos afirmar que su nivel de desempeño es alto, pues realiza correctamente todas las actividades y tan solo comete dos errores de tipo operacional aritmético (51) y algebraico (22). Finalmente, respecto a la destreza II2, el nivel de desempeño es medio pues el alumno no es capaz de reconocer las soluciones de la factorización en ninguno de los apartados (32).

IV.3.3. Análisis del desempeño de la alumna An

El nivel de desempeño global de esta alumna es medio al igual que la mayoría de destrezas. A la destreza I1 le asignamos un nivel de desempeño alto, ya que tan solo comete 3 errores de tipo afectivo al dejar algunos apartados incompletos o incurrir en errores de cálculo (errores que muy probablemente se deban a un exceso de confianza). Para la destreza I2 asignamos un nivel de desempeño medio. Su obstáculo se debe al error (22) error operacional al multiplicar monomios.

La alumna faltó en la tercera sesión, por lo que disponemos de menos información suficiente para valorar la destreza I4, pero el ejercicio 9 lo resuelve correctamente. Al haber trabajado menos con el modelo de Algebra Tiles y no haber hecho referencia a él, le asignamos un nivel de desempeño medio. Tampoco respondió a la actividad 14 cuando se pide relacionar la representación geométrica con el método de la caja, si bien, en la prueba final, para representar la identidad notable, se vale del método de la caja, por lo que atribuimos un nivel medio a la destreza I3.

Para la destreza II1 asignamos un nivel de desempeño medio, pues conoce el procedimiento pero incurre en muchos errores de tipo operacional (21, 22) e igualmente indicamos que tiene un nivel de desempeño medio en la destreza II2, por los errores 31 y 32 para calcular los factores.

IV.3.4. Análisis del desempeño de la alumna C

El nivel de desempeño de esta alumna es medio, debido principalmente a su bajo nivel en las destrezas relacionadas con el sentido espacial. Comete errores de tipo *No representa adecuadamente el modelo geométrico (11)*, *No reconoce las áreas en las figuras (12)* y *No reconoce las longitudes de las figuras (13)*. En la actividad 7b (Figura 21 izquierda) comete el error 11 y en la actividad F1 (Figura 21 derecha), a pesar de ayudarse con el método de la caja, no relaciona los modelos geométrico y simplificado, ni reconoce las áreas y longitudes homólogas.

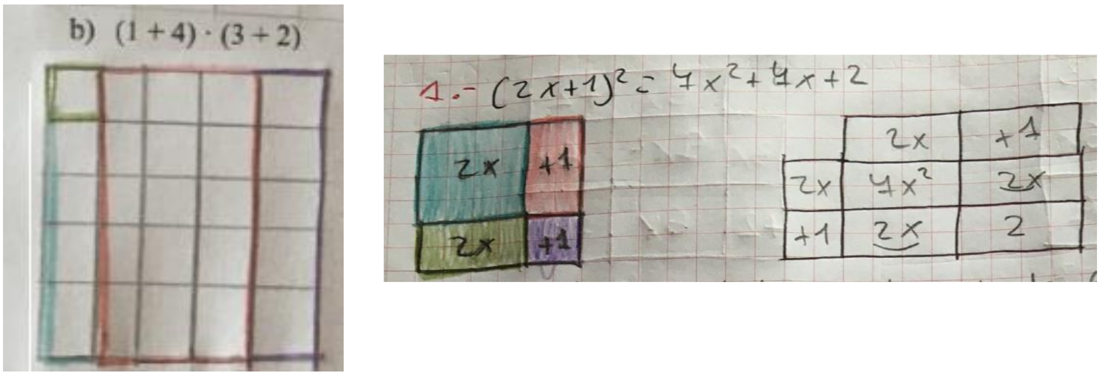


Figura 21. Errores 11, 12 y 13 de la alumna C

Aunque la alumna es capaz de convertir la representación geométrica en simbólica y viceversa en expresiones sencillas, muestra dificultades en contextos más complicados, por lo que consideramos que su nivel de desempeño para la destreza I1 es bajo. Sin embargo, en lo que se refiere a la destreza I2, su nivel de desempeño es medio, pues aunque tiene algunos errores en la multiplicación de monomios, la alumna es capaz de aplicar el método de la caja de manera adecuada. Respecto a la destreza I3, le asignamos el nivel de bajo, por el ejemplo que mostrábamos antes. En cambio, a la destreza I4 le asignamos el nivel medio, ya que aunque en la actividad 9 comete errores 12 y 13 a la hora de determinar áreas y longitudes a las figuras, en el ejercicio 11D (Figura 22, convierte correctamente todas las expresiones en rectángulos con ayuda de Algebra Tiles.

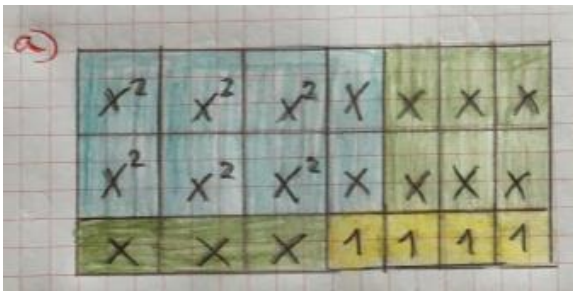


Figura 22. Respuesta a la actividad 11D de la alumna C

Respecto de las destrezas II1 y II2 también tienen el nivel medio por los errores operacionales con monomios y porque a la hora de factorizar a veces no identifica la solución. Creemos que esto puede tener relación directa con el bajo nivel en las destrezas relacionadas con el sentido espacial. Como comentario final, cabe destacar que esta alumna compensa estas dificultades con una actitud muy positiva ante las actividades.

IV.3.5. Análisis del desempeño de la alumna Cl

El nivel de desempeño global de la alumna Cl es medio-bajo. El nivel de desempeño de la destreza I1 es medio, ya que aunque por la información de la Tabla 26 parece que no comete muchos errores, cuando en la prueba final se le pide representar geométricamente la identidad notable, no es capaz de realizarlo, ni siquiera ayudándose del método de la caja. En lo que respecta a la destreza I2, su nivel de desempeño es medio, pues, aunque tiene algunos errores en la multiplicación de monomios, la alumna es capaz de aplicar el método de la caja de manera adecuada. El nivel de desempeño de la destreza I3 es bajo por lo comentado anteriormente. En la actividad 14 (Figura 23) al representar geométricamente la información obtenida con el método de la caja vemos que la alumna no realiza correctamente la representación geométrica del cuadrado de una suma.

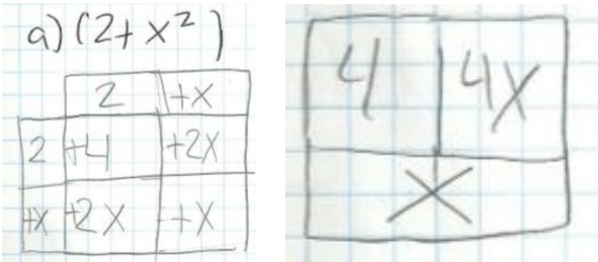


Figura 23. Respuesta de la alumna Cl a la actividad 14a

El nivel de desempeño de la destreza I4 es medio. ya que aunque comete errores (12, 13) a la hora de determinar áreas y longitudes a las figuras (ejercicio 11D) convierte correctamente todas las expresiones en su representación geométrica con Algebra Tiles. Respecto a la destreza II1, le asignamos el valor medio pues, aunque conoce el procedimiento, un tercio de los errores que comete la alumna se deben a las operaciones con monomios (errores 21 y 22) en estas actividades. Finalmente, el nivel de desempeño en la destreza II2 es bajo pues se equivoca en todos los apartados de factorización de la prueba final. Llama la atención, que en la actividad 16 (Figura 24), la alumna factoriza correctamente el apartado 16b pero muestra dificultades a la hora de situar los factores cuadrados perfectos en los apartados d y e.

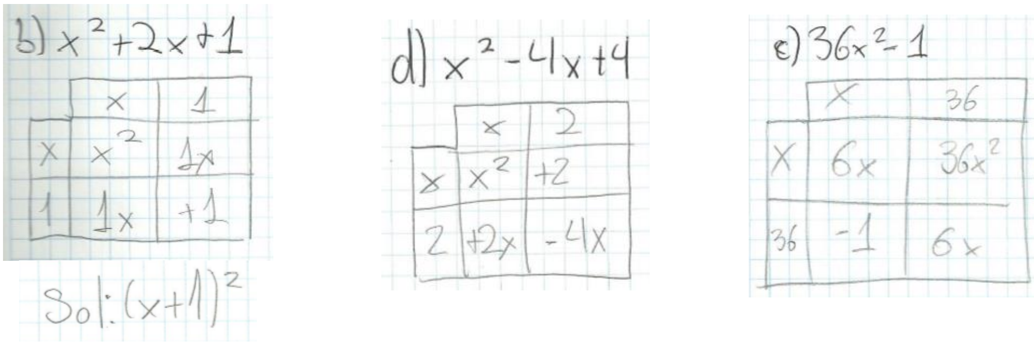


Figura 24. Respuestas de la alumna Cl a las actividades 16b, 16d y F3c, respectivamente.

En la prueba final, la alumna se muestra perdida e indica no recordar cómo se factorizaba $4x^2 + 12x + 9$. (ver el siguiente extracto)

Cl: Pues yo de esto la verdad es que no me había enterado mucho y lo he intentado como he podido. Primero puse en el lateral primero x y abajo +9

E: ¿por qué?

Cl: Porque la x no sé podía simplificar

E: ¿Qué x? Cuéntame en qué estás pensando

Cl: Yo primero puse dentro el $4x^2$ y abajo en la diagonal +12x.

E: Vale, ¿sabes decirme por qué?

Cl: Porque no se podía hacer la raíz cuadrada

E: ¿De cuál?

Cl: De esos dos.

E: Vale

Cl: Y luego como el 9 sí se podía hacer, lo hice y lo puse en los otros dos. Y ya pues puse el +9 arriba y abajo en el lateral, y después puse una x en los otros dos.

E: ¿Y cuál sería la solución?

Cl: Pues yo puse $(4x^2 + 3)^2$

IV.3.6. Análisis del desempeño de la alumna D

El nivel de desempeño global es alto ya que también es alto en todas las destrezas, salvo en la I4 (medio) porque aunque muestra dificultades al calcular las áreas con Algebra Tiles, después representa sin problemas con dicho modelo.

IV.3.7. Análisis del desempeño de la alumna J

Esta alumna tiene un nivel de desempeño global medio. El nivel de desempeño de la destreza I1 es alto (tan solo comete un error), de la I2 medio por los errores operacionales tanto en álgebra como en aritmética, el nivel en la I3 alto ya que realiza correctamente todas las conversiones del método de la caja a la representación geométrica. En la destreza I4 tiene nivel medio, pues a pesar de reconocer perfectamente las áreas, muestra dificultades a la hora de determinar las longitudes. En la destreza II1 su nivel es medio por los errores de tipo afectivo y operacional que comete. Finalmente, su nivel de bajo en lo que respecta a la destreza II2 ya que a pesar de que la actividad 16 la realiza sin mayor dificultad, salvo errores, en la prueba final no es capaz de factorizar por no conocer el procedimiento (Ver Figura 25). En efecto, en la entrevista informa de que no comprende qué tiene que hacer (ver siguiente extracto)

J: Ah sí, es que lo de factorizar no lo entendía muy bien
E: Vale, (Lee el enunciado). Cuéntame lo que has hecho.
J: Los que se podía dividir a la mitad, los he dividido a la mitad
E: Vale, ¿por qué a la mitad?
J: Porque factorizar significa hacerlo el mismo más pequeño. ¿no?
E: Vale, entonces lo has hecho por la mitad, y luego ¿qué has hecho?
J: Pues lo he dejado así
E: No, pero aquí has dividido por la mitad y has sacado el cuadrado fuera (señalando el 3a) ¿Por qué has hecho eso?
J: Porque lo he representado como si estuviera el más pequeño, pero elevado porque significa el mismo número que antes

a) $4x^2 + 12x + 9 =$
$(2x)^2 \, (+6x)^2 \, (-3)^2$

Figura 25. Respuesta de la alumna J en la actividad F3a

Destacamos que a pesar de tener un nivel de desempeño medio en la destreza II1, pues de forma general es capaz de desarrollar las identidades notables, en la actividad F4 de la prueba final (Figura 26), no identifica el cuadrado de una suma.

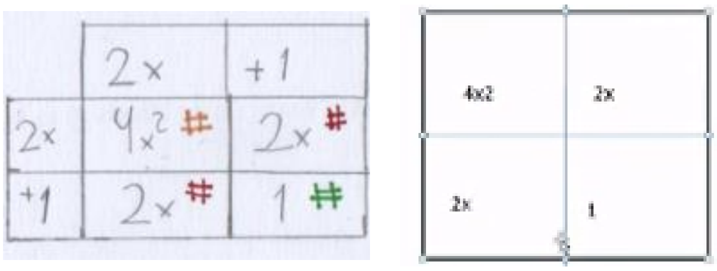
$(x+5)^2 = x^2 + 25$

Si es correcto porque si hiciesemos una tabla el x elevado a 2 es x2 y el 5 elevado a 2 es 25.

Figura 26. Respuesta a la actividad F4 de la alumna J

IV.3.8. Análisis del desempeño del alumno Ju

El alumno muestra un nivel de desempeño global medio-bajo. En la destreza I1 el nivel es alto puesto que no comete ningún error y en la destreza I2 su nivel es medio debido a la gran cantidad de errores que comete al operar monomios. En la destreza I3 su nivel es medio, pues aunque es capaz de representar geométricamente a partir de la caja, cuando se le pregunta por las dimensiones del rectángulo comete errores calculando la longitud con las áreas. En la entrevista se le pide terminar la actividad F1a (Figura 27), pues no había representado geométricamente tarea que realiza sin problemas, pero al preguntarle por el valor de la altura, suma las áreas (también se equivoca sumando).



E: Vale, ese es el cuadrado, ¿cuánto mediría de alto?
Ju: 6
E: ¿Por qué?
Ju: Porque 4 más 2 es 6
E: Vale, ¿y de ancho?
Ju: De ancho sería, otros 6

Figura 27. Respuesta a la actividad F1a del alumno Ju. Cuaderno de trabajo (izquierda), representación realizada durante la entrevista (centro), transcripción de la entrevista (derecha)

En la destreza I4 su nivel de desempeño es alto. Resulta interesante ver (Figura 28) como el alumno se apoya del material el papel (él era uno de los alumnos que pudo imprimirse el cuaderno de trabajo) para anotar las dimensiones de cada una de las piezas de los modelos de Algebra Tiles.

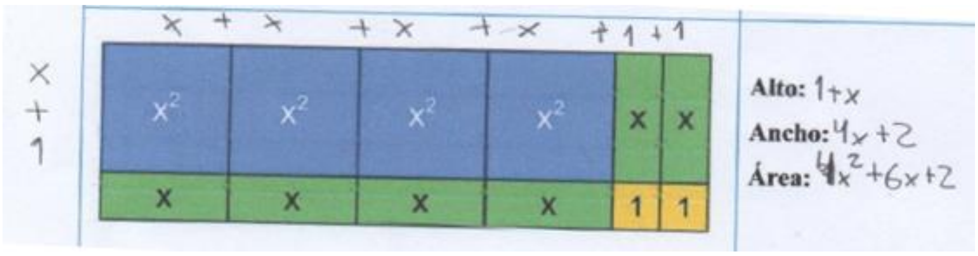


Figura 28. Respuesta a la actividad 9d del alumno Ju

En la destreza II1 su nivel es medio por la cantidad de errores al operar monomios y en la destreza II2 el nivel es bajo porque no conoce el procedimiento para factorizar. En la actividad F3f (Figura 29) se pide factorizar la expresión $9x^2 - 4$ y el alumno parece realizar un procedimiento similar al desarrollo de identidades notables pero sin sentido.

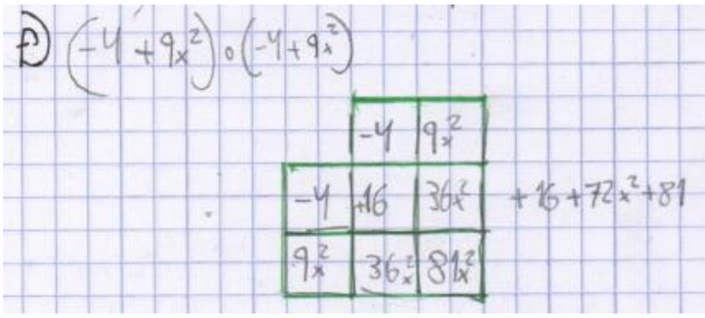


Figura 29. Respuesta a la actividad F3f del alumno Ju

IV.3.9. Análisis del desempeño del alumno R

El alumno muestra un nivel de desempeño global bajo. Su rendimiento fue muy variable, en las sesiones terminaba siempre el último y la docente se tenía que quedar más tiempo con él para ayudarle con las dificultades. En la destreza I1 tiene un nivel bajo porque según vemos en la actividad 7 no es capaz de representar geométricamente el modelo de área. En la destreza I2, su nivel es medio debido a la gran cantidad de errores que comete al operar monomios aunque conoce el procedimiento. En la destreza I3 su nivel es bajo, pues si vemos la actividad 14b (Figura 30), aunque representa adecuadamente el modelo geométrico del cuadrado de la suma, no lo relaciona con las áreas calculadas con el método de la caja.

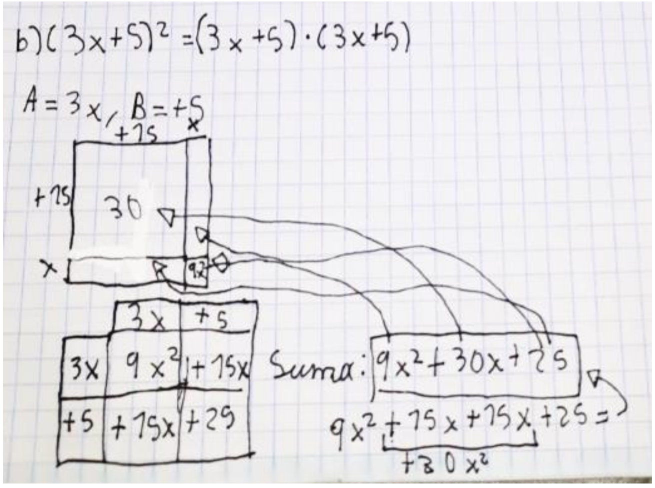


Figura 30. Respuesta en la actividad 14n del alumno R

En la destreza I4 su nivel es bajo porque no es capaz de calculas ni las áreas ni las longitudes ni representa con Algebra Tiles la actividad 14. En las destrezas II1 y II2 también es bajo pues no identifica la estructura de las identidades notables (Figura 31, izquierda), no conoce el procedimiento para factorizar (Figura 31, derecha) y comete una gran cantidad de errores al operar.

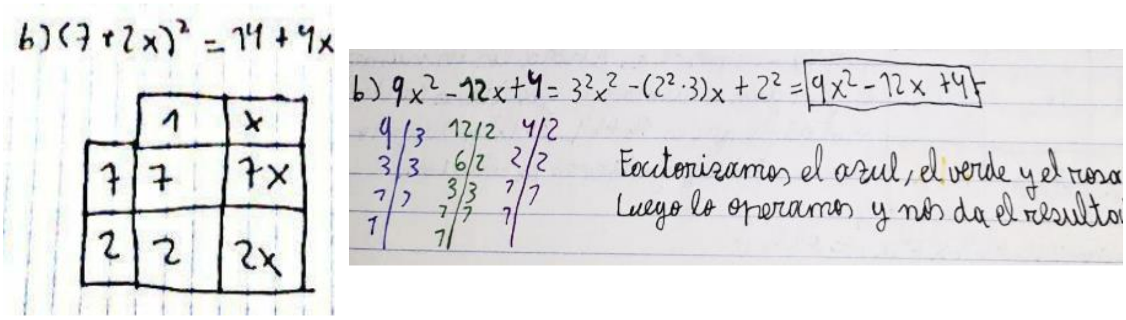


Figura 31. Respuestas a las actividades 15b y F3a

IV. 4. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

En este apartado realizamos una discusión de los resultados presentados.

Según la Tabla 24 el mayor número de errores (34%) que comete el alumnado derivan de las operaciones con monomios, seguidos de los errores relacionados con la factorización (24%), de las destrezas que requieren hacer uso del sentido espacial (21%) y de los errores con origen en actitudes afectivas y emocionales (19%).

Los errores en las operaciones con monomios son inherentes al trabajo en el contexto algebraico y es de suponer que cualquier propuesta didáctica que implique el uso de identidades notables tenga asociada esta dificultad y dependerá de las destrezas algebraicas del alumnado más que del diseño de la propuesta. De igual manera ocurre con los errores con origen en actitudes afectivas y emocionales. Sería interesante estudiar, en qué medida ha influido el hecho de la docencia se haya impartido de manera online sin que docente y alumnado tuvieran experiencia previa con este tipo de metodología. Es un factor que no puede olvidarse pero sobre el que no tenemos información. Además, consideramos importante que el alumno disponga del material impreso para trabajar.

Respecto a los errores relativos al sentido espacial, observamos que el 83% de estos se comenten al hacer uso del modelo geométrico de Algebra Tiles. Atendiendo al análisis anterior vemos que las dificultades surgen a la hora de identificar longitudes y áreas en estos modelos. No obstante, las evidencias sugieren que el modelo geométrico de Algebra Tiles sirve de ayuda al alumnado para construir las representaciones geométricas. Suponemos que el uso de la aplicación facilita la representación de las expresiones principalmente por dos motivos: el punto de partida del alumno no es cero, sino que dispone de las piezas con las que debe construir la representación (tanto para el área como para las longitudes), y el usuario puede construir la representación geométrica por ensayo y error dado que la aplicación permite marcar en primer lugar las longitudes del rectángulo y posteriormente completar el área.

En lo que respecta al trabajo con las identidades notables, queremos destacar el error *No reconocer la identidad notable (41)*. En nuestra recogida de datos, son dos los alumnos los que lo cometen, J en 1 ocasión y R en 3, sujetos cuyos niveles de desempeño globales son medio-bajo y bajo, respectivamente. Este hecho, coincide con los resultados de Vega-Castro (2013) quien afirma que los estudiantes no perciben la estructura de las identidades notables de manera espontánea.

Por otro lado, en relación con el análisis de las dificultades en la factorización destacamos que 7 de los 9 alumnos comenten errores al identificar la solución de la factorización. Este resultado es indicativo de la necesidad de incluir actividades complementarias para afianzar el aprendizaje y reconocimiento de las identidades notables, adaptando la propuesta didáctica a los diferentes ritmos de aprendizaje.

El análisis del desempeño individual del alumnado y la observación de las dianas de desempeño sugiere cierta relación entre la destreza I3 (capacidad para relacionar la representación geométrica con el método de la caja) y la destreza II2 (factorizar identidades notables), ambas situadas en vértices opuestos. Las alumnas A y D con nivel alto en la destreza I3 también lo tienen en la II2. La alumna Cl muestra nivel bajo en ambas destrezas. A la vista de lo limitado de la muestra, sería necesario seguir realizando investigaciones al respecto, para confirmarlo. También resulta difícil de verificar, porque parece ser que algunos alumnos compensan su limitación en las habilidades espaciales con el dominio del procedimiento (Como es el caso de la alumna C). Es una cuestión abierta a explorar en futuros estudios.

Frente a la hipótesis anterior tenemos el caso de la alumna J, que con un alto nivel de desempeño de la destreza I3, muestra un bajo nivel en la factorización. En este caso, la alumna muestra dificultades a la hora de identificar las longitudes de los modelos geométricos (error 13) y dado que la factorización está estrechamente ligada con el cálculo de una longitud, podría ser interesante para futuros estudios.

Finalmente, queremos destacar cómo hay alumnos que evolucionan positivamente como es el caso de la alumna C, que con el tiempo mejora su rendimiento (comienza teniendo muchas dificultades con las actividades relativas a la destreza I1, pero sus resultados en la prueba final en la factorización de identidades notables son satisfactorios. En cambio, alumnos como Cl, J y R, cometieron menos errores en la factorización durante la actividad 15 que en la prueba final.

V. CONCLUSIONES

Este último capítulo recoge las conclusiones obtenidas de la realización de este trabajo de investigación.

Logro de objetivos

Consideramos conseguido el primer objetivo específico (OE1) consistente en *identificar y analizar en la literatura las propuestas de uso del método de la caja para la factorización de identidades notables*. A partir de la revisión de la literatura hemos recopilado los trabajos de investigación que incluyen el método de la caja u otros similares para el trabajo con las identidades notables y que nos han servido como punto de partida para diseñar la propuesta didáctica. De esta manera, hemos procurado prestar atención a las limitaciones de las propuestas del resto de autores para tratar de reducirlas.

El segundo objetivo específico (OE2) planteado era *diseñar un experimento de enseñanza para implementar una propuesta didáctica para la enseñanza de las identidades notables basada en el método de la caja*. El experimento de enseñanza diseñado, implementado en el mes de abril, se describe en el capítulo III. En su diseño se ha tenido en cuenta la fundamentación teórica, las potencialidades y debilidades de otras propuestas, la experiencia previa de la docente, las características del alumnado y la progresión en la dificultad de las tareas. El foco principal giraba en torno a favorecer un aprendizaje significativo evitando que el alumnado memorizara un algoritmo sin comprender los conceptos involucrados. El cuaderno de trabajo asociado a dicha propuesta constituye el instrumento de recogida de datos utilizado en el experimento de enseñanza realizado para implementarla. La propuesta didáctica elaborada es descrita de forma que permite su implementación y/o adaptación en otros contextos.

El objetivo OE3, *analizar y clasificar los errores cometidos por el alumnado al trabajar con el método de la caja en el contexto del experimento de enseñanza*, ha sido alcanzado. A partir de las producciones escritas de los sujetos de estudio, complementadas con cinco entrevistas semiestructuradas, se han clasificado los errores en base a su origen y se han explorado relaciones entre actividades, alumnos, tipo de error y destrezas implicadas.

Para dar respuesta al objetivo OE4, *describir el nivel de desempeño del alumnado en tareas que impliquen relacionar y conectar diversos métodos de representación y en* *tareas de desarrollo y factorización de identidades notables*, se han clasificado las tareas del cuaderno de trabajo en función de las destrezas requeridas para su resolución, pudiendo de esta forma describir el nivel de desempeño individual del alumno para cada destreza y, con ayuda de un diagrama, representar y valorar el nivel de desempeño global de cada uno de ellos.

Dicho lo cual, tratamos de dar respuesta a las preguntas planteadas al inicio:

¿Qué errores y dificultades presentan los estudiantes de secundaria cuando abordan la factorización y desarrollo de identidades mediante una aproximación geométrica del método de la caja?

Se aporta una clasificación de los errores identificados en el trabajo de los alumnos. El mayor número de errores (34%) que comete el alumnado deriva de las operaciones con monomios, seguidos de los errores relacionados con la factorización (24%), de los relacionados con las destrezas que requieren hacer uso del sentido espacial (21%) y de los errores con origen en actitudes afectivas y emocionales (19%).

¿El uso de este método favorece un buen rendimiento del alumno en tareas de factorización y desarrollo de identidades notables?

La respuesta a esta pregunta requiere la continuación de la investigación pues el tamaño de la muestra es limitado. Según los niveles de desempeño descritos, en lo que respecta al desarrollo de identidades notables tres muestran un nivel alto (33%), cinco muestran un nivel medio (56%) y tan solo uno de ellos muestra nivel bajo (11%). Respecto a la factorización, dos muestran un nivel alto (22%), tres muestran un nivel medio (33%) y el resto muestran un nivel bajo (44%).

¿Influye la capacidad del alumnado de relacionar y conectar las diferentes representaciones en el rendimiento en tareas con identidades notables?

Parece haber cierta relación entre la destreza I3 (capacidad para relacionar la representación geométrica con el método de la caja) y la destreza II2 (factorizar identidades notables). Las alumnas con nivel alto en la destreza I3 también lo tienen en la II2. Otra alumna muestra nivel bajo en ambas destrezas. A la vista de lo limitado de la muestra, sería necesario seguir realizando investigaciones al respecto, para confirmarlo. Resulta difícil de verificar porque parece ser que algunos alumnos compensan su limitación en las habilidades espaciales con el dominio del procedimiento.

Limitaciones del estudio

Son varias las limitaciones experimentadas y asociadas a la investigación aquí expuesta. Una de las principales limitaciones del estudio es la situación excepcional de Estado de Alarma que ha obligado a suspender la docencia presencial, debiendo impartir las clases de forma virtual sin la preparación ni los medios adecuados para ello. Consideramos que el desempeño del alumnado sería más alto si este dispone del cuaderno de trabajo en formato impreso y puede disponer del tiempo suficiente para familiarizarse con la herramienta Algebra Tiles.

Por otro lado, el caso que hemos abordado en la investigación se limita a la factorización de expresiones cuadráticas y más concretamente a las identidades notables. Aunque los resultados de la investigación pueden ser aplicados a situaciones similares, sería muy aventurado generalizar los resultados. La muestra escogida tiene un tamaño pequeño. De igual manera, al no haber realizado el experimento de enseñanza de manera presencial, mucha información se ha perdido en el camino. En otras circunstancias podríamos haber evaluado la interacción entre los alumnos y la información que ofrecen de forma no verbal, más aún, tratándose de un contexto centrado en diferentes representaciones.

Líneas de investigación futuras

En línea con las investigaciones de Vega-Castro, Molina y Castro (2012) creemos que puede resultar interesante analizar el sentido estructural que ponen de manifiesto estudiantes de cursos más avanzados al implantar nuestra propuesta didáctica incorporando algunas estructuras más complejas.

Por otro lado, dado que se trata de un método para factorizar, el siguiente reto es diseñar otra propuesta para factorizar cualquier polinomio de segundo grado con raíces enteras, intentando reducir las dificultades que presentan los alumnos al buscar los factores.

También creemos necesario indagar sobre la posible influencia de la capacidad del alumnado de relacionar y conectar las diferentes representaciones con su rendimiento en tareas con identidades notables, complementando los resultados de Norton (2007) sobre la mejora de las habilidades de manipulación simbólica y de Méndez (2012) sobre el desarrollo de las habilidades cognitivas y el pensamiento abstracto.

VI. REFERENCIAS

Alcívar, A. A., Imacaña, J. M. (2018). *Herramientas multimedia en el aprendizaje de productos notables de los estudiantes con escolaridad inconclusa del noveno y décimo año de Educación General Básica*. (Tesis doctoral) Universidad de Guayaquil, Ecuador.

Ontario Association for Mathematics Education [OAME] (2020). *Algebra Tiles* (Versión 1). Disponible en: https://mathies.ca/learningTools.php

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM

Clausen-May, T. (2005). *Teaching maths to pupils with different learning styles*. London: Paul Chapman Publishing.

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Desing experiment in Educational Research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Chua, B. L. (2017). Empowering learning in an algebra class: The case of expansion and factorisation. En K. Berinderjeet y L.N. Hoe (Eds.). *Empowering Mathematics Learners: Yearbook 2017, Association of Mathematics Educators* (pp. 9-29).

Flores, A. (2002). Geometric representations in the transition from arithmetic to algebra. En F. Hitt (Ed.), *Representations and Mathematics visualization* (pp. 9-29). Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Gatley, W. (1991). *Algebra tiles*. Program Service Vancouver School Board. Vancouver.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación* (5a ed.). México, DF: McGraw-Hill.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2005). Students‟ difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proc. 29th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3)*, (pp 145-152). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Kaput, J. (1995). *A research base supporting long term algebra reform*? Documento presentado en el encuentro anual de North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Columbus, OH.

Kaput, J. (1998). *Teaching and Learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, Massachusetts: NCISLA.

Kaput, J. (2000). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Documento presentado en el encuentro anual de North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Columbus, OH.

Larbi, E. (2011). *The effect of algebra tiles on student´s performance in algebra at the junior high school*. Trabajo fin de máster. Ghana. Universidad of Cape Coast.

Leitze, A. R., y Kitt, N. A. (2000). Using homemade algebra tiles to develop algebra and prealgebra concepts. *Mathematics Teacher, 93*(6), 462-466.

Leong, Y. H., Yap, S. F., Teo, y. M. L., Subramaniam, T., Zaini, I. K. M., Quek, E. C., y Tan, K. K. L. (2010). Concretising factorisation of quadratic expressions. *The Australian Mathematics Teacher, 66*(3), 19-24.

Maseko, J. (2012). Factorisation of quadratics using a Web-based spreadsheet for grade 10 mathematics learners (Tesis doctoral). University of Johannesburg, Johannesburgo.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75–88.

Morales, I. (2008). *Propuesta de enseñanza para la factorización algebraica*. (Tesis doctoral). Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, México.

Méndez, T. y Martínez, L.L. C. (2008). Dificultades en la práctica de productos notables y factorización. *Revista del Instituto de Matemática y Física*, *11*(15).

Méndez, T. (2012). Marco figural como medio para factorizar polinomios polinomios cuadráticos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 26*(44), 1395-1416.

Norton, S. J. (2007). Linking number and algebra through the distributive law. En J. Vincent, J. Dowsey y R. Pierce (Eds), *Proceedings of the 44th annual conference of the Mathematical Assiocation of Victoria* (pp. 233–250). University of Melbourne.

Palarea, M.ª M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detención de errores comunes cometidos en álgebra por los alumnos de 12 a 14 años*. (Tesis doctoral). Universidad de la Laguna, Tenerife.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado (BOE) de 3 de enero de 2015, 169-546.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. PNA, 4(1), 1-14.

Ruano, R. M., Socas, M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, *2*(2), 61-74.

Sandoval Martínez, M., García Avalos, M., Sepúlveda Palacios, G. E., y Suárez Rodríguez, C. (2019). Teaching Factoring Quadratics Using the Generic. *Intenational Research in Education, 5*(1), 86-99.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). La Laguna: SEIEM.

Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: LAE.

Thornton, G. J. (1995). Algebra tiles and learning styles. (Tesis doctoral). Simon Fraser University, British Columbia, Canadá.

Valverde, A. G. (2014). Experimentos de enseñanza: Una alternativa metodológica para investigar en el contexto de la formación Inicial de docentes. *Actualidades Investigativas en Educación, 14*(3), 1-20.

Vega-Castro, D. (2013). Perfiles de alumnos de Educación Secundaria relacionados con el sentido estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *RELIME, 15*(2), 233-258.

Welder, R. M. (2012). Improving algebra preparation: Implications from research on student misconceptions and difficulties. *School, Science and Mathematics, 112*(4), 255-264.

Yahya, N. y Shahrill, M. (2015). The strategies used in solving algebra by secondary school repeating students. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 186, 1192-1200.

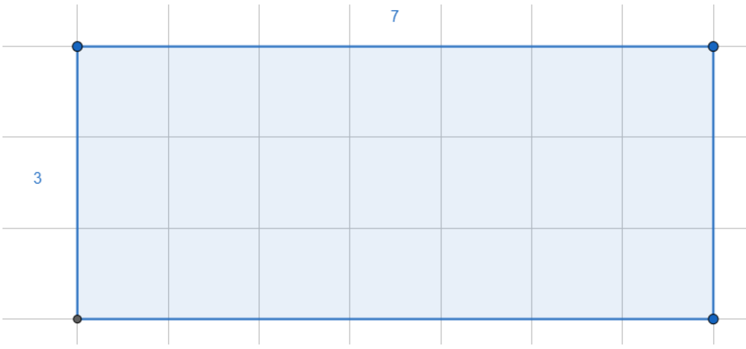
ANEXO 1: PROPUESTA DIDÁCTICA

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA TRABAJAR LAS IDENTIDADES NOTABLES. GUÍA PARA EL DOCENTE

Sesión 1: Modelo de área para la multiplicación en contextos aritméticos

En esta sesión el docente presenta el modelo de área para la multiplicación en contextos aritméticos a través de una serie de casos. Así, de forma dirigida el alumnado será capaz de asociar la operación multiplicación con el cálculo de áreas en rectángulos. A continuación, se presenta la propiedad distributiva del producto respecto de la suma también de manera gráfica.

CASO 1. Dado el siguiente rectángulo, calcula el número de cuadraditos que lo forman (esta será su área):



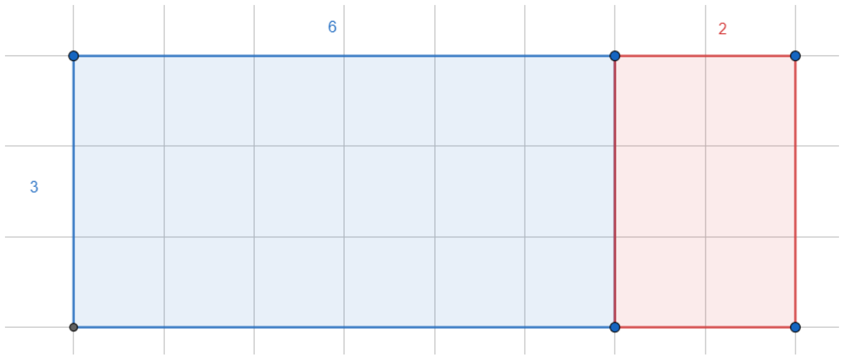
¿Cómo lo has hecho?

Puedes contar los cuadraditos o hacer una multiplicación, en ambos casos obtienes el mismo resultado.

Haz clic en el siguiente enlace y observa cómo es válido para los diferentes ejemplos. Utilizan los deslizadores para cambiar la altura y anchura del rectángulo. geogebra.org/geometry/s3bjc3qz

Enlace: www.geogebra.org/m/pubxf4wa

CASO 2. Calcula el número de cuadrados que forman el área azul y el número de cuadrados que forman el área roja *realizando una operación*.

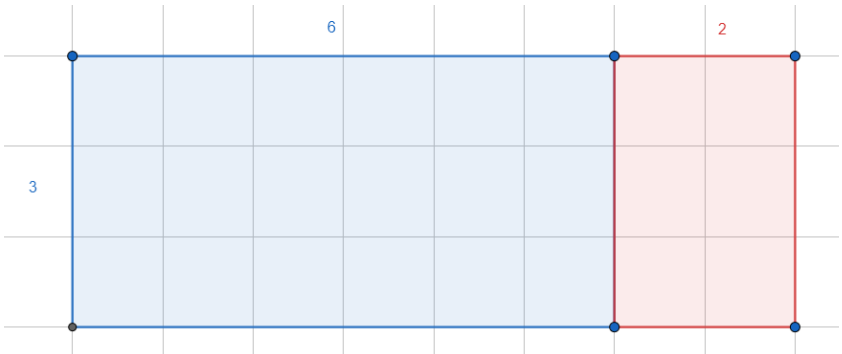


¿Qué operaciones has utilizado? ¿Cómo podemos calcular el área total con una sola operación?

Comprueba los resultados en varios ejemplos haciendo clic en el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/rjwa9n34 y averigua qué propiedad matemática que has estudiado en cursos anteriores se cumple.

Propiedad distributiva

La propiedad que buscábamos es la llamada la *propiedad distributiva del producto respecto de la suma*. La podemos aplicar para calcular al área total de la figura.



Calculamos el área azul: $3 \cdot 6 = 18$

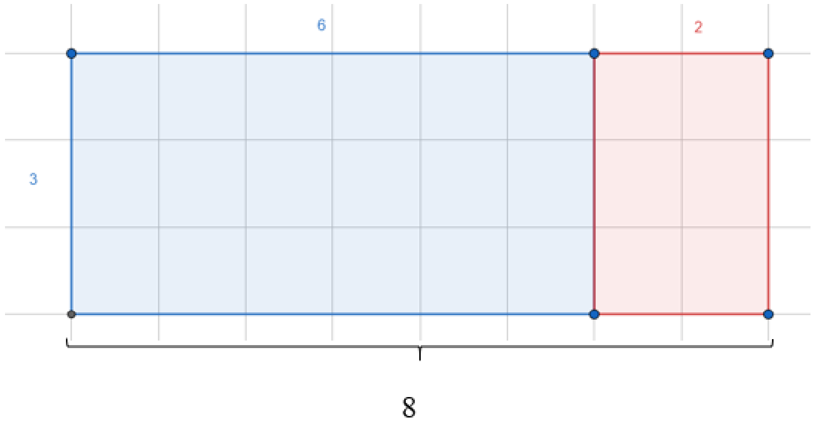
Calculamos el área roja: $3 \cdot 2 = 6$

El área del rectángulo total es igual a la suma del área azul más el área roja, $18 + 6 = 24$

Y podemos escribirlo todo en una misma operación,

$$3\cdot 6+3\cdot 2=18+6=24$$

Pero dado que la altura de ambos rectángulos es la misma, lo podemos calcular directamente,



$$3\cdot(6+2)=3\cdot(8)=24$$

Decimos que ambas operaciones con equivalentes, ya que su resultado es el mismo.

$$3\cdot 6+3\cdot 2=18+6=24$$

$$3\cdot(6+2)=3\cdot(8)=24$$

Si lo escribimos todo en la misma línea,

$$3\cdot(6+2)=3\cdot 6+3\cdot 2=18+6\ =24$$

Pues bien, la propiedad matemática que se cumple es la llamada *propiedad distributiva del producto respecto de la suma*.

El producto de un número por la suma de dos o más sumandos es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos.

$$3\cdot(6+2)=\underbrace{3\cdot 6}+\underbrace{3\cdot 2}=18+6\ =24$$

Así, observa los siguientes ejemplos:

$$2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14$$

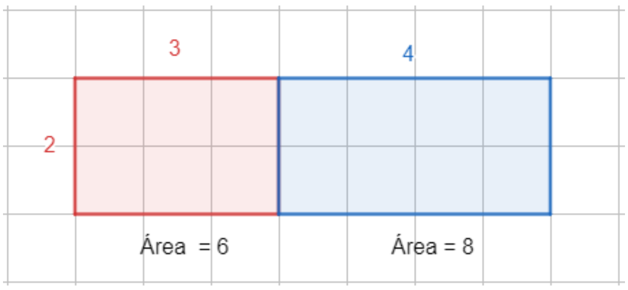
$$2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot (7) \ = \ 14$$

Ambas operaciones son equivalentes. En la primera línea hemos aplicado la propiedad distributiva y en la segunda línea hemos aplicado la jerarquía de las operaciones (calculando primero el paréntesis).

Gráficamente lo podemos representar como el área de dos rectángulos. Observa la siguiente figura, ambos rectángulos tienen altura 2 unidades y de base 3 y 4 unidades respectivamente.

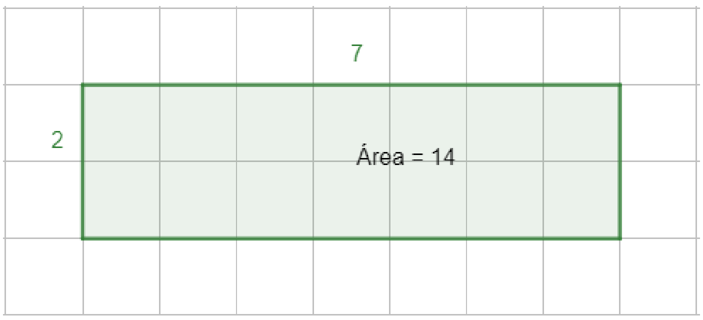
Vamos a calcular el área de los rectángulos, es decir, cuántas unidades cuadradas hay dentro de ellos. Para ello, basta con multiplicar base por altura o viceversa.

$$A \ = \ b \ \cdot \ h \ = \ h \ \cdot \ b$$



$$\color{red}{2 \cdot 3} + \color{blue}{2 \cdot 4} = \color{red}{6} + \color{blue}{8} = 14$$

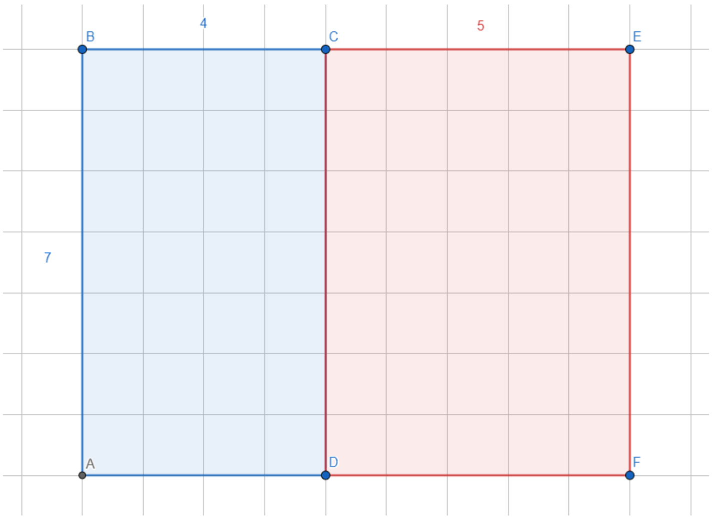
Para calcular el área total podemos calcular cada una de las áreas por separado o bien aplicar la propiedad distributiva, puesto que ambos tienen la misma altura.



$$2 \cdot (\color{green}{3 + 4}) = 2 \cdot (\color{green}{7}) \ = \ 14$$

Actividad 1

Dados los siguientes rectángulos, copia en tu cuaderno el cálculo del área y señala con colores en la expresión matemática qué parte se corresponde con el área azul y cuál se corresponde con el área roja.



$$7 \cdot (4+5) = 7 \cdot 4 + 7 \cdot 5$$

$$7 \cdot (9) = 28 + 35$$

$$63 \;=\; 63$$

$$\mathbf{1 \cdot (2+9) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 9}$$

$$\mathbf{1 \cdot (11) = 2 + 9}$$

$$\mathbf{11 \;=\; 11}$$

Actividad 2

En tu cuaderno, dibuja un rectángulo (usa dos colores) para cada una de las siguientes expresiones imitando los ejemplos que hemos trabajado:

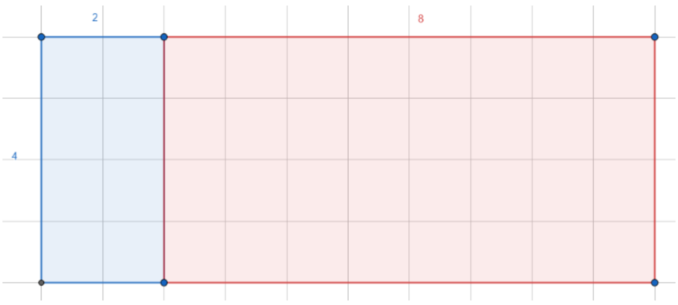
b) $3 \cdot (5+7) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 7$

c) $6 \cdot (2 + 6) = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 6$

Actividad 3

En tu cuaderno, calcula las áreas de los siguientes rectángulos aplicando la propiedad distributiva, siguiendo el ejemplo. Usa colores para relacionar el cálculo con el dibujo, como se muestra en el ejemplo.

a) Figura 1

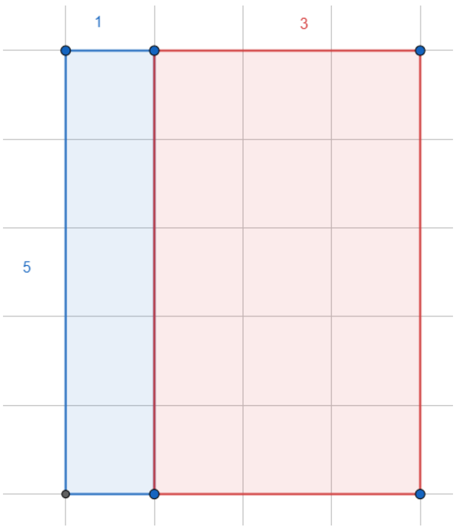


$$4 \cdot (2 + 8) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 8$$

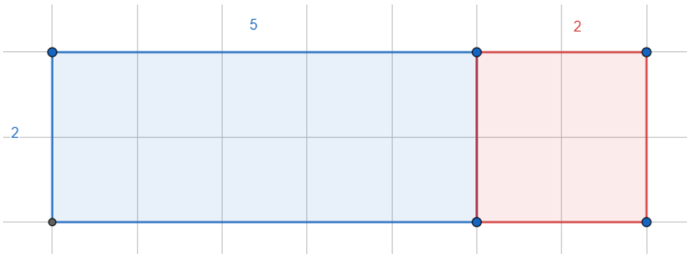
$$4 \cdot (10) = 8 + 32$$

$$40 = 40$$

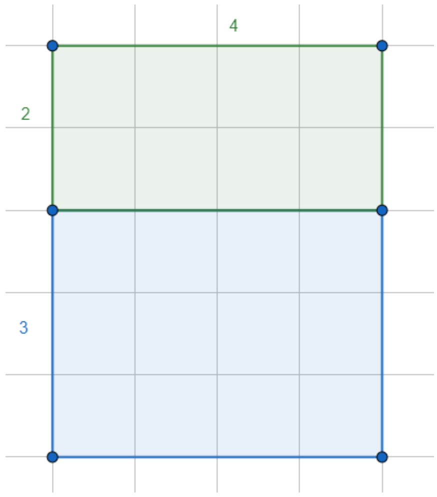
b) Figura 2



c) Figura 3



De igual forma ocurre con el siguiente ejemplo en el que la altura del rectángulo se descompone en dos cantidades.



Cuya área podemos expresar,

$$(2 + 3) \cdot 4 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4$$

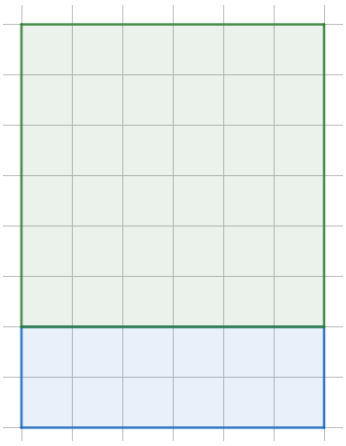
$$5 \cdot 4 = 8 + 12$$

$$20 = 20$$

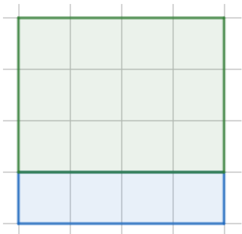
Actividad 4

En tu cuaderno, calcula las áreas de los siguientes rectángulos aplicando la propiedad distributiva, siguiendo el ejemplo anterior. Usa colores para relacionar el cálculo con el dibujo como se ha hecho en el ejemplo anterior.

a) Figura 1



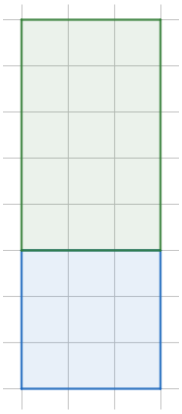
b) Figura 2



Actividad 5

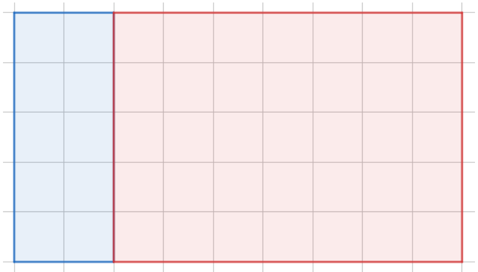
En tu cuaderno, copia los rectángulos y completa las expresiones correspondientes a las siguientes áreas:

b) Figura 1



$$(5+\underline{\quad})\cdot 3 = 5\cdot 3 + 3\cdot 3$$
$$(8)\cdot 3 = \underline{\quad\quad} + 9$$
$$25 = \underline{\quad\quad}$$

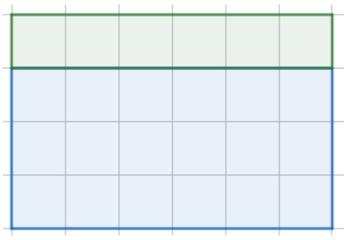
c) Figura 2



$$\underline{\quad\quad}\cdot(2+\underline{\quad\quad}) = 5\cdot 2 + \underline{\quad\quad}\cdot\underline{\quad\quad}$$
$$\underline{\quad}\cdot 9 = 10 + \underline{\quad\quad}$$
$$\underline{\quad\quad} = 45$$

d) Figura 3

e) Figura 4



f) Figura 5

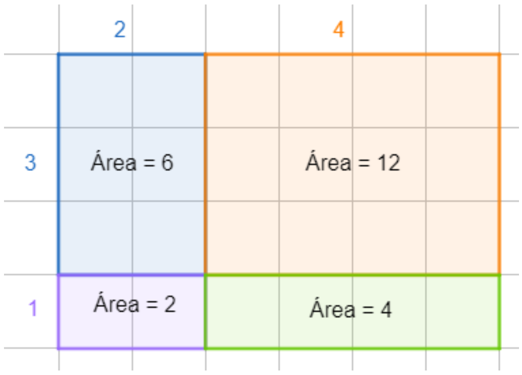
$$(3+4)\cdot 2 = 3\cdot 2 + \underline{\quad\quad}\cdot 2$$
$$(7)\cdot 2 = 6 + 8$$
$$\underline{\quad\quad} = \underline{\quad\quad}$$

Dibuja aquí el rectángulo

Llegado a este punto, el docente debe asegurarse de que el alumnado comprende todo lo anterior antes de pasar a lo siguiente. Será pertinente realizar más actividades como las anteriores si así lo estima oportuno.

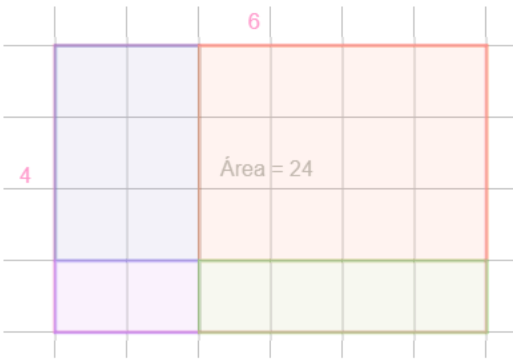
Usando esta idea de descomponer un área en partes, observa ahora cómo podemos expresar el producto de dos binomios de forma gráfica.

$$(3+1)\cdot(2+4) = 3\cdot 2 + 3\cdot 4 + 1\cdot 2 + 1\cdot 4 = 6 + 12 + 2 + 4 = 24$$



Que se podría resolver igualmente, aplicando la jerarquía de las operaciones:

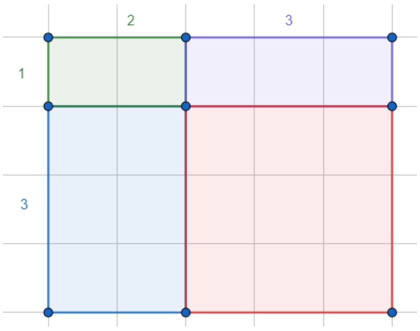
$$(3+1)\cdot(2+4) = 6\cdot 4 = 24$$



Actividad 6

En tu cuaderno, calcula las áreas de las siguientes figuras aplicando la propiedad distributiva.

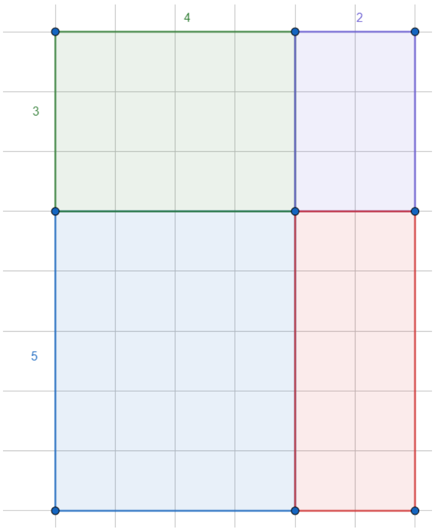
a) Figura 1



área verde + área morada + área azul + área roja

$(1 + 3) \cdot (2 + 3) = \_ \cdot \_ + \_ \cdot \_ + \_ \cdot \_ + \_ \cdot \_$

b) Figura 2



Actividad 7

En tu cuaderno, *representa con rectángulos* las siguientes operaciones (sin resolverlas)

a) (2 + 5) · (3 + 6)

b) (1 + 4) · (3 + 2)

Sesión 2. Método de la caja

A la hora de introducir el método de la caja, es muy importante que el alumno conecte el nuevo método con la interpretación geométrica de la multiplicación, de modo que entienda que vamos a simplificar las representaciones, pero sin olvidar el origen del mismo.

Una vez hemos relacionado la multiplicación con el área de un rectángulo, podemos utilizar un método que vamos a llamar el método de la caja. Con él, vamos a realizar este tipo de multiplicaciones y cálculo de áreas sustituyendo los dibujos de los rectángulos por una tabla.

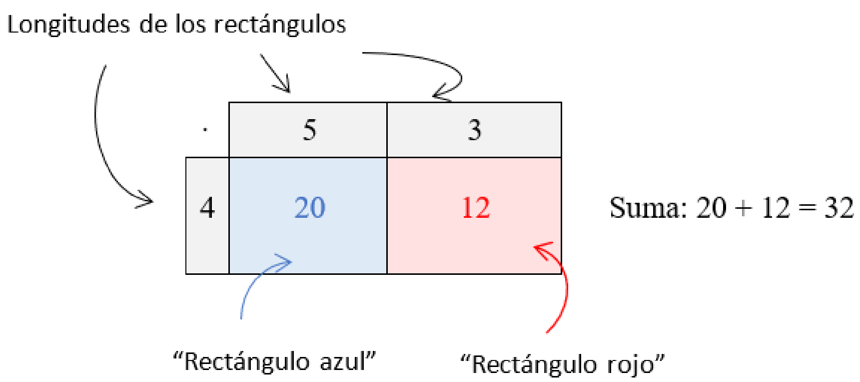
La operación

$$4 \cdot (5 + 3) = 20 + 12 = 32$$

se corresponde con el área del siguiente rectángulo

En lugar de representarla con los rectángulos, podemos utilizar una tabla, donde indiquemos las longitudes de los lados sin tener que dibujarlo a escala. Así,

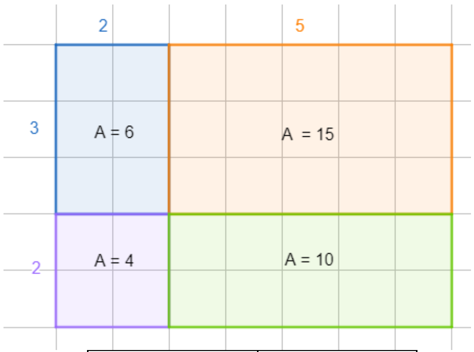
$$4 \cdot (5 + 3) = 20 + 12 = 32$$



Al utilizar este método debéis tener en mente que los números que aparecen dentro de la tabla se corresponden con las áreas de los rectángulos, y que el área total es la suma de los resultados, en el ejemplo anterior, el área total es la suma 20 + 12 = 32.

NOTA: Es importante incidir en la necesidad de escribir junto a la tabla la respuesta final (suma total de las áreas).

Ejemplo: $(3\ +2)\cdot(2+5)\ =\ 3\cdot 2\ +3\cdot 5+2\cdot 2+2\cdot 5\ =\ 6+15+4+10=35$

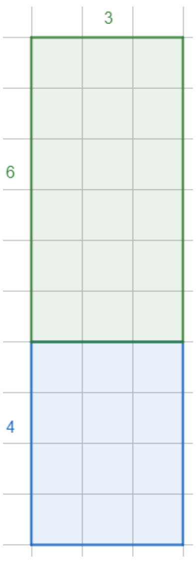


·	2	5
3	6	15
2	4	10

¡NO OLVIDES PONER LA SUMA!

Suma: 6 + 15 + 4 + 10 = 35

Ejemplo: $(6\ +4)\cdot 3\ =\ 6\cdot 3\ +\ 4\cdot 3=18\ +\ 12\ =30$



·	3
6	18
4	12

Suma: 18 + 12 = 30

Actividad 8

En tu cuaderno, realiza las siguientes multiplicaciones utilizando el método de la caja y **comprueba** la operación aplicando la jerarquía de operaciones.

b) $2 \cdot (5 + 6) =$

·		

Suma:

c) $(4 + 1) \cdot 3 =$

·	

Suma:

d) $(10 + 3) \cdot (2 + 5) =$

·		

Suma:

e) $(2 + 6) \cdot (5 + 4) =$

·		

Suma:

Representación de polinomios con Algebra Tiles

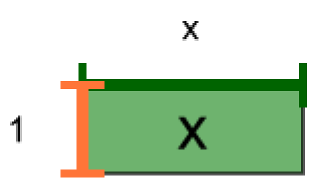
En la siguiente sección se va a hacer uso de la aplicación Algebra Tiles (2020)[3], disponible en su versión web (requiere Flash) o para descargar en la App Store y Google Play Store. Se trata de una versión digital de un método tradicional denominado Algebra Tiles.

Por defecto, el programa muestra una trama cuadrada de fondo. Hemos considerado oportuno quitarla para evitar que el alumno le asigne un valor numérico a la variable x. Es importante reconocer esta limitación del modelo y explicarla al alumnado. De esta forma, se explicará con la ayuda del propio programa la posibilidad de asignar diferentes valores (medidas) a la variable x, reforzando a su vez el concepto de variable.

Imagina que tenemos un rectángulo cuyas dimensiones desconocemos, ¿cómo podemos expresar su área?

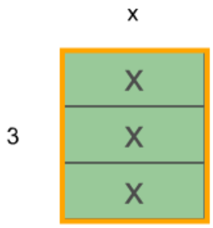
En este ejemplo, la altura del rectángulo mide 1 pero su anchura es desconocida y vamos a expresarla como un valor x. (x es un número que desconocemos)

Así, su área es $1 \cdot x = x$. Por lo que podéis imaginar que un rectángulo de área x puede tener altura 1 y anchura x.



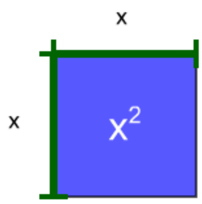
[3] Creada por The Ontario Association for Mathematics Education, en colaboración con the Ontario Ministry of Education and the Council of Ontario Directors of Education.

Si en cambio la altura mide 3 unidades, el área total será el triple, es decir 3 veces x, o lo que es lo mismo, $3 \cdot x = 3x$.



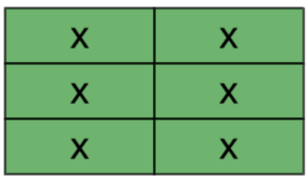
Observa que el rectángulo está formado por tres rectangulitos de área x, por eso mismo, el área total es 3 veces x

¿Qué ocurre si la altura y la anchura son iguales? En el siguiente ejemplo, observamos que se forma un cuadrado de lado x, por lo que su área es $x \cdot x = x^2$.

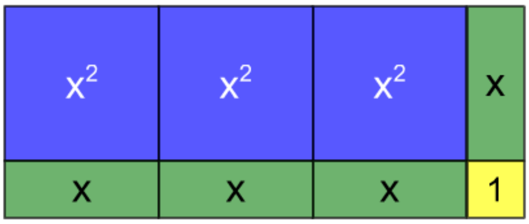
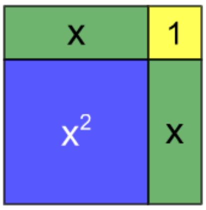
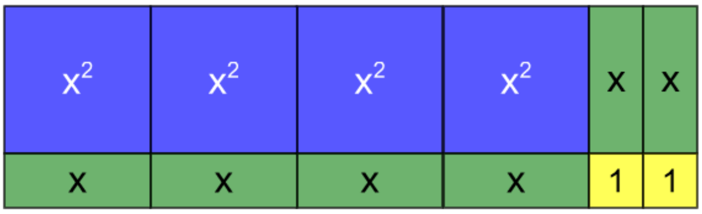
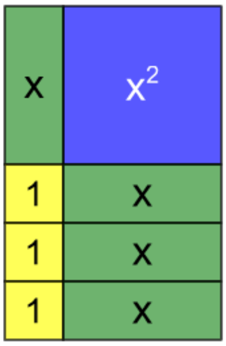
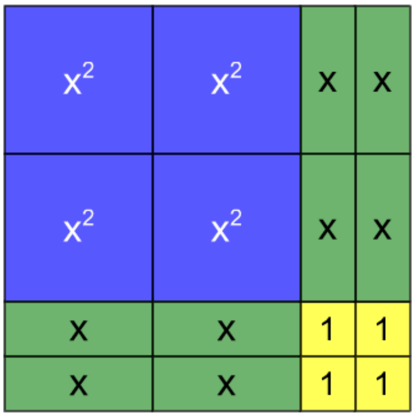


Actividad 9

Con ayuda de la página Algebra tiles[4] o de la app en tu móvil dibuja los siguientes rectángulos y escribe cuanto miden sus lados. Si tienes dudas puedes ver este breve tutorial[5] que explica cómo funciona.

Representación gráfica	**Dimensiones**
	**Alto:** **Ancho:** **Área:**

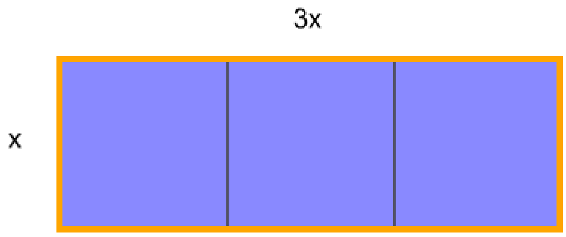
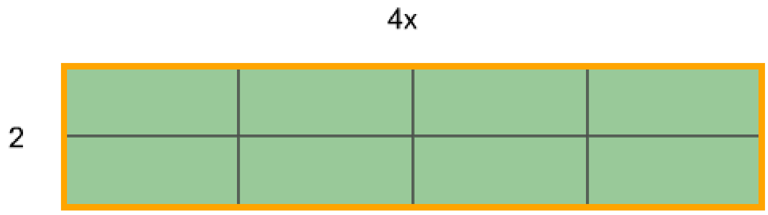
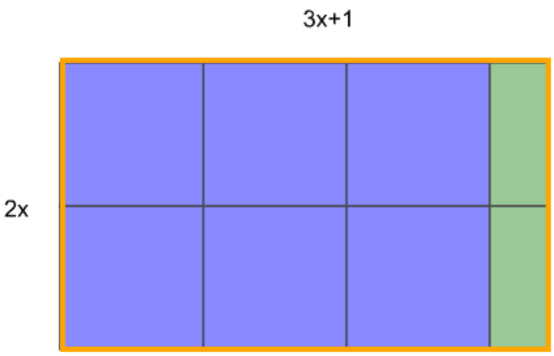
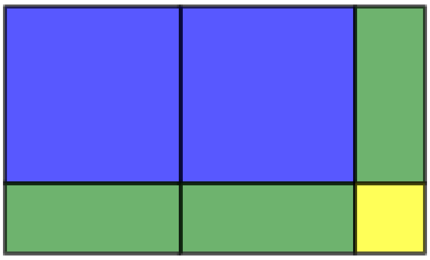
[4] Algebra Tiles: mathclips.ca/swfPlayer.html?swfURL=tools/AlgebraTiles1.swf&title=Algebra%20Tiles
[5] Enlace al tutorial: youtu.be/Q_ykcSdKOl8

	**Alto:** **Ancho:** **Área:**
	**Alto:** **Ancho:** **Área:**
	**Alto:** **Ancho:** **Área:**
	**Alto:** **Ancho:** **Área:**
	**Alto:** **Ancho:** **Área:**

Sesión 3

Actividad 10

Con ayuda de la página Algebra tiles calcula el área de los siguientes rectángulos. ***Explica en tu cuaderno cómo has averiguado la solución.***

 *Figura 1*	Área: Explicación:
 *Figura 2*	Área: Explicación:
 *Figura 3*	Área: Explicación:
 *Figura 4*	Área: Explicación:

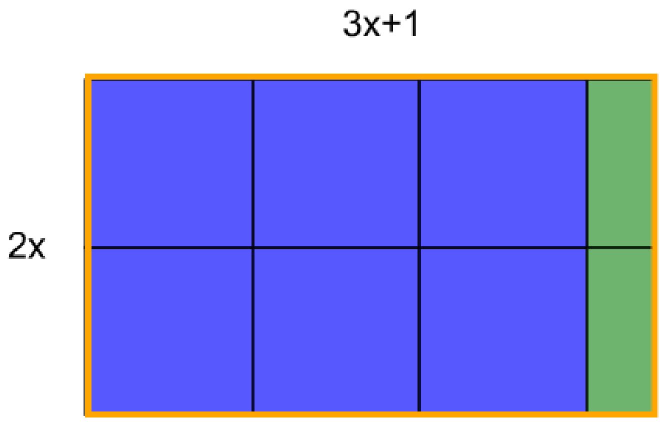
Multiplicación de polinomios con el método de la caja

Ahora vamos a calcular las áreas anteriores utilizando el método de la caja. Recuerda que sustituimos las representaciones gráficas de los rectángulos por tablas, sin tener en cuenta el tamaño de los rectángulos.

Por ejemplo, la operación,

$$2x \cdot (3x + 1) = 6x^2 + 2x$$

se corresponde con el área del siguiente rectángulo



En lugar de representarla con los rectángulos, podemos utilizar una tabla, donde indiquemos las longitudes de los lados sin tener que dibujarlo a escala. Recordamos que dentro de cada rectángulo indicamos el área del mismo. Así,

$$2x \cdot (3x + 1) =$$

Longitudes de los rectángulos

·	3x	+ 1
2x	$6x^2$	$+2x$

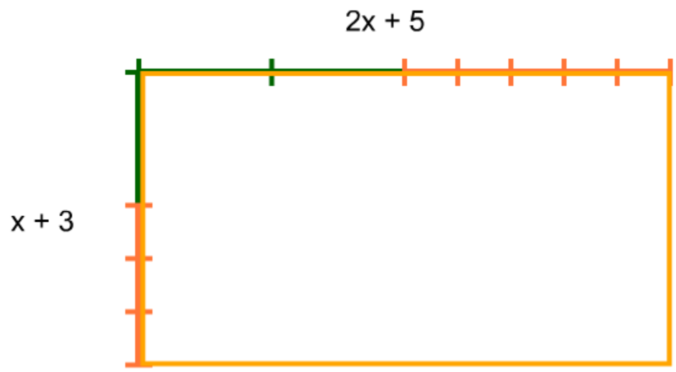
Suma: $6x^2 + 2x$

“Rectángulo azul” “Rectángulo verde”

Comprobación operando los polinomios:

$$2x \cdot (3x + 1) = 2x \cdot 3x + 2x \cdot 1 = 6x^2 + 2x$$

Presta atención al siguiente ejemplo,



Su área total se corresponde con la operación $(x + 3) \cdot (2x + 5) =$

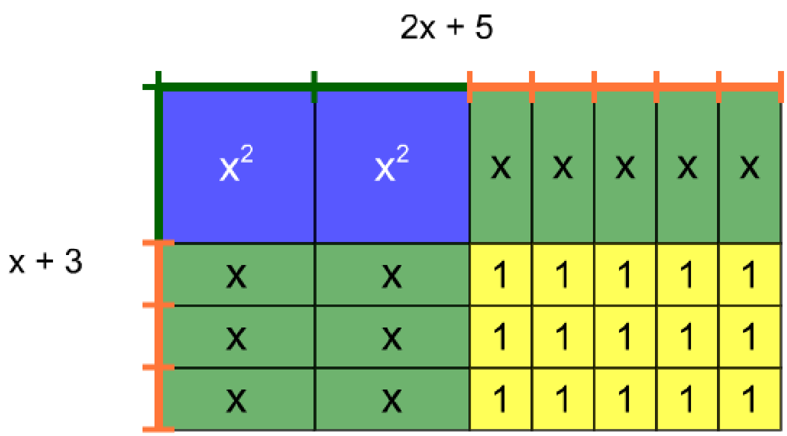
·	2x	+ 5
X	$+2x^2$	+5x
+ 3	+6x	+15

Suma:

$2x^2 + 6x + 5x + 15 =$

$= 2x^2 + 11x + 15$

En este caso aparecen términos semejantes que podemos agrupar (sumar), están resaltados en la tabla en verde, por lo que la solución queda $2x^2 + 11x + 15$. Comprobémoslo gráficamente.



Importante: Si ordenamos los polinomios resultará más sencillo agrupar los términos semejantes. Además, es muy recomendable escribir el signo de los monomios en la tabla aunque sean positivos, para cuando posteriormente trabajemos con términos negativos.

Actividad 11

Realiza las siguientes operaciones utilizando el método de la caja y represéntalas en Algebra Tiles (haz un dibujo en tu cuaderno).

$\boldsymbol{a})\ (\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{1})\cdot(\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{4})=$

Haz el dibujo de Algebra Tiles en este espacio

·		

Suma:

$\boldsymbol{b})\ (\boldsymbol{x}+\mathbf{3})\cdot(\mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{2})=$

Haz el dibujo de Algebra Tiles en este espacio

·		

Suma:

$\mathbf{c)}\ (\mathbf{3x+2}) \cdot (\mathbf{3x+5}) =$

Haz el dibujo de Algebra Tiles en este espacio

·		

Suma:

Responde:

1. Compara y conecta el método de Algebra Tiles y el método de la caja ¿Qué similitudes encuentras entre ellos? Puedes utilizar dibujos y tablas en tu explicación.

2. ¿Qué ventajas presenta cada uno?

La ventaja del método de la caja es que también vale para términos negativos y productos de otros monomios.

Es decir, utilizando el método de la caja podemos multiplicar polinomios que tengan **coeficientes negativos**. Para ello, basta con tener en cuenta los signos al multiplicar dichos coeficientes. Mira el ejemplo,

$$(3x - 2) \cdot (2x + 1) =$$

·	**+2x**	**+ 1**
+3x	$+ 6x^2$	+ 3x
- 2	- 4x	- 2

Suma:

$$6x^2 + 3x - 4x - 2 =$$

$$= 6x^2 - x - 2$$

Fíjate que en la tabla aparecen coloreados los términos semejantes que podemos agrupar (sumar o restar según su signo).

Sesión 4

Actividad 12

En tu cuaderno, realiza las siguientes operaciones aplicando el método de la caja.

a) $(-3x + 4) \cdot (2x - 5) =$

b) $(x - 2) \cdot (-x + 2) =$

c) $(x - 4) \cdot (-x - 5) =$

De igual forma, aunque no podamos representarlo gráficamente en el plano pues en la multiplicación aparecen términos de grado mayor que uno, se pueden realizar operaciones como la que sigue:

$$(2x + 5) \cdot (2x^2 + x + 3) =$$

·	$2x^2$	$+ x$	$+3$
$2x$	$+4x^3$	$+2x^2$	$+6x$
$+ 5$	$+10x^2$	$+5x$	$+15$

Suma:

$4x^3 + 2x^2 + 6x + 10x^2 + 5x + 15 =$

$= 4x^3 + 12x^2 + 11x + 15$

Fíjate que en la tabla aparecen coloreados los términos semejantes que podemos agrupar (sumar o restar según su signo).

Actividad de ampliación

Realiza las siguientes multiplicaciones de polinomios utilizando el método anterior.

a) $(3x - 1) \cdot (x^2 + 2x + 4) =$

b) $(-x^2 + 2x - 3) \cdot (2x + 3) =$

c) $(x^3 - 2x^2 - 3x + 1) \cdot (x + 2) =$

d) $(2x^3 - 2x^4 - x + 8) \cdot (-x^3 + 1) =$

Nota para el docente: Es muy importante que durante toda esta sesión el docente insista de forma que el alumno realice una conexión entre la representación gráfica de la multiplicación de polinomios y el método de la caja. Se recomienda pedir al alumno que durante la realización de los ejercicios conecte y compare ambos métodos.

Identidades o productos notables

En este apartado vamos a trabajar con unas expresiones particulares que debemos aprender a reconocer a simple vista ya que luego nos serán útiles cuando trabajemos con expresiones algebraicas para abreviar los cálculos. Son tan especiales que hasta tienen su propio nombre.

Se trata de unos productos que solo tienen dos términos que vamos a identificar con las letras a y b. Vamos a aprender a reconocerlos:

Cuadrado de una suma: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{2}$

Vamos a ver algunos ejemplos de expresiones que son de este tipo. La a y la b pueden ser números o monomios.

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{2}$		
	La a vale…	**La b vale…**
$(x+2)^2$	x	2
$(3x+5)^2$	$3x$	5
$(2x^2+y)^2$	$2x^2$	y

Cuadrado de una diferencia: $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^{2}$

$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^{2}$		
	La a vale…	**La b vale…**
$(1-\mathrm{x})^2$	1	x
$(5t-2\mathrm{x})^2$	$5t$	$2\mathrm{x}$
$(10-x^3)^2$	10	x^3

Suma por diferencia o diferencia de cuadrados: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

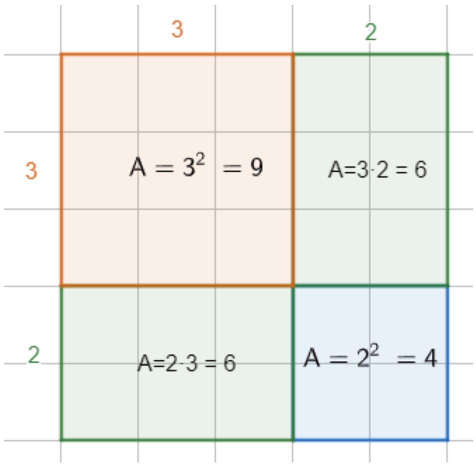
$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$		
	La a vale…	**La b vale…**
$(x + 2)\cdot(x-2)$	x	2
$(7 + x^2)\cdot(7-x^2)$	7	x^2
$(3xy + 4x^5)\cdot(3xy - 4x^5)$	$3xy$	$4x^5$

Interpretación geométrica de las identidades notables

Por medio de dos ejemplos vamos a ver el significado geométrico de esas expresiones representándolas gráficamente y cómo hallar su solución.

Por ejemplo, la **identidad notable cuadrado de una suma** $(3+2)^2$ representa el **área de un cuadrado** de lado $(3 + 2) = 5$, tal y como se muestra en la figura,

$$\mathbf{(3+2)^2 = (3+2)\cdot(3+2)}$$



Área total = $3^2 + 2^2 + 2\cdot(3\cdot 2) = 9 + 4 + 12 = 25$

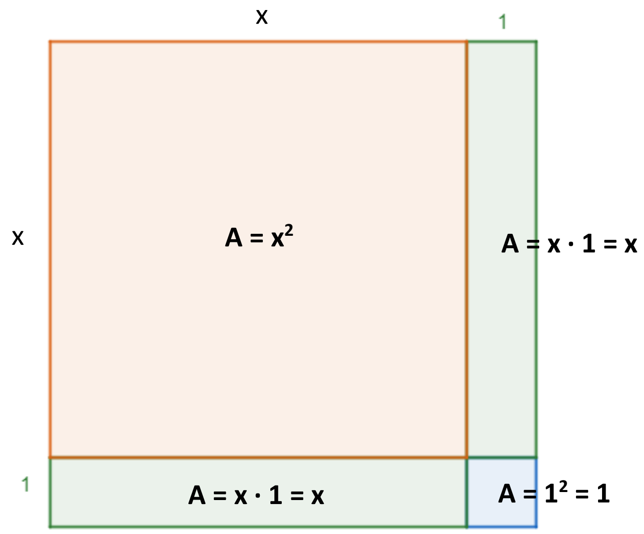
Área total = $5^2 = 25$

Observa que las áreas en naranja y azul se corresponden con cuadrados de lado 3 y 2, respectivamente, y los rectángulos en verde son iguales pues tienen la misma área $(3\cdot 2)$.

Prueba con más ejemplos en [Geogebra](www.geogebra.org/m/wtw48b3b): www.geogebra.org/m/wtw48b3b

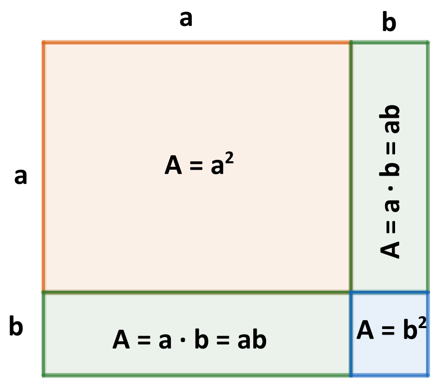
De igual forma podemos representarlo si alguna de las dimensiones es desconocida y viene expresada por una variable o expresión algebraica.

El área de un cuadrado de lado *(x + 1)* se calcula como ***(x + 1)²*** y es igual a la suma de las siguientes áreas:



$$(x+1)^2 = x^2 + x + x + 1^2 = x^2 + 2x + 1$$

Y **de forma general** podemos calcular el valor de $(a+b)^2$, que representa el área de un cuadrado de lado $(a + b)$



Área total: $(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Vamos a calcular el área anterior usando el método de la caja, recuerda que, en lugar de representar los rectángulos escalados, utilizamos la tabla.

Cuadrado de una suma

$$(a+b)^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) =$$

·	**a**	**+ b**
a	a^2	ab
+b	ba =ab	b^2

Suma:

$$a^2 + ab\ + ab\ + b^2 =$$
$$= a^2 + 2ab\ + b^2$$

Actividad de ampliación. Haz un dibujo en tu cuaderno explicando las demostraciones de cuadrado de una diferencia y suma por diferencia son similares y las podemos encontrar en el siguiente enlace.

Actividad 13

Calcula las fórmulas de cuadrado de una diferencia y suma por diferencia usando el método de la caja.

Cuadrado de una diferencia

$$(a-b)^2 = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) =$$

·	**a**	**- b**
a		
- b		

Suma:

Suma por diferencia:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) =$$

·	**a**	**+ b**
a		
- b		

Suma:

A partir de lo anterior se obtienen las siguientes igualdades que se denominan identidades notables. Comprueba tus soluciones y anótalas en tu cuaderno pues deberás **utilizarlas y memorizarlas**:

Cuadrado de una suma: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Cuadrado de una diferencia: $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

Suma por diferencia o diferencia de cuadrados: $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 + b^2$

Actividad resuelta

Representa gráficamente y calcula las identidades notables:

$$(\boldsymbol{x} + \mathbf{3})^{\mathbf{2}}$$

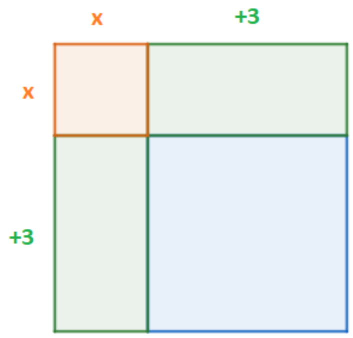
---

1. *Identifica el producto notable y los términos a y b*

   Es el cuadrado de una suma porque hay dos términos, x y 3, separados por un más.

   $(x + 3)^2 \leftrightarrow (a + b)^2$ a= x; b = 3

2. *Representa gráficamente*



3. *Dibuja la tabla y escribe los factores del producto (lados del rectángulo)*

·	X	+ 3
x		
+3		

4. *Completa la tabla*

·	X	+ 3
x	$+x^2$	+3x
+3	+3x	+9

5. *Halla la suma total*

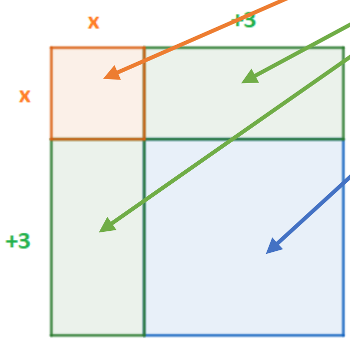
·	X	+ 3
x	$+x^2$	+3x
+3	+3x	+9

Suma:

$$x^2 + 3x + 3x + 9 =$$
$$= \boldsymbol{x^2 + 6x + 9}$$

6. *Escribe la solución y observa su relación con el dibujo*

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$



Siempre obtenemos dos términos que son cuadrados perfectos

El otro término es un número par y se obtiene de la suma de dos términos iguales. Su valor es el doble del producto de a · b

Actividad 14

En el cuaderno, representa gráficamente y calcula las identidades notables según el ejemplo anterior:

$$(\mathbf{2} + \boldsymbol{x})^{\mathbf{2}}$$

1. *Identifica el producto notable y los términos a y b*
2. *Representa gráficamente*
3. *Dibuja la tabla y escribe los factores del producto (lados del rectángulo)*
4. *Completa la tabla*
5. *Halla la suma total*
6. *Escribe la solución y observa su relación con el dibujo*

$$(\mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{5})^{\mathbf{2}}$$

1. *Identifica el producto notable y los términos a y b*
2. *Representa gráficamente*
3. *Dibuja la tabla y escribe los factores del producto (lados del rectángulo)*
4. *Completa la tabla*
5. *Halla la suma total*
6. *Escribe la solución y observa su relación con el dibujo*

Sesión 5

Actividad 15

Para cada una de las siguientes expresiones algebraicas, indica a cuál de las identidades notables corresponde y desarrolla la expresión utilizando el método de la caja.

a) $(x + 4)^2 =$ **Tipo:** *Cuadrado de una suma*

·	*X*	*+4*
x	*x^2*	*4x*
+4	*4x*	*16*

Solución

$$\boldsymbol{(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16}$$

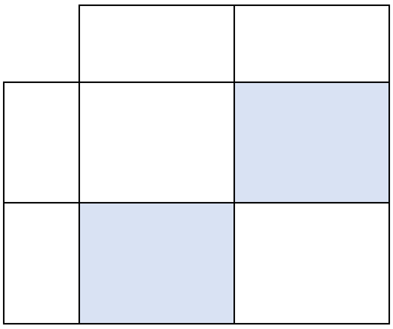
b) $(7 + 2x)^2 =$ **Tipo:**

Solución

c) $(2x + 5)^2 =$ **Tipo:**

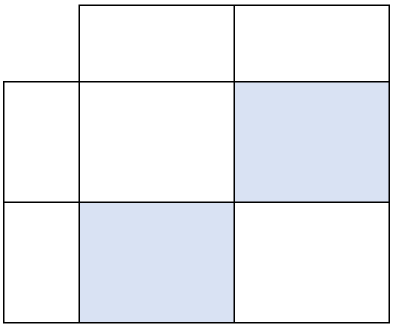
Solución

d) $(x-3)^2 =$ **Tipo:**



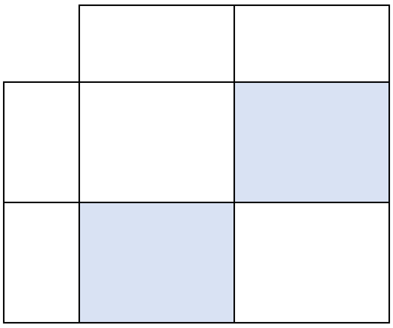
Solución

e) $(4-x)^2 =$ **Tipo:**



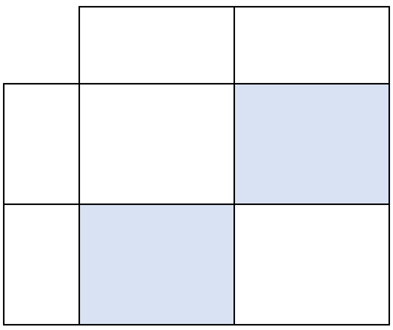
Solución

f) $(3x-5)^2 =$ **Tipo:**



Solución

g) $(x+1)(x-1) =$ **Tipo:**



Solución

h) $(2x + 3)(2x - 3) =$ **Tipo:**

Solución

i) $(4 + x)(4 - x) =$ **Tipo:**

Solución

IMPORTANTE: Suma por diferencia

Llegados a este punto habrás observado que el tercer producto notable es algo diferente a los dos primeros. Veamos un ejemplo:

a) $(2 + x)(2 - x) =$ $\qquad\qquad$ $(a + b) \cdot (a - b)$

	2	$-x$
2	4	$-2x$
$+x$	$+2x$	$-x^2$

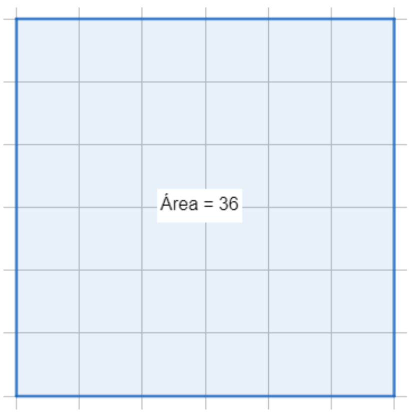
Solución

$$(2 + x)(2 - x) = 4 - x^2$$

Los términos sombreados siempre tienen el mismo valor opuesto (uno positivo y otro negativo) por lo que se cancelan mutuamente y la solución sólo consta de dos términos que son cuadrados perfectos separados por un signo menos, por lo que es fácil reconocerlos.

Para casa:

¿Cuánto mide el lado de un cuadrado de área 36?



¿Cuánto mide el lado de un cuadrado de área x^2? ¿Y de área $4x^2$? ¿y de área $9x^4$?

Factorización de identidades notables

Al igual que podemos expresar un número compuesto (no primo) como producto de sus factores, podemos expresar algunas expresiones algebraicas como **producto de polinomios**. En esencia, se trata de realizar la **operación inversa a desarrollar los productos de polinomios** que hemos realizado en las anteriores actividades.

Ejemplo de factorización con el número 25

1. Por las reglas de divisibilidad rápidamente *identificamos* que el número 25 no es un número primo.
2. Pensamos por qué números puedo dividir el número 25.
3. Usamos el método que conocemos para descomponerlo en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

4. Escribimos la solución. Esto es, lo expresamos como producto de sus factores $25 = 5^2 \cdot 1$
5. Comprobamos que $5^2 = 25$.

De igual manera podemos trabajar con determinados polinomios y a esta operación la conocemos como *factorización de polinomios*.

Ejemplo de factorización del polinomio $x^2 + 5x + 6$

El polinomio $x^2 + 5x + 6$ se puede expresar como el producto de los polinomios

$$(x + 2) \cdot (x + 3)$$

	x	$+3$
x	$\boldsymbol{x^2}$	$+3x$
$+2$	$+2x$	$\boldsymbol{+6}$

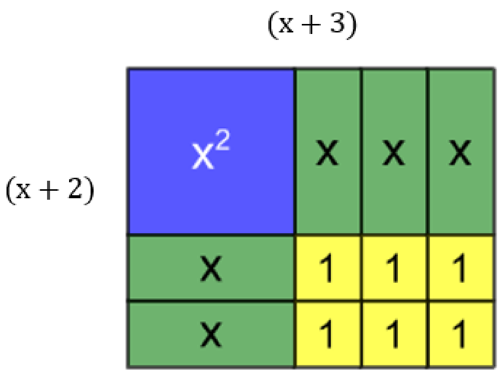
Solución

$$x^2 + 3x + 2x + 5 = \boldsymbol{x^2 + 5x + 6}$$

Es decir, la factorización de $\boldsymbol{x^2 + 5x + 6}$ es,

$$x^2 + 5x + 6 = (\boldsymbol{x + 2}) \cdot (\boldsymbol{x + 3})$$

Pero recuerda que tal y como hemos visto en este tema, podemos representar el producto de dos polinomios como el área de un rectángulo. Así, la anterior operación se puede representar con la siguiente figura,



Por lo que, podemos pensar en la factorización de polinomios como la operación de hallar los lados de un rectángulo cuya área coincida con el polinomio dado. De esta forma, a partir del dibujo anterior, podemos averiguar cuánto miden sus lados y afirmar que:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2) \cdot (x + 3)$$

De momento, nos vamos a quedar solo con los polinomios especiales que hemos visto en este tema y vamos a aprender la *factorización de las identidades notables*.

Veamos un ejemplo de factorización con el polinomio $x^2 + 10x + 25$.

6. Debemos *identificar* si se trata de una identidad notable. Es del tipo: $(a + b)^2$
7. Vamos a visualizar y relacionar dicha expresión con la representación geométrica de las identidades notables con las que hemos trabajado.
8. Usamos el método de la caja para factorizar.
9. Escribimos la solución. $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$.
10. Comprobamos la operación: $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$

1. ¿Cómo identificar una identidad notable desarrollada?

Entre toda la clase, vamos a reflexionar sobre cómo podemos identificar una identidad notable. (La respuesta será algo similar a lo que sigue)

- ✓ Tiene tres términos
- ✓ Dos de ellos son cuadrados
- ✓ El tercero es par

- ✓ Tiene dos términos
- ✓ Ambos son cuadrados
- ✓ Tienen distinto signo

2. Relación de las identidades notables con su representación gráfica

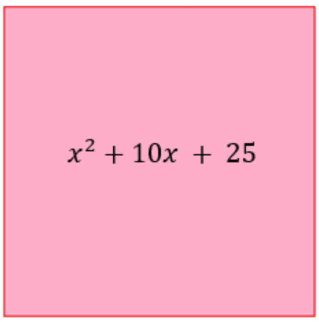
Una vez tenemos identificada una posible identidad notable, vamos a ayudarnos del método de la caja para factorizarla.

Recuerda que factorizar una identidad notable es expresarla en su forma inicial, por ejemplo,

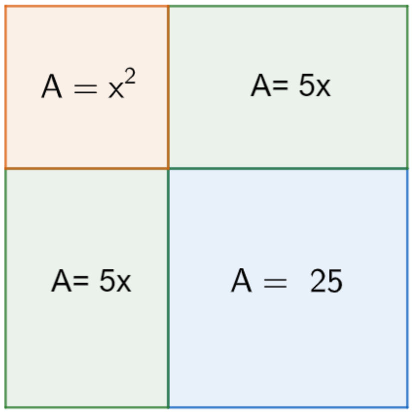
$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2.$$

Y que también podemos realizarlo hallando los lados de un rectángulo cuya área sea dicho polinomio. Pero observa que, con esta identidad notable, el resultado está en forma de cuadrado, así que nuestro dibujo se corresponde con un **cuadrado**. Vamos a representarlo gráficamente con el dibujo de un cuadrado, y esto nos va a ayudar a factorizar dicha expresión. De forma simplificada puedes imaginar que el problema es el que sigue.

Tenemos un cuadrado de área $x^2 + 10x + 25$ y queremos hallar su lado.



No parece un problema muy fácil de resolver, pero la profesora nos ayuda y nos muestra otro dibujo. Ahora, tenemos el siguiente cuadrado del que conocemos su área y queremos calcular *cuánto miden sus lados*.

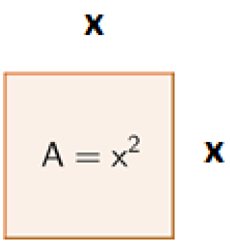


Nota: A partir del dibujo podemos hallar la suma de todas las áreas y comprobar que coincide con el problema inicial, $\boldsymbol{x^2 + 5x + 5x + 25 = x^2 + 10x + 25}$

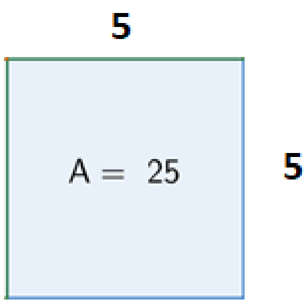
Hallar los lados del cuadrado total no es sencillo, pero podemos fijarnos en las áreas más pequeñas. Las áreas naranja y azul se corresponden con cuadrados (fíjate que $\boldsymbol{x^2}$ y $\boldsymbol{25}$ son cuadrados) y para calcular su lado basta hallar su raíz cuadrada.

$$A_{cuadrado} = l^2$$

$$l_{cuadrado} = \sqrt{A}$$



$\sqrt{x^2} = x$

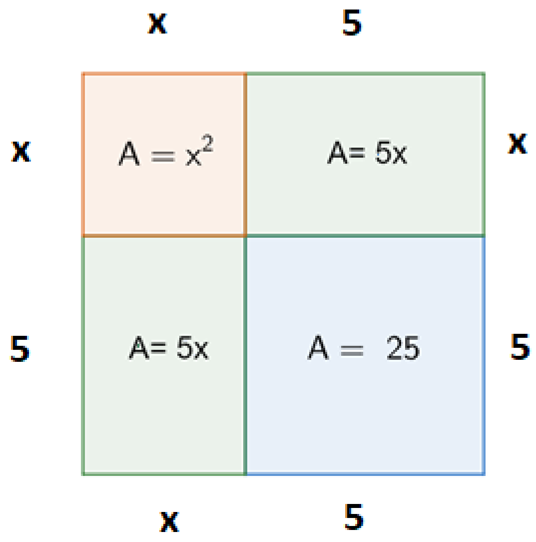


$\boldsymbol{\sqrt{25} = 5}$

Lado del cuadrado naranja: $\boldsymbol{x}$

Lado del cuadrado azul: $\boldsymbol{5}$

Para calcular las longitudes de los rectángulos verdes tenemos que volver a fijarnos en el dibujo:



Es decir, los rectángulos son iguales y tienen de dimensiones 5 y x, por lo que su área es $\mathbf{5 \cdot x = 5x}$ que coincide con las áreas buscadas.

Por tanto, **la longitud del lado del cuadrado total es** $(\boldsymbol{x} + \mathbf{5})$**.**

Finalmente, vamos a comprobar que el área de un cuadrado de lado $(\boldsymbol{x} + \mathbf{5})$ tiene de área la que aparece en la figura.

Comprobación: El **área de un cuadrado de lado** $(\boldsymbol{x} + \mathbf{5})$ es

$$(\boldsymbol{x} + \mathbf{5})^2 = \text{¡}\boldsymbol{Es\ una\ identidad\ notable}! = \boldsymbol{x}^2 + \mathbf{10}\boldsymbol{x} + \mathbf{25}$$

que coincide con el área total calculada en el primer apartado $\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{10}\boldsymbol{x} + \mathbf{25}$**.**

SOLUCIÓN:

El polinomio $x^2 + 10x + 25$ se puede expresar como $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$.

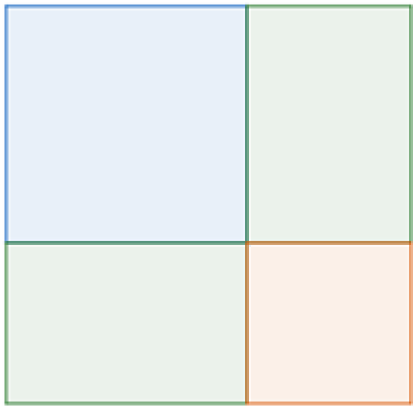
De forma similar vamos a actuar para factorizar identidades notables, pero en lugar de tener el dibujo, vamos a tener un polinomio que debemos relacionar con un dibujo y para simplificar el dibujo utilizaremos tablas que representen esas áreas para finalmente hallar las longitudes de los lados.

3. Factorización con el método de la caja

Factoriza $\mathbf{4x^2 + 36 + 24\,x}$

Paso 1. Identifico una posible identidad notable

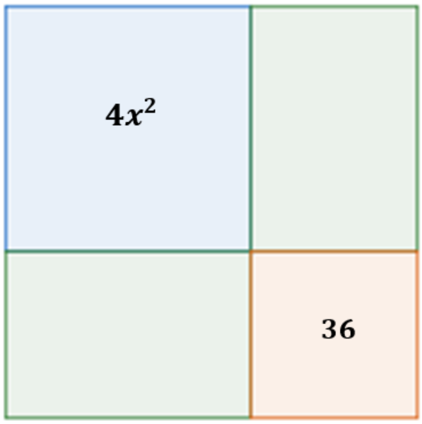
- ✓ Tiene tres términos
- ✓ Dos de ellos son cuadrados
- ✓ El tercero es par



Vamos a imaginar siempre que la identidad notable se corresponde a una figura como esta

Paso 2. Relaciono los términos que se pueden corresponder con las diferentes áreas de la figura.

Los términos cuadrados son $\mathbf{4x^2}$ y $\mathbf{36}$, por lo que son los que van en las áreas azul y naranja



Paso 3. En lugar de utilizar un dibujo, vamos a representarlo en una tabla como hacíamos con el método de la caja. Los términos que son **cuadrados** quedan situados en los espacios de la tabla que representan los cuadrados del dibujo inicial.

.		
	$4x^2$	
		36

Paso 4. Buscamos los lados de los cuadrados que representan esas áreas. Es decir, buscamos los factores cuyo cuadrado[6] sea igual a dichos términos.

$$\sqrt{4x^2} = 2x$$
$$\sqrt{36} = 6$$

$\cdot$	$2x$	6
$2x$	$4x^2$	
6		36

Paso 5. Completamos la multiplicación en la tabla hallando los términos que faltan, sabiendo que son las áreas de los rectángulos y comprobamos que la **suma de los términos semejantes** coincide con la solución buscada.

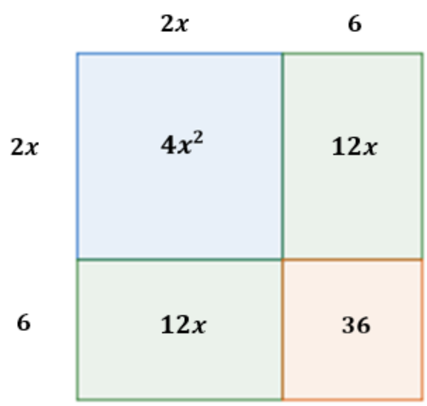
Observa el dibujo, estos términos deben ser iguales, pues representan las áreas de dos rectángulos iguales.

$\cdot$	$2x$	6
$2x$	$4x^2$	$12x$
6	$12x$	36

Paso 6. Escribimos la solución. Esto es, la identidad notable como cuadrado de una suma, de una diferencia o suma por diferencia.

$$4x^2 + 36 + 24x = (2x + 6)^2$$

Comprueba que la solución se corresponde a expresar el área de un cuadrado de lado (2x + 6) tal y como se muestra en la figura.



[6] Recuerda que la raíz cuadrada de cualquier número puede tomar dos valores, uno positivo y uno negativo. Así, la $\sqrt{36} = \pm 6$, es decir, puede ser +6 o -6. Dependiendo del tipo de identidad notable que tengamos habrá que escoger una, otra o ambas.

Actividad 16

Factoriza las siguientes identidades notables utilizando el método de la caja. Recuerda seguir los pasos: Identificar el tipo, visualizar, factorizar y escribir la solución.

Factoriza $x^2 - 12x + 36$

.		

Factoriza $x^2 + 2x + 1$

.		

Factoriza $x^2 - 9$

.		

Factoriza $x^2 - 4x + 4$

.		

Tarea 6 (Ejercicios para que practiquen en casa antes de la prueba final)

1. Desarrolla las siguientes identidades notables utilizando el método de la caja:

a) $(2x + 1)^2 =$

b) $(5 - 3x)^2 =$

c) $(x + 2)(x - 2) =$

d) $(x + 1)^2 =$

e) $(x - 1)^2 =$

f) $(3x - y)(3x + y) =$

g) $(3x^2 + 5x^4)^2 =$

h) $(1 - x)(1 - x) =$

2. Factoriza las siguientes identidades notables:

a) $x^2 - 4 =$

b) $x^2 + 4x + 4 =$

c) $x^2 - 6x + 9 =$

d) $x^2 - 16 =$

e) $x^2 + 6x + 9 =$

f) $x^2 - 49 =$

g) $x^2 - 8x + 16 =$

h) $x^2 - 25 =$

i) $a^2 + 8a + 1$

Tarea 7. Prueba final

1. Mediante un dibujo, representa gráficamente la identidad notable y **calcula su resultado**.

$$(2x\ +\ 1)^2 =$$

Usa colores para relacionar el dibujo con la expresión y explica con tus palabras cómo lo has hecho.

2. Desarrolla las siguientes identidades notables utilizando el método de la caja:

a) $(3x + 2)^2 =$ (Explica cómo haces. Usa colores)

b) $(4 - 2x)^2 =$ (Explica cómo haces. Usa colores)

c) $(x + 5)(x - 5) =$ (Explica cómo haces. Usa colores)

d) $(x + 1)^2 =$ (Explica cómo haces. Usa colores)

e) $(x^2 - 1)^2 =$ (Explica cómo haces. Usa colores)

3. Factoriza las siguientes identidades notables:

   a) $4x^2 + 12x + 9 =$ (Explica cómo haces. Usa colores)

      Solución:

   b) $9x^2 - 12x + 4 =$ (Explica cómo haces. Usa colores)

      Solución:

   c) $36x^2 - 1 =$ (Explica cómo haces. Usa colores)

      Solución:

   d) $x^2 + 6x + 9 =$ (Explica cómo haces. Usa colores)

      Solución:

   e) $x^2 - 10x + 25 =$ (Explica cómo haces. Usa colores)

      Solución:

   f) $9x^2 - 4 =$ (Explica cómo haces. Usa colores)

      Solución:

4. Raúl ha realizado la siguiente operación. Justifica si el resultado es correcto o no.

$$(x + 5)^2 = x^2 + 25$$

   Realiza tus propios cálculos y explica si es correcto o no con tus propias palabras.

ANEXO 2: GUÍA DE PREGUNTAS PARA LAS ENTREVISTAS SEMIESTRUCTURADAS

Introducción

Ayer hicimos una prueba sobre el tema de las identidades notables. Esta entrevista es para ver qué has aprendido, cómo lo has aprendido y tu proceso de pensamiento. Es decir, que yo pueda saber qué piensas cuando resuelves este tipo de ejercicios.

Ejercicio 1 (Representar)

- Explícame, ¿qué has hecho aquí?
- ¿Por qué lo has hecho así?
- ¿Cómo lo has dibujado? ¿Qué figura has dibujado? ¿Por qué has dibujado un cuadrado/rectángulo?
- ¿Qué significan los números que hay dentro?
- ¿Cómo los has obtenido?

Ejercicio 2 (Desarrollar las identidades notables)

- Explícame, ¿qué has hecho aquí?
- ¿Por qué lo has hecho así?
- ¿Por qué utilizamos el método de la caja?
- ¿Con qué relacionábamos el método de la caja?
- ¿Por qué es el área de un rectángulo?
- (PISTA) ¿Qué operación estamos realizando?
- (PISTA) ¿Qué significa la solución?
- ¿Cuáles son los lados de los rectángulos?
- (PISTA) ¿Qué significa 3x? (Señalando el primer término de un binomio)
- ¿Por qué escribes los mismos factores en la caja?

Ejercicio 3 (Factorización)

- Explícame, ¿qué has hecho aquí?

- ¿Por qué lo has hecho así?
- ¿En qué te has fijado para hacerlo?
- ¿Cómo lo has resuelto?
- ¿Qué significa la solución de la factorización?
- ¿Qué tipo de identidad notable es? ¿Cómo lo sabes?
- ¿Sabrías dibujarlo?

Ejercicio 4 (Encuentra el error)

- Explícame, qué has hecho aquí
- ¿Por qué crees que se ha equivocado?

ANEXO 3: TABLA DE ERRORES

Se muestra a continuación la tabla utilizada para el análisis de los errores distinguiendo cada actividad y sus apartados y el alumno que los comete. La codificación de los errores se muestra en la tabla X. Las celdas en blanco son las relativas a respuestas correctas y, por tanto, sin error. NR indica que la pregunta quedó sin responder.

	A	**Al**	**An**	**C**	**Cl**	**D**	**J**	**Ju**	**R**
1A		52						NR	NR
1B		52						NR	NR
2A		55							
2B									
3B		52	52			51			
3C		52	52						
4A		52							53
4B		52	51			53	53		
5A		51							
5B									
5C	53								
5D	53								
5E									
6A									
6B			51						
7A		52		11					11
7B		52		11					11
8A									
8A'									
9A					13				
9B		12					13		13
9C		12		12	12				12, 13
9D	13	12		12	12		13		12, 13
9E		12		12, 13	12	13		54	12, 13
9F		12	13	12	12		13		12, 13
10B						12			
10C					12	12			12,13
10D					12	12			12,13
11A					54,21		22		21
11B					54				21,22
11C							22		21
11AAT									NR
11BAT									NR
11CAT		12					11		NR

12A		51	21,22					21	21,22
12B			21,22	22	22			21,22	
12C			NR	22	22			21,22	21,22
14AD					11				NR
14AM				22	22		52	21,22	NR
14AR	NR	NR	NR	NR	NR		NR		NR
14BD					11				NR
14BM			22	22	22		52	21,22	NR
14BR	NR	NR	NR	NR	NR		NR		NR
15B			22				51	54,21	41,52, 54
15C			22					54	41,52
15D			22					21	41,52
16A			32					32	
16B		32	51,32, 31	32				22,32	32
16C		32		32	22,52, 32		32	22,32	32
16D		32		32	22,52, 32,31			32	32
F1D				54	NR			NR	NR
F1M			22	51	22		51,21	21	21
F2A		22	22	22	22			22	21
F2B		51	22	22	22			22	21
F2C			22					22	21
F2D			22					22	21
F2E			21,22		22		21	22	21
F3A		32			33		52	33	33
F3B		32	31		33		52	33	33
F3C	25	32	31		33		52	33	33
F3D		32			33		52	33	33
F3E		32			33		52	33	33
F3F	25	32	31		33		52	33	33
F4	21,22						41	21,22	21