TIPOS DE PROBLEMAS SOBRE DIVISIBILIDAD QUE PROPONEN LOS TEXTOS ESCOLARES Y REPORTES DE INVESTIGACIÓN Y RELACIONES CONCEPTUALES IMPLICADAS

Fabián Espinoza y Marcel Pochulu

UNNE-UNVM

rrfespinoza@gmail.com
marcelpochulu@gmail.com

FECHA DE RECEPCIÓN: 24/04/18 FECHA DE ACEPTACIÓN: 20/06/19

RESUMEN

Se expone una lista de tipos de problemas o tareas, del nivel medio, a los que resuelve la divisibilidad, como así también, unas herramientas teóricas y metodológicas para determinar las relaciones conceptuales más relevantes que se ven implicadas en la resolución de alguna situación particular. La tipología de problemas se identifica a partir de un proceso de análisis de los NAP de Argentina, algunos libros de textos escolares de reconocido nivel académico e investigaciones enmarcadas en la didáctica de la divisibilidad. Las relaciones entre los conceptos se determinan a través de un análisis ontológico y semiótico de prácticas matemáticas institucionales.

ABSTRACT

A list of types of problems or tasks of the high school level, to which divisibility responds, as well as, theoretical and methodological tools to determine the most relevant conceptual relationships that are involved in the resolution of a particular situation, is presented. The typology of problems is identified from an analys is process of Argentina's "Núcleo de Aprendizajes Prioritarios", alsoknown as NAP (Nucleus of CriticalLearnings), somebooks of scholastictexts of recognizedacademiclevel, and investigations that belong to the didactics of divisibility. The relationships between concepts are determined through anontological and semioticanalysis of institutional mathematicalpractices.

PALABRAS CLAVE:

Enseñanza de la divisibilidad,tipos de problemas, relaciones conceptuales.

KEYWORDS:

Teachingdivisibility, types of problems, conceptual relationships.

INTRODUCCIÓN

En Argentina la enseñanza de la divisibilidad, como objeto matemático, se inicia en la Escuela Primaria, se retoma y complejiza en la Escuela Secundaria y forma parte de la currícula de las primeras materias de los planes de estudio de la formación de Profesores en Matemática. En el caso particular de la Escuela Secundaria, los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP), definidos por el Ministerio de Educación (2011) yactualmente en vigencia, ponen énfasisen la exploración, producción y validación de relaciones conceptuales, numéricas y algebraicas ligadas a la divisibilidad.

Para cumplir con este propósito, la labor del profesor no se reduce a la exposición de saberes con un cierto criterio de selección y secuenciación, sino que implica desentrañar una amplia red de relaciones conceptuales involucradas en esta temática. Esto conlleva, entre otras acciones, a seleccionar tipos de problemassobre divisibilidad, los cuales involucrarán conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y diferentes representaciones que son la base para que los estudiantes logren comprender este objeto matemático. No obstante, cabe preguntarse: ¿cuáles son los problemas más apropiados para presentar a los estudiantes? ¿cuáles son recomendados por los reportes de investigación en educación matemática? ¿quétipos de problemas ofrecen habitualmente los textos escolares?

En este sentido, el presente trabajo tiene por propósito aportar a la realización de esta tarea docente, exponiendo una lista de tipos de problemas o tareas y herramientas teóricas y metodológicas para determinar las relaciones conceptuales más relevantes que se ven implicadas en la resolución. La tipología de problemas se identifica a partir de un proceso de revisión de los NAP de Argentina, algunos libros de textos escolares de reconocido nivel académico e investigaciones enmarcadas en la didáctica de la divisibilidad como objeto matemático.

2. MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

Para la identificación y tipificación de los problemas de divisibilidad realizamos un análisis de documentos académicos.

El conjunto documental objeto de estudio fue el siguiente:

- Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP, 2011),
- Textos de Aritmética de la autoría de Gentile (1984, 1991) y Becker, Pietrocola y Sánchez (2001),
- Reportes de investigaciones pertenecientes a la didáctica de la divisibilidad, como las desarrolladas por Zazkis& Campbell (1996), Zazkis (2000 y 2001), Zazkis&Gadowsky (2001), Brown (2002), Zazkis&Liljedah (2004), Bodí (2006), Bodí, Valls y Llinares (2007) y López (2015).
- Textos escolares para la Educación Secundaria de autores tales como BroitmanyItzcovich (2011); Effenberger (2016).

Llevamos a cabo un proceso sistémico de las fuentes mencionadas buscando identificar, conocer, describir y registrar en una matriz (que omitimos poner en este reporte), los tipos de problemas, algunas situaciones representantes de cada familia de problemas, los principales conocimientos involucrados y emergentes de las prácticas institucionales resolutorias y las primeras relaciones que se establecen entre estos conocimientos.

Para el análisis didáctico de las situaciones-problemasutilizamosel constructo configuración epistémica que propone Godino, Batanero & Font (2007) para el Enfoque Ontológico y Semiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS). Estos autores consideran que toda práctica o actividad matemática está centrada en la resolución de problemas (en el sentido más amplio de su acepción, los cuales van desde simples ejercicios a instancias de modelación), y se pueden encontrar algunos o todos de los siguientes elementos primarios (Godino, 2003):

- Situaciones problemas: Problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios, etc. Estos constituyen las tareas que inducen la actividad matemática de divisibilidad.
- Conceptos: Están dados mediante definiciones o descripciones de los objetos matemáticos (número primo, número compuesto, divisor, factor, etc.).
- Propiedades o proposiciones: Comprenden atributos de los objetos matemáticos, los que generalmente suelen darse como enunciados o reglas de validez.
- Procedimientos: Comprenden algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo o modos de ejecutar determinadas acciones.
- Argumentaciones: Se usan para validar y explicar la resolución que se hizo de la situación problema. Pueden ser deductivas o de otro tipo, e involucran conceptos, propiedades, procedimientos o combinaciones de estos elementos.
- Lenguaje: Términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc.

Para el EOS, los seis objetos primarios que están presentes en una práctica matemática se relacionan entre sí formando configuraciones. Estas configuraciones (figura 1) son entendidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, y constituyen los elementos del significado de un objeto matemático particular.

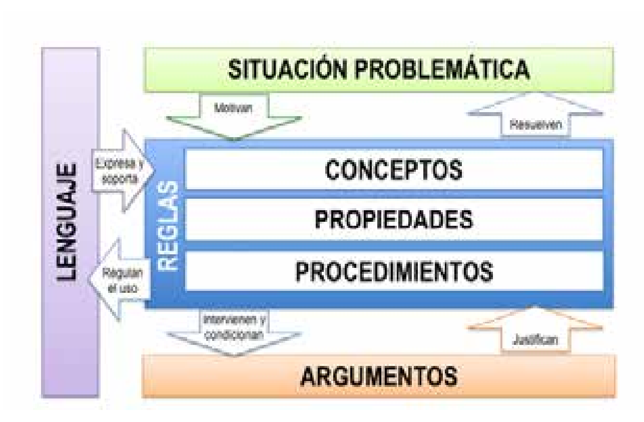


Figura 1: *Configuración Epistémica/Cognitiva adaptada de D'Amore y Godino (2007)*

Las configuraciones pueden ser epistémicas o instruccionales, si son redes de objetos institucionales (extraídas de un texto escolar como en nuestro caso), o cognitivas, si representan redes de objetos personales (actividad que realizaron los estudiantes ante una situación problema). Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional (Godino y Batanero, 1994).

Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2005), señalan que la noción de configuración epistémica permite hacer un análisis microscópico de los objetos matemáticos involucrados en una práctica o sistema de prácticas, caracterizar su complejidad ontosemiótica y aportar explicaciones de los aprendizajes en términos de dicha complejidad.

En las configuraciones se identifican relaciones conceptuales, las que son explicadas en términos de funciones semióticas de acuerdo con D'Amore y Godino (2007). Las funciones semióticas se constituyen en una herramienta metodológica central en este trabajo, dado que ponen en evidencia la actividad relacional de los objetos matemáticos, en la práctica matemática institucional.

3. DESARROLLO

3.1. Reconstrucción de tipos de tareas a los que responde la divisibilidad

Consideramos que toda la familia de problemas que existe sobre divisibilidad no podría abordarse en la escuela secundaria por la complejidad que involucra y el tiempo didáctico que conlleva para atendera las cuestiones de programación de la enseñanza. Por lo tanto,le queda al profesor de matemática realizar una selección de la tipología de situaciones problemas prioritarias, lo cual escapa de los intereses de este trabajo.

Sin pretender la exhaustividad, presentamos una interesante variedad de clases de problemas de divisibilidad que emergen del análisis de los libros de texto y reportes de investigación sobre la didáctica de este objeto matemático.

- Dado el cardinal de una colección que se pretende subdividir en subcolecciones equipotentes, determinar el número de subcolecciones de la partición, el cardinal de cada subcolección y el resto.
- Determinar si un número "a" es divisor o factor de otro "b", cuando "b" está expresado en forma decimal, como producto de factores primos, en base al algoritmo de la división o en base a la propiedad distributiva.
- Determinar si un número "a" es múltiplo (o divisible) de otro número "b", cuando "a" está expresado en forma decimal, como producto de factores primos, en base al algoritmo de la división o en base a la propiedad distributiva.

- Determinar si 0 es divisor o factor de todos los números.
- Determinar si 0 es múltiplo (o divisible) de todos los números.
- Determinar si 1 es divisor o factor de todos los números.
- Determinar si 1 es múltiplo (o divisible) de todos los números.
- Caracterizar las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$, cuando a es divisor de b, siendo a y b números no simultáneamente nulos.
- Determinar en qué condiciones, en una división, el divisor de la división es divisor del dividendo.
- Hallar múltiplos de un número.
- Hallar un número conociendo una lista finita, exhaustiva y ordenada de sus múltiplos.
- Hallar todos los divisores de un número.
- Dados los divisores (naturales o enteros), encontrar el número correspondiente.
- Decidir si un número es primo, compuesto, cuadrado perfecto.
- Determinar la cantidad de divisores de un número.
- Determinar la paridad de la cantidad de divisores de un número.
- Hallar un número con una determinada cantidad de divisores.
- Encontrar el mínimo común múltiplo de dos o más números.
- Encontrar el máximo común divisor de dos o más números.
- Determinar si dos números son coprimos.

3.2. Análisis ontosemiótico de algunas situaciones-problemas

Expondremos el análisis a priori realizado sobre dos problemas que consideramos son representantes de divisibilidad, que fueron retomados y adaptados de los trabajos deBodí, Valls y Llinares (2007) y Zazkis (2001).

Este análisis conlleva a explicitar los objetos matemáticos involucrados en la práctica institucional de resolución de la situación problema y estudiar el carácterrelacional de los mismos.

Para expresar el resultado final del análisis recurrimos a la herramienta configuración epistémica/ cognitiva que proporciona el EOS.

En el siguiente problemase plantean tareas de divisibilidad con números que no necesariamente están expresados en base 10.

Problema 1:

Teniendo en cuenta que: 187=11x17, ¿son correctas las siguientes afirmaciones?:

a) 17 es divisor de 11x17.

b) 11x17+1870 es múltiplo de 187.

c) 11x17+16 es múltiplo de 187.

En cada caso, fundamenta tu respuesta.

En el primer ítem, la tarea consiste en decidir si un número expresado en base 10, es divisor de otro número expresado en su descomposición factorial prima.

En el segundo apartado, la tarea consiste en determinar si un número, expresado en base a la propiedad distributiva, es múltiplo de otro número expresado en base 10.

En el tercer caso, la tarea consiste en determinar si un número, expresado en base al algoritmo de la división, es múltiplo de otro número escrito en su versión decimal.

Resolución:

a) Podemos afirmar que 17 es divisor de 11x17, pues es un factor de la descomposición factorial prima de 11x17. Esto es así pues teniendo en cuenta la definición de divisor (concepto), podemos decir que 17 es divisor de 11x17, ya que existe un número, el 11, que multiplicado por 17 da por resultado 11x17.

b) El número 11x17+1870 está expresado en base a la propiedad distributiva, teniendo en cuenta que, como 11x17=187 y 1870=187x10, en función de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma de números, al número en cuestión (11x17+1870) lo podemos escribir así: 187+187x10.

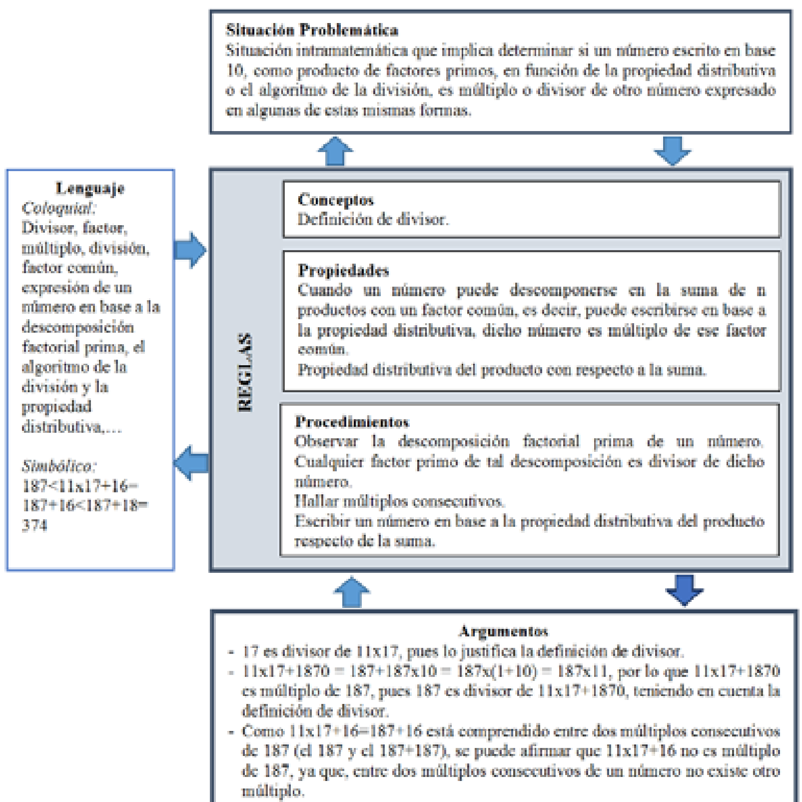
Ahora bien, 187+187x10=187x(1+10)=187x11 (concepto y procedimiento), expresión que nos dice que el número dado en la consigna 11x17+1870, que también puede escribirse como 187+187x10, es múltiplo de 187, pues 187 es divisor del mismo, ya que, teniendo en cuenta la definición de divisor, el número de interés puede escribirse como 187x11 (concepto y argumento).

Entonces, cuando un número puede descomponerse en la suma de n productos con un factor común, es decir, puede escribirse en base a la propiedad distributiva, dicho número es múltiplo de ese factor común (propiedad).

c) El número 11x17+16 está expresado en base al algoritmo de la división; el dividendo es 203 (11x17+16), el divisor es 17, el cociente, 11, y el resto, 16.

El primer múltiplo de 187 es el mismo 187 y el múltiplo consecutivo es: 187+187 (procedimiento). El número 11x17+16=187+16, está comprendido entre estos dos múltiplos consecutivos de 187: 187<11x17+16<187+187, razón por la cual podemos afirmar que 11x17+16 no es múltiplo de 187, dado que, entre dos múltiplos consecutivos de un número no existe otro múltiplo (argumento).

La configuración epistémica de la práctica precedente es la siguiente:



Algunas relaciones involucradas y emergentes:

Estas relaciones pueden apreciarse en término de las siguientes funciones semióticas, establecidas entre objetos matemáticos primarios constitutivos de la configuración epistémica expuesta:

- Entre el problema y el procedimiento de observar y decidir si un número p es un número primo de la descomposición factorial de un número n, para determinar que p es divisor de n.
- Entre el procedimiento de observar y decidir si un número p es un primo de la descomposición factorial de un número n para determinar que es su divisor y el concepto dado por la definición de divisor.
- Entre el problema y el procedimiento que consiste en expresar un número en base a la propiedad distributiva, dejando explícito el factor común, para determinar que el número en cuestión es múltiplo de ese factor común.
- Entre el procedimiento que conlleva escribir un número en base a la propiedad distributiva, dejando explícito el factor común, y el concepto dado por la definición de divisor.
- Entre el procedimiento de escribir un número en base a la propiedad distributiva, dejando a la vista el factor común, y la propiedad que expresa: cuando un número puede descomponerse en la suma de productos con un factor común, es decir, puede escribirse en base a la propiedad distributiva, dicho número es múltiplo de ese factor común.
- Entre el problema y el procedimiento de acotar el número 11x17+16 entre dos múltiplos consecutivos de 187.
- Entre el procedimiento de acotar el número 11x17+16 entre dos múltiplos consecutivos de 187, y el argumento que explica que aquel número no es múltiplo de 187, ya que, entre dos múltiplos consecutivos de un número no existe otro múltiplo.

El siguiente problema conlleva la tarea de encontrar un número que disponga de una determinada cantidad de divisores naturales (en el primer apartado) y enteros (en el segundo).

Problema 2:

Si fuera posible, escribe un número que tenga:

a) Exactamente cuatro divisores naturales.

b) Más de 15 divisores enteros.

Si te resultó posible, explica la estrategia que usaste para encontrarlos y si no, explica por qué no es posible. En cualquier caso, fundamenta tu respuesta.

Resolución:

a) Dado que la cantidad de divisores requerida es pequeña, se puede resolver el problema buscando el número solicitado por tanteo (procedimiento), aplicando alguna herramienta como la multiplicación o división (procedimiento), más aún, teniendo en cuenta que hay números chicos con 4 divisores naturales, como, por ejemplo, el 6 o el 8.

No obstante, un procedimiento que siempre lleva al éxito en la realización de este tipo de problema, es multiplicar dos números primos (procedimiento). En efecto, si p y q son dos números primos, el número compuesto pxq, tendrá 4 divisores naturales, que son los elementos del siguiente conjunto: {1, p, q, pxq}.

1 es uno de los divisores porque es divisor de todos los números (propiedad), pxq es también un divisor, dado que todo número es divisor de sí mismo (propiedad), p y q son divisores de pxq, teniendo en cuenta la definición de divisor (concepto). Y no existen otros divisores, ya que p y q son números primos, por lo que no pueden descomponerse en producto, salvo la descomposición trivial (p=1xp) (propiedad), en cuyo caso ya se contaron 1 y p entre los divisores.

b) En el segundo apartado, se solicita encontrar un número que tenga más de 15 divisores enteros (16 divisores o más). Para simplificar la tarea, se puede buscar un número que tenga 8 divisores naturales y, por lo tanto, 16 divisores enteros, teniendo en cuenta que, si un número entero, distinto de cero, tiene una cantidad de divisores en el conjunto de los números naturales, dispone del doble de esa cantidad en el conjunto de los números enteros (propiedad).

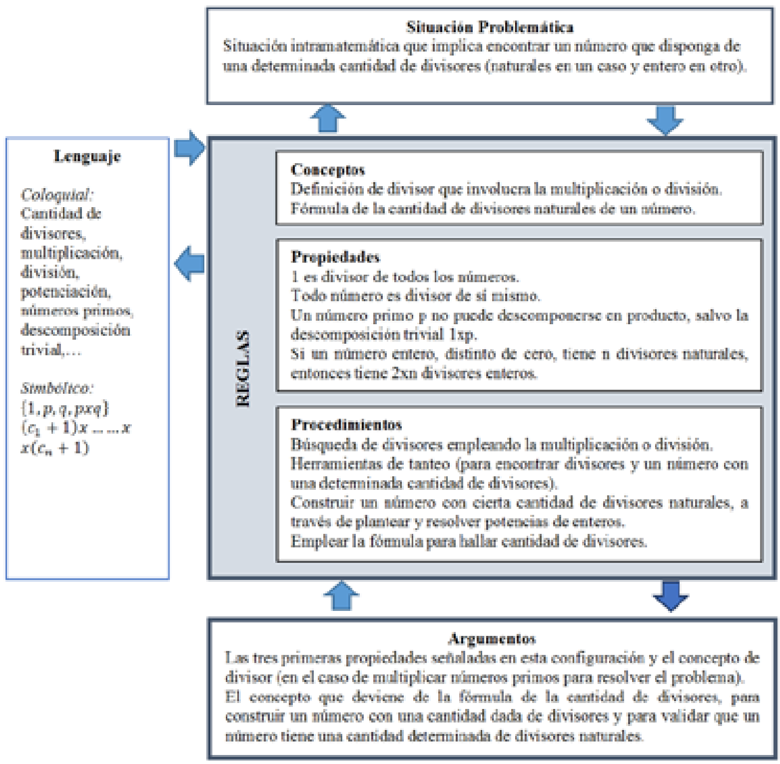
Para resolver esta situación se pude trabajar de manera similar al caso anterior, esto es, hallar el número de interés multiplicando 3 números primos. En este caso, si p, q y r fueran primos, la cantidad de divisores naturales del número pxqxr es 8 y pertenecen al siguiente conjunto:{1, p, q, r,pxq, pxr,qxr, pxqxr}, siendo la cantidad de divisores enteros, 16.

También se puede abordar la tarea a través de la manipulación conveniente de la fórmula que permite obtener la cantidad de divisores naturales de un número. La cantidad de divisores naturales de un número ${p_1}^{c_1}x \dots \dots x{p_n}^{c_n}$, expresado en su descomposición factorial prima, está dada por: $(c_1+1)x \dots \dots x(c_n+1)$, es decir, por el producto de los exponentes de los números primos de la base, aumentados en una unidad (concepto y argumento).

Empleando esta fórmula, si quisiéramos construir un número natural con 16 divisores enteros, esto es, 8 divisores naturales, podríamos formar una potencia de base prima y exponente n-1, siendo n la cantidad de divisores que deseamos que dicho número tenga. Es decir, un número con 8 divisores naturales podría construirse con una potencia de base 2 y exponente 7 (procedimiento). La base podría ser cualquier número primo, aunque el hecho que sea 2, facilita el cálculo de la potencia, por el tamaño del número.

La validación correspondiente lo constituye el hecho de contar la cantidad de divisores usando la fórmula indicada recientemente. Esto es, $2^7=128$, tiene $7+1=8$, divisores naturales y, por lo tanto, 16 divisores enteros (procedimiento y argumento).

La configuración epistémica de la práctica matemática desarrollada es la siguiente:



Algunas funciones semióticas involucradas y emergentes:

- Entre el problema y el procedimiento de búsqueda, por tanteo, de un número con una cantidad dada de divisores.
- Entre el problema y el procedimiento de multiplicar números primos para hallar un número con una determinada cantidad de divisores naturales.
- Entre el procedimiento de multiplicar números primos para hallar un número con una determinada cantidad de divisores naturales y el argumento constituido por las tres primeras propiedades expuestas en la configuración epistémica y el concepto de divisor.

- Entre el problema y el procedimiento de la potenciación para construir un número con una cantidad dada de divisores naturales.
- Entre el procedimiento de la potenciación para construir un número con una cantidad dada de divisores naturales y el argumento dado por la fórmula de la cantidad de divisores.
- Entre el procedimiento de hallar los divisores naturales de un número y la propiedad de encontrar todos sus divisores enteros, conociendo dichos divisores naturales.

4. Conclusiones.

La muestra de la familia de problemas de divisibilidad constituye un aporte para el docente que desee realizar un estudio matemático y didáctico del tema. Conocer esta familia de problemas existentes sobre divisibilidad le permite al profesor de matemática proponer, además de los clásicos existentes, aquellos que relacionan el objeto divisor con otros como la división y fracción; el trabajo con tareas de divisibilidad cuando uno de los números está expresado en base al teorema fundamental de la aritmética, el algoritmo de la división y la propiedad distributiva; problematizar tareas en los que, disponiendo de divisores o múltiplos, se debe encontrar el número correspondiente y plantearla presencia de propiedades de la divisibilidad. El análisis ontosemiótico realizado sobre dos problemas representantes de algún tipo de problemas de los expuestos, aporta a dicho estudio, en tanto permite poner en evidencia una interesante red de relaciones conceptuales entre objetos matemáticos primarios enmarcados en la divisibilidad.En este análisis emergen a priori relaciones entre números a partir de la propiedad de "ser divisor" (y su estrecha vinculación con la de "ser múltiplo"); números expresados en distintos lenguajes (expresión decimal, propiedad distributiva, algoritmo de la división, descomposición en factores primos).

Quedan también al descubiertounos procedimientos que permiten construir un número, conociendo la cantidad de divisores naturales que dispone, a partir de multiplicar números primos, un modo de hacer que puede derivar en la fórmula que permite obtener la cantidad de divisores de un número, conociendo su descomposición factorial prima.

Asimismo, se evidencian propiedades y argumentos relacionados con la caracterización de la conformación de una sucesión de múltiplos y la relación entre la cantidad de divisores naturales y enteros de un número, validada por una propiedad.

Por otra parte, el análisis ontológico y semiótico de prácticas matemáticas emergentes de ciertos problemas representante de algún tipo de problema que se incluye, puede constituirse en un ejemplo para la acción, en un organizador para el estudio y la enseñanza de la divisibilidad.

Finalmente, consideramos que este trabajo aporta sustanciales elementos a la tarea del profesor, dado que le brinda herramientas teóricas y metodológicas para desentrañar redes de relaciones conceptuales, alrededor de la problematización de un objeto matemático, práctica de enseñanza promovida por los NAP.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Becker, M.; Pietrocola, N. y Sánchez, C. (2001). *Aritmética.* Buenos Aires, Argentina: Red Olímpica.

Bodí, S. (2006). *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los Números Naturales* (Tesis doctoral). Universidad de Alicante, España.

Bodí, S.; Valls, J. y Llinares, S. (2007). *La comprensión de la divisibilidad en N. Un análisis implicativo.* Disponible en: http://www.asi4.uji.es/actas/p2a1.pdf

Broitman, C. yItzcovich, H. (2011). *Matemática en secundaria* 1º CABA/2º ES. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Santillana S.A.

Brown, A. (2002). Patterns of thought and prime factorization. En S. R. Campbell y R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory*: Research in cognition and instruction (pp. 131-137). Westport, CT: Ablex Publishing.

D'Amore, B. y Godino, J. (2007). El Enfoque Ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Relime*, 10(2), 191-218.

Effenberger, P. (2016). *Matemática 1º Secundaria* CABA. Buenos Aires, Argentina: Kapelusz.

Gentile, E. (1984). *Notas de Álgebra I.* Buenos Aires, Argentina: EUDEBA.

Gentile, E. (1991). *Aritmética elemental en la formación matemática.* Buenos Aires, Argentina: Edipubli S.A.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*14(3), 325-355.

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). *The onto-semiotic approach to research in mathematics education.* ZDM, 39(1-2), 127-135.

Godino, J.; Font, V.; Contreras, A. y Wilhelmi, M. (2005). *Articulación de marcos teóricos en didáctica de las matemáticas.* Disponible en: http://www4. ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones/Godino_y_cols_Articulacion.pdf

López, A. (2015). *Significados de la relación de divisibilidad de maestros en formación manifestados en el desarrollo de un modelo de enseñanza.* Granada, España: Universidad de Granada. Disponible en: http:// digibug.ugr.es/bitstream/10481/42431/1/25682234.pdf

Ministerio de Educación (2011). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Ciclo Básico, Educación Secundaria.* Disponible en http://file:///C:/Users/Usuario/Downloads/DISEÑOS%20CURRICULARES/NAP%20DE%20TODO%20EL%20PAÍS.pdf

Zazkis, R. (2000). Factors, divisors and multiples: Exploring the web of students' connections. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 4, 210-238.

Zazkis, R. (2001). Múltiplo, divisores y factores: explorando la red de conexiones de los estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigaciones en Matemática Educativa* 4(1), 63-92.

Zazkis, R. et Campbell, S. (1996). Divisibility and Multiplicative structure of natural numbers: preservice teacher's understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 540-563.

Zazkis, R. &Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. In A. Cuoco (Ed.), *NCTM 2001 Yearbook: The roles of representation in school mathematics,* (41-52), Reston: NCTM.

Zazkis, R. &Liljedah, P. (2004). Understanding primes: the role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(3), 164-186