



El álgebra en la escuela: más allá de letras y números.

Aportes desde la investigación en pensamiento algebraico

Eder Pinto M.
epinto@udd.cl

INICIO

SOBRE LA FACULTAD

CARRERAS

POSTGRADO Y EDUCACIÓN CONTINUA

CENTROS

VINCULACIÓN CON EL MEDIO

ALUMNI



NUESTROS VALORES



Innovación

Profesionales para el futuro con capacidad de liderar y crear desde su carrera



Aprendizaje experiencial

Situaciones reales donde pueda contextualizar, transferir y aplicar sus conocimientos



Globalización

Vinculación internacional para el desarrollo de intercambio académico, investigativo y cultural



ÁLGEBRA EN NIVEL PREESCOLAR

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Jueves 24 de septiembre de 2020
de 15.00 a 16.30 hrs.

INVITADA INTERNACIONAL

Dra. MARÍA C. CAÑADAS,
Profesora Titular Departamento de Didáctica de la Matemática,
Universidad de Granada, España.

MODERA

Dr. Eder Pinto

Profesor Asistente de la Facultad de Educación Universidad del Desarrollo, Chile



Big ideas

1. El **álgebra escolar** como un tema a considerar en un contexto de (post)pandemia.
2. El álgebra más allá del uso de letras y números: la importancia de la **generalización**.
3. Oportunidades de enseñanza: el rol clave de la **investigación en educación matemática**.



1

El álgebra escolar como un tema a considerar en un contexto de (post)pandemia.



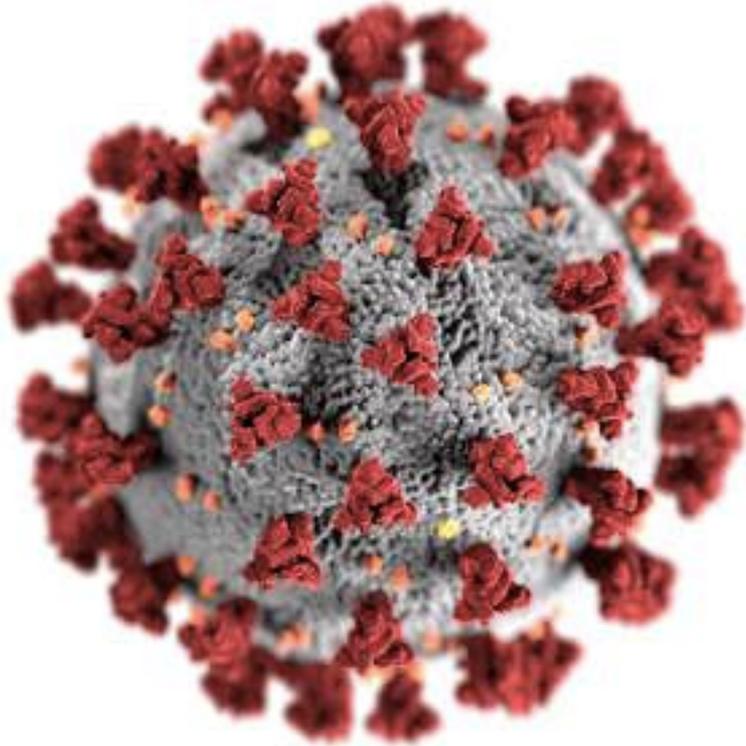
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -10 \\ 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_3 - 3x_4 = 13 \end{cases}$$



Pasaporte académico.

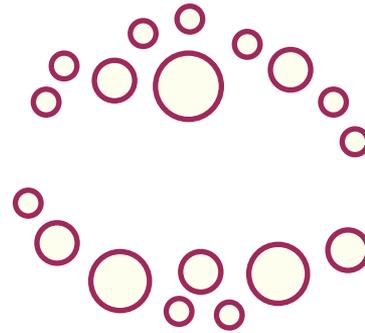
(Schoenfeld,1995).

(Davis, 1995;Drijvers, Goddijin y Kindt, 2011; Mason, 1996; Kaput, 1998;).

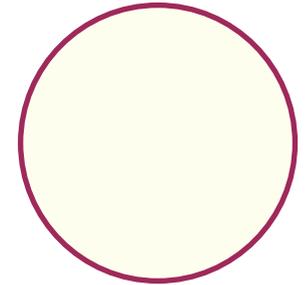


¿Álgebra?

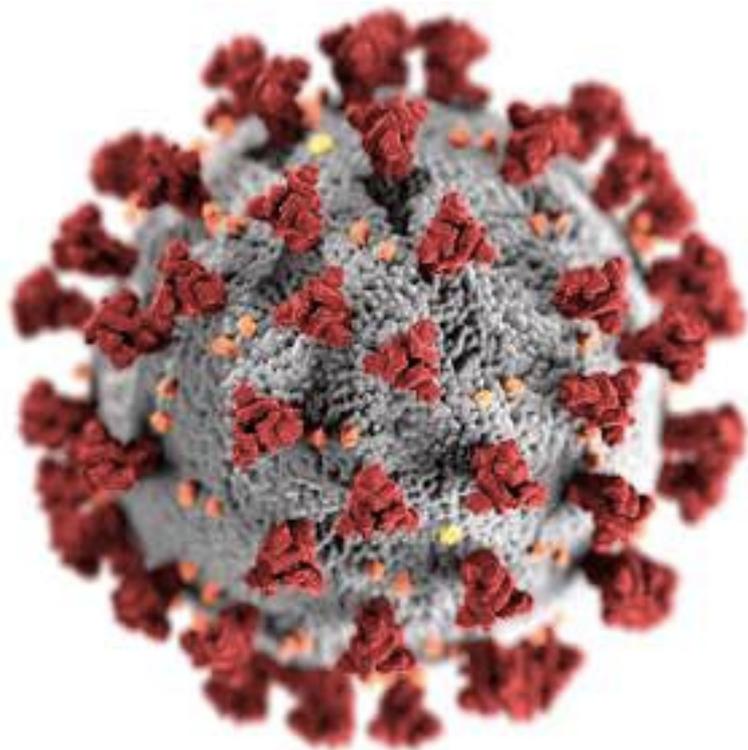
1. **Generalizar** relaciones matemáticas



Casos
particulares



Regla
general



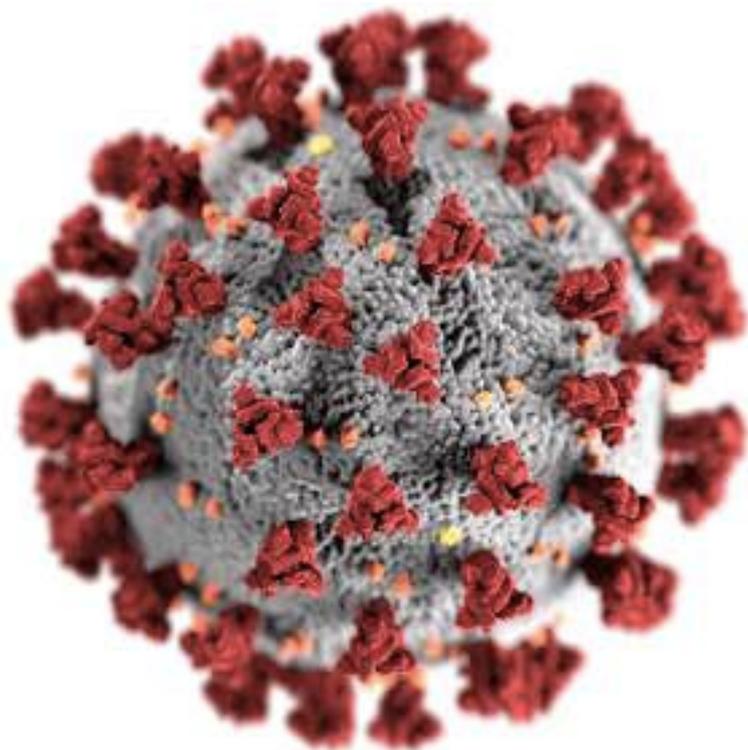
¿Álgebra?

1. Generalizar relaciones matemáticas

Dibujan los elementos que faltan en el patrón:

The pattern consists of three rows of grey duck icons. The first row contains 5 ducks. The second row contains 9 ducks. The third row contains 6 ducks, followed by a dashed rectangular box, and then 3 ducks. The pattern shows an increasing sequence of ducks in each row.

Ministerio de Educación de Chile, 2012



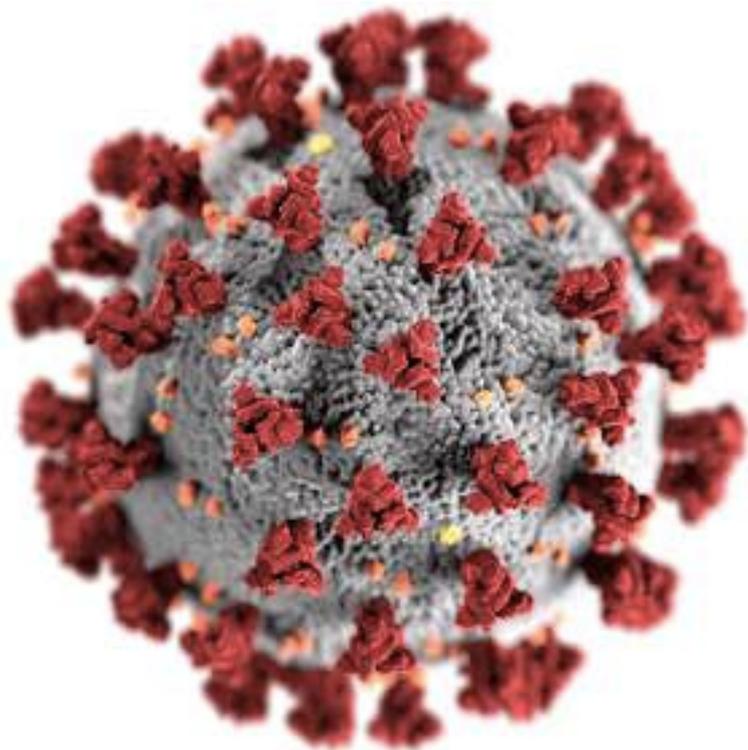
¿Álgebra?

1. Generalizar relaciones matemáticas

Descubren y explican la regularidad en sucesiones de números y las completan:

a	2	5	10	17	?	37	50	65	
b	0	3	8	15	24	35	?	?	?
c	1	2	4	7	11	16	?	?	?
d	1	0	1	0	1	?	?	?	?

Ministerio de Educación de Chile, 2012

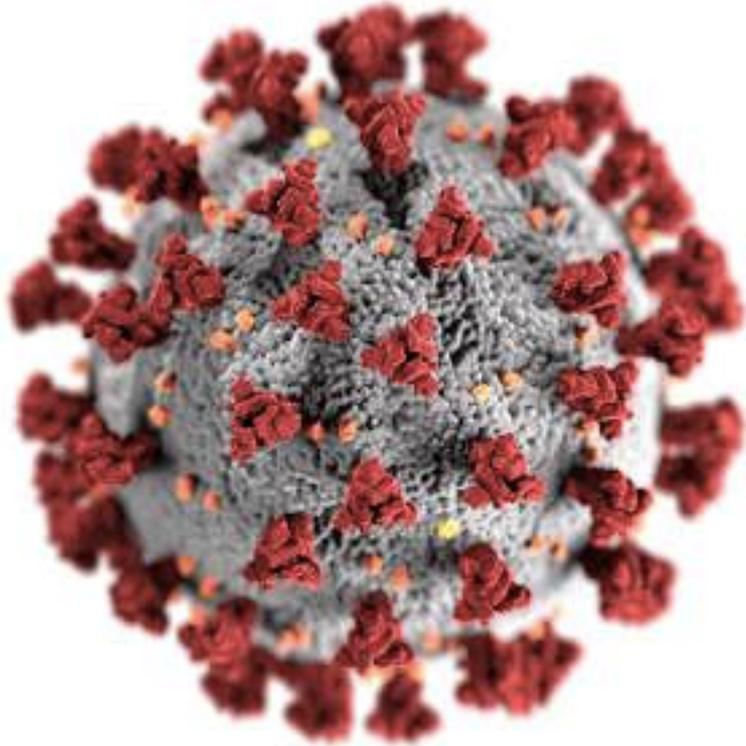


¿Álgebra?

1. **Generalizar** relaciones matemáticas

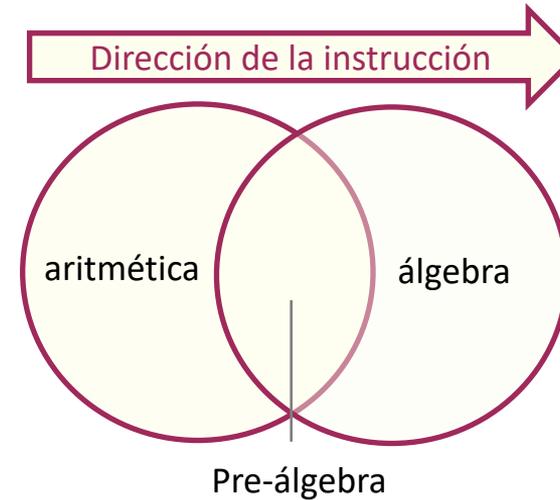
- Apartar **información irrelevante**;
- Adaptar, ajustar y reorganizar un conjunto de **experiencias previas**;
- Poner atención a ideas, capacidades y propiedades involucradas en **diferentes situaciones**; y
- Mejorar su comprensión y herramientas para **resolver problemas**.

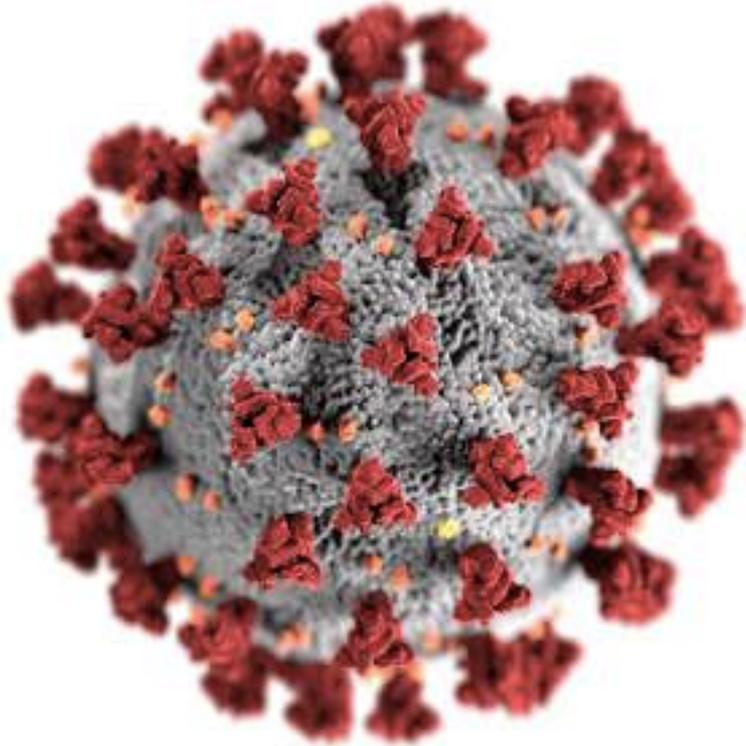
(Carpenter y Levi, 2000; Carraher y Schliemann, 2002, 2015; English y Warren, 1998; Warren, 2005).



¿Álgebra?

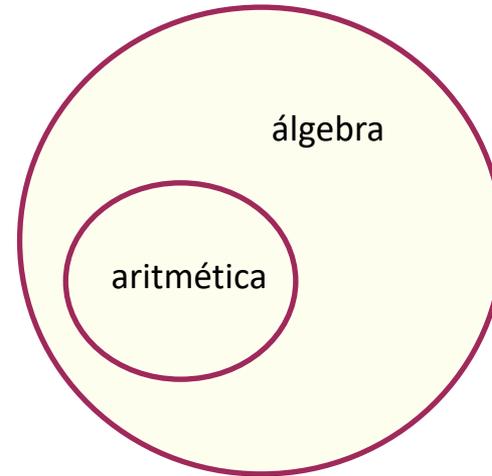
2. Conexiones entre diferentes áreas

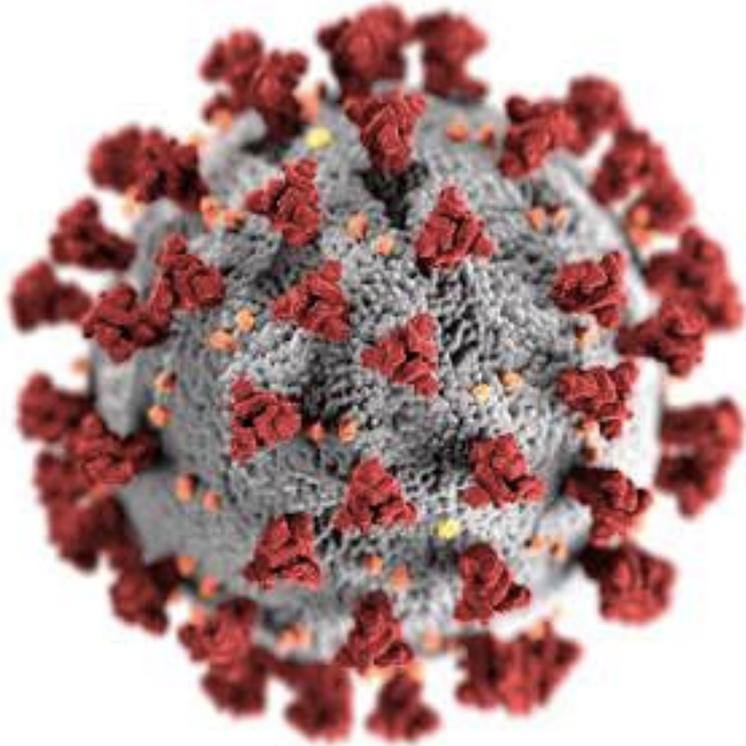




¿Álgebra?

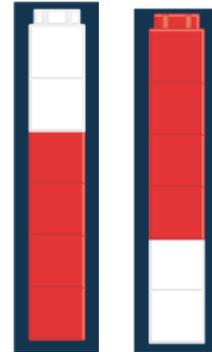
2. Conexiones entre diferentes áreas





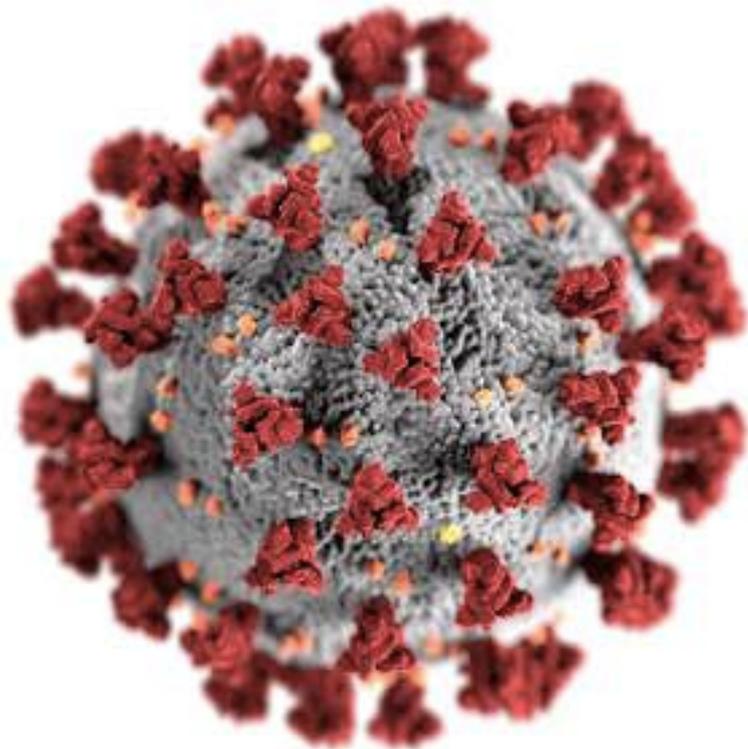
¿Álgebra?

2. Conexiones entre diferentes áreas



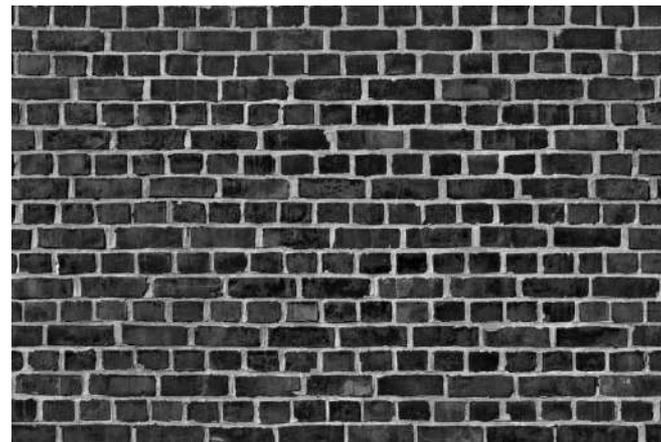
$$2 + 4 = 4 + 2$$

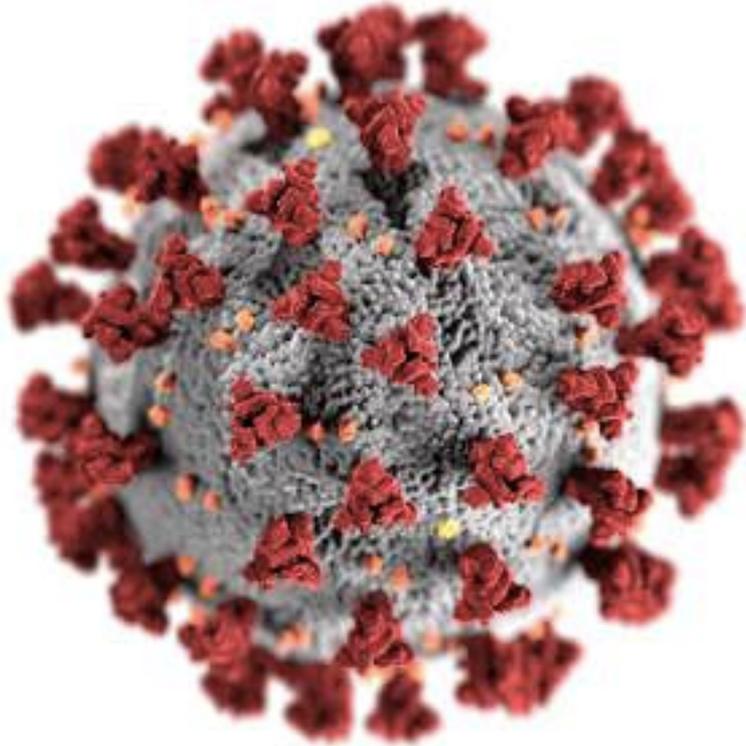
$$a + b = b + a$$



¿Álgebra?

3. Pensamiento algebraico

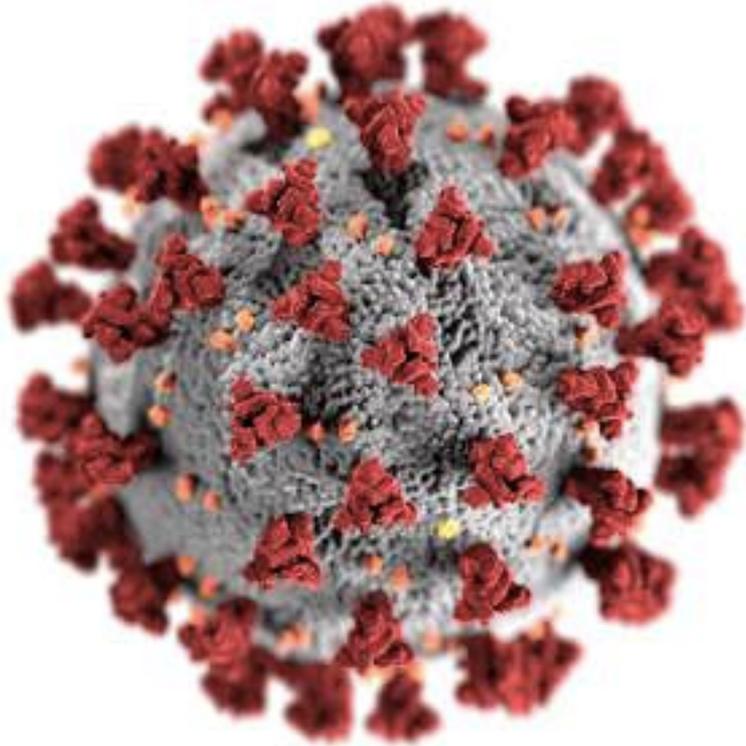




¿Álgebra?

3. Pensamiento algebraico

Estudiantes de los primeros cursos están **naturalmente predispuestos** a percibir regularidades y generalizar (Mason, 1996; Schifter et al, 2008), aún cuando estos no tienen todas las representaciones para expresar dichas ideas generales



¿Álgebra?

3. Pensamiento algebraico

Favorece que los estudiantes exploren relaciones entre cantidades, modelicen, establezcan predicciones, generalicen, resuelvan problemas, justifiquen, se comuniquen y articulen sus ideas

(Cai y Moyer, 2008; Kaput y Blanton, 2005; Molina et al., 2009)



2

El álgebra más allá del uso de letras y números: la importancia de la **generalización**.



Álgebra y **pensamiento algebraico**

- Un tipo particular de pensamiento matemático, el cual involucra **cantidades variables y generales** (no específicas), atender a las relaciones entre cantidades, reconocer estructuras, estudiar cambios, generalizar, resolver problemas, modelizar, justificar, probar y predecir (Bell, 1995; Kieran, 2006; Radford, 1999).
- Puede tomar lugar en **ausencia de la notación algebraica** (Carraher y Schliemann, 2010).
- Proporciona a los estudiantes herramientas que les permiten explorar, establecer y **construir relaciones matemáticas generales** (Lins y Kaput, 2004; Soares, Blanton y Kaput, 2006).



Álgebra y pensamiento algebraico Kaput, 2008

- Como un *artefacto cultural*, en el cual están involucrados símbolos específicos; y
- Desde la *perspectiva de acción*, el cual involucra una actividad humana de cómo los estudiantes aprenden y se desarrollan.



Álgebra y pensamiento algebraico

Prácticas

Generalización.

Representación.

Justificación.

Razonamiento.

Áreas o enfoques

Álgebra como:

Aritmética generalizada

Equivalencia, expresiones, ecuaciones, e inecuaciones.

Pensamiento funcional



Aritmética generalizada

Las **operaciones aritméticas** son usadas como un contexto para desarrollar pensamiento algebraico, focalizándose en sus propiedades fundamentales.

Sentencias de Verdadero / Falso

- $58 + 0 = 58$
- $789\ 564 + 0 = 789\ 564$

“Cero sumado con otro número es igual a ese otro número”

(Carpenter et al., 2003).



Equivalencias, expresiones, ecuaciones e inecuaciones

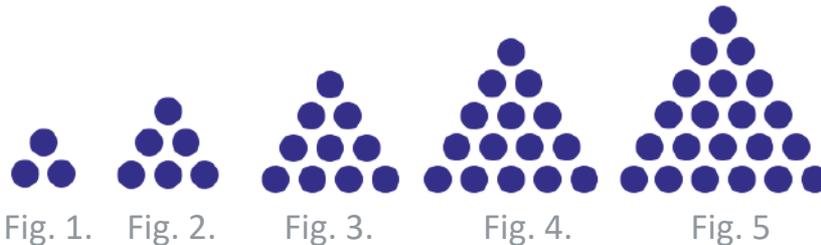
Incluyen una **comprensión relacional** del signo igual, así como la generalización, representación y razonamiento con expresiones, ecuaciones, e inecuaciones, incluyendo formas simbólicas y favorece que los estudiantes **vean las expresiones como objetos** en vez de ver estas como una serie de cálculos aislados.

$$8 + 4 = \square + 5$$



Pensamiento funcional

Construcción y generalización de **patrones** y **relaciones**, usando una diversidad de representaciones y tratando las relaciones generalizadas, o **funciones**, como el resultado de objetos matemáticos útiles” (Blanton y Kaput, 2001, p. 6-7).





3

Oportunidades de enseñanza: el rol clave de la **investigación en educación matemática.**



Áreas o enfoques

Álgebra como:

Aritmética generalizada

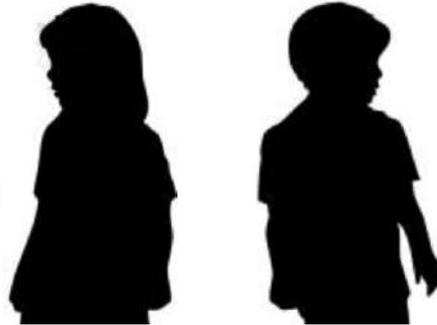
Equivalencia, expresiones, ecuaciones, e
inecuaciones.

Pensamiento funcional



Kinder (5-6 años)

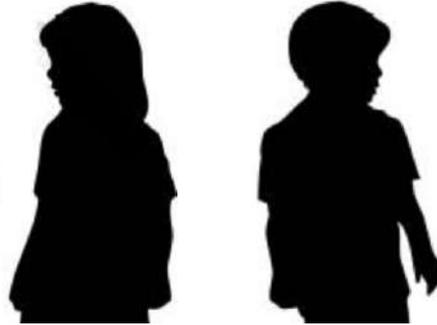
Schifter, Bastable, Russell, Seyferth, y Riddle, 2008.





Kinder (5-6 años)

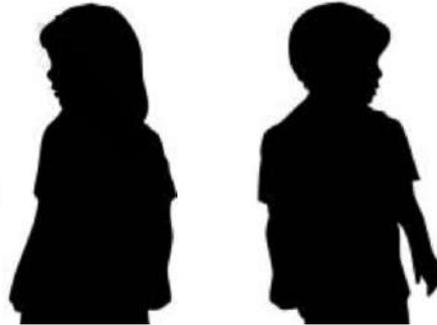
Schifter, Bastable, Russell, Seyferth, y Riddle, 2008.





Kinder (5-6 años)

Schifter, Bastable, Russell, Seyferth, y Riddle, 2008.



¿Y esto solo
funciona para el 6?



Kinder (5-6 años)

Schifter, Bastable, Russell, Seyferth, y Riddle, 2008.

Oportunidades para razonar con tales regularidades y examinar la estructura en el sistema numérico, facilitando la transición a enfoques más formales.

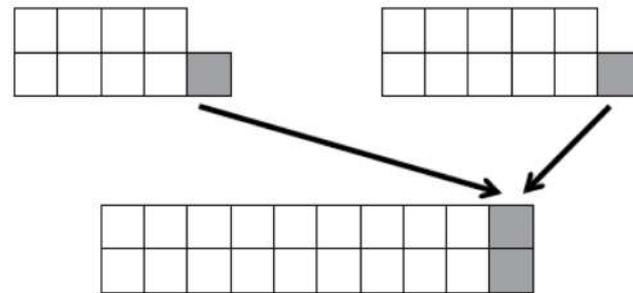


Tercero de primaria (8-9 años)

Isler et al., 2013.

“La suma de 2 números impares es un número par”

“Lo hice con bloques. Entonces, tomé 9 bloques y lo agregué a 11. Si miras solo los bloques, el 9 y el 11, cada uno tiene un sobrante, pero cuando los pones juntos, sus sobras se emparejan, por lo que tienes un par número”.





Áreas o enfoques

Álgebra como:

Aritmética generalizada

Equivalencia, expresiones, ecuaciones, e inecuaciones.

Pensamiento funcional



Tercero de primaria (8-9 años)

Molina, 2009

<https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6186/5503>

Tabla 1

Explicaciones dadas por los alumnos sobre la veracidad o falsedad de algunas de las sentencias propuestas

Sentencias	Explicaciones
$13 + 11 = 12 + 12$	“Doce más doce me dan veinticuatro y trece más once me dan veinticuatro”.
$17 - 12 = 16 - 11$	“Verdadera porque he hecho una cuenta y otra cuenta y me ha salido lo mismo” [Aparte calcula mediante el algoritmo de la resta $17 - 12 = 05$ y $16 - 11 = 05$].
$11 - 6 = 10 - 5$	“Porque... si once es mayor que diez y le quitas uno más que cinco, te sale igual”.
$125 - 0 = 125$	“Yo he pensado que, si quitas el cero, como el cero no es nada, pues te quedan los dos ciento veinticinco. Ciento veinticinco igual a ciento veinticinco”.



Áreas o enfoques

Álgebra como:

Aritmética generalizada

Equivalencia, expresiones, ecuaciones, e
inecuaciones.

Pensamiento funcional



Pre-Kinder a Kinder (4-6 años)

Blanton y Kaput (2004, p. 136)

Supongamos que estabas en un refugio para perros y querías contar todos los ojos de los perros que observaste. Si había un perro, ¿cuántos ojos habían? ¿Y en dos perros? ¿En tres perros? ¿En 100 perros? ¿Ves alguna relación entre el número de perros y el total número de ojos? ¿Cómo describirías esta relación? ¿Cómo lo sabes?

$$y = 2x$$



Pre-Kinder a 5º básico (4-11 años)

Blanton y Kaput (2004, p. 136)

- **4-5 años:** emplean material manipulativo y **estrategias de conteo** para determinar la cantidad de ojos. Organizan información en una tabla.
- **5-6 años:** identificar un patrón y establecer **relaciones sobre la paridad** del datos.
- **6-7 años:** describen el patrón, el **concepto de doble** y realizando **predicciones**.
- **7-11 años:** expresar reglas multiplicativas con palabras y símbolos, llegando a **generalizar relaciones como $2n$** .



Primero básico (6-7 años)

Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez, 2018

Una cuidadora de animales debe comprar platos de comida y agua para los perros, de modo que cada perro debe tener su plato de comida, y cinco platos con agua en un sitio donde los perros puedan beber.

$$y = x + 5$$





Primero básico (6-7 años)

Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez, 2018, p. 69

17. I1: [...] S7 nos quiere contar algo, ¿tú cómo los has hecho S7?
18. S7: Yo sumando [...] hasta llegar a los mil millones.
19. I1: ¿Y eso que son?
20. S7: Platos de comida y le pongo cinco pues, mil millones cinco.
21. I1: Ah, ¿al final le sumas cinco porque son los de agua?
(S7 asiente)



Tercero y quinto básico (8-9; 11-12 años)

Eder Pinto y María C. Cañadas



REPOSITORIO DIGITAL DE DOCUMENTOS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA



Tercero y quinto básico (8-9; 11-12 años)

Eder Pinto y María C. Cañadas



REPOSITORIO DIGITAL DE DOCUMENTOS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

[Página Inicial](#) | [Acerca de](#) | [Ayuda](#)

[Iniciar Sesión](#) | [Registro](#)

[Buscar](#)

- **Búsquedas**
 - [Simple](#)
 - [Avanzada](#)
- **Explorar por**
 - [Término Clave](#)
 - [Autor](#)
 - [Valoración](#)
 - [Enfoque](#)
 - [Nivel Educativo](#)
 - [Revista](#)
 - [Editorial](#)
 - [Año](#)
- **Acerca de**
 - [Funes](#)
 - [Cuestiones Legales](#)
 - [Políticas de Uso](#)
 - [Depósito de Registros](#)

Búsqueda por Autor

Por favor, seleccione un valor para consultar el listado que aparece a continuación

A | [Á](#) | [B](#) | [C](#) | [D](#) | [E](#) | [F](#) | [G](#) | [H](#) | [I](#) | [J](#) | [K](#) | [L](#) | [M](#) | [N](#) | [Ñ](#) | [O](#) | [P](#) | [Q](#) | [R](#) | [S](#) | [T](#) | [U](#) | [V](#) | [W](#) | [X](#) | [Y](#) | [Z](#)

A...

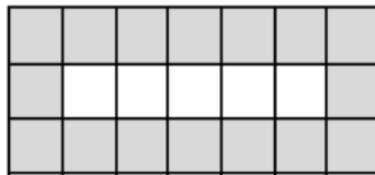
- | | | |
|---|---|--|
| • Abadía, Milena (1) | • Almeida, Mateus (1) | • Araya, José Alfredo (2) |
| • Abadías, Luciano (1) | • Almeida, Osvaldo (1) | • Araya, Marta (2) |
| • Aballe, M. Á. (1) | • Almeida, Rut (8) | • Araya, Paulina (2) |
| • Abancin, Ramón (2) | • Almirón, Analía (2) | • Araya, Roberto (6) |
| • Abar, Celina (12) | • Almirón, Martín Alejandro (2) | • Araya-Tapia, Daniela (1) |
| • Abarca, Katherine (1) | • Almorza, David (1) | • Arboleda, Astrid Elena (1) |
| • Abaurrea, J. (1) | • Almouloud, Saddo (2) | • Arboleda, Luis Carlos (23) |
| • Abaurrea, Jaione (5) | • Almouloudg, Saddo (8) | • Arboleda, Viviana (1) |
| • Abboud, Maha (1) | • Almuna, Felioe (1) | • Arbona, E. (1) |



Tercero y quinto básico (8-9; 11-12 años)

Eder Pinto y María C. Cañadas

Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos porque está ya muy estropeado. El equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas blancas y con baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la manera que ves en la siguiente imagen.

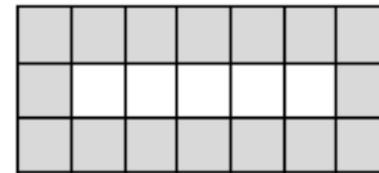


$$y = 2x + 6$$



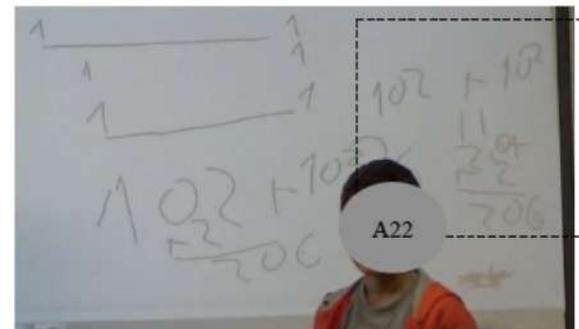
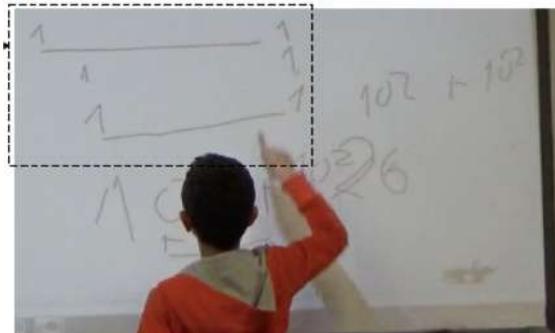
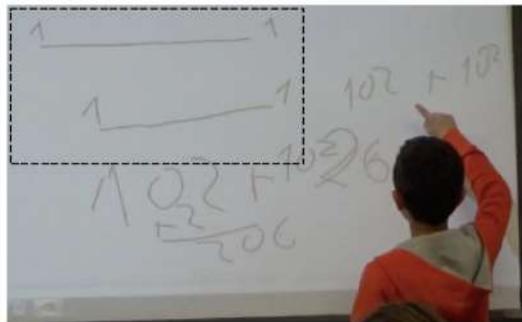
Tercero básico (8-9 años)

Eder Pinto y María C. Cañadas



$$100 + 100 = 200 + 6 = 206$$

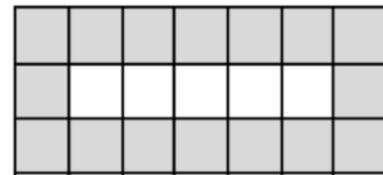
sumandole 6 mas.





Quinto básico (11-12 años)

Eder Pinto y María C. Cañadas



(a)

$$(n^{\circ}b \times 2) + 6$$

(b)

$$(n^{\circ}bg - 6) : 2$$

(c)

$$(20 - 6) : 2$$

14 : 2 = 7



Álgebra más allá de letras y símbolos

- Promover y desarrollar un tipo de **pensamiento matemático** en las aulas.
- Ejemplos provenientes de la investigación como una forma de **iluminar nuestro ejercicio profesional**.
- Alejarnos de enfoques puramente procedimentales.
- La variedad de **formas de expresar** ideas con un carácter algebraico.
 - Lenguaje natural.



El álgebra en la escuela: más allá de letras y números.

Aportes desde la investigación en pensamiento algebraico

Eder Pinto M.
epinto@udd.cl