# UNA VISIÓN DEL USO INTELIGENTE DE LAS HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS EN EL AULA DE MATEMÁTICA

**Cecilia Crespo Crespo y Carlos Pesce**

**Instituto Superior del Profesorado**
**"Dr. Joaquín V. González".**
**Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico.**
**Ciudad de Buenos Aires, Argentina**

crccrespo@gmail.com, cfpesce@gmail.com

**FECHA DE RECEPCIÓN: 22/11/18 FECHA DE ACEPTACIÓN: 26/04/19**

**RESUMEN**

Este trabajo presenta una serie de reflexiones acerca del uso inteligente de los recursos tecnológicos en el aula de matemática. Se analizan ejemplos de actividades planteadas a estudiantes de la carrera del Profesorado en Matemática en asignaturas de Análisis Matemático. Éstas muestran que es necesario reformular el tipo de actividades que se proponen en el discurso matemático escolar para que la tecnología sea incorporada como instrumento en el aula.

**ABSTRACT**

This paper presents some reflections on the intelligent use of technological resources at mathematics classroom. Examples of activities raised to students of the career of mathematic teachers about subjects of mathematical analysis are analized . They show that it is necessary to reformulate the type of activities that are proposed in the school's mathematical discourse so that the technology is incorporated as an instrument in the classroom.

**PALABRAS CLAVE:**

recurso tecnológico, instrumento, uso inteligente

**KEYWORDS:**

Technological resource, instrument, intelligent use

## INTRODUCCIÓN

### Las tic en el aula de matemática

La utilización de las TIC en el aula de matemática, mediante uso de calculadoras y computadoras, ha sido continuo motivo de investigaciones y debates en el ámbito educativo en congresos y publicaciones en los últimos tiempos.

Los recursos tecnológicos son considerados en la actualidad como recursos didácticos para el aprendizaje de la matemática. Durante siglos, las herramientas que se han utilizado en el aula de matemática han consistido en lápiz, papel, regla, escuadra, transportador y compás. En nuestros días, al referirse al uso de la tecnología, se piensa en la utilización de calculadoras y recursos informáticos como herramientas para favorecer la construcción de conocimientos matemáticos.

La implementación de la tecnología en el aula ha tenido una rápida evolución en las últimas décadas y se han puesto de manifiesto esos cambios a través de propuestas surgidas en publicaciones y presentaciones en eventos relacionados con la matemática educativa. Conviven propuestas de variados enfoques que manifiestan la existencia de posturas didácticas diversas fundamentadas en visiones distintas del aula. Sus aplicaciones no se restringen sólo a la matemática, sino que se van transformando en herramientas didácticas para la enseñanza de otras disciplinas. El acceso y utilización de recursos tecnológicos es considerado como un derecho (Borba y Penteado, citado por Villarreal, 2004), habiendo surgido explícitamente la necesidad de la alfabetización tecnológica.

En este trabajo se presentan reflexiones acerca de una visión del denominado uso inteligente de la tecnología en el aula de matemática, basada de la línea de investigación de la construcción social del conocimiento.

## La construcción social del conocimiento y el discurso matemático escolar.

Es posible analizar el proceso de construcción del conocimiento y su relación con la tecnología a través de una adaptación del modelo propuesto por Tuyub y Cantoral (2007) en el que las prácticas sociales dan origen y son fuente del conocimiento matemático. En un escenario sociocultural, ciertas prácticas caracterizadas por un conjunto de actividades organizadas con cierta intencionalidad y normadas por las prácticas sociales que se asocian a prácticas de referencia producen experiencias que generan aprendizajes. Las prácticas sociales son generadoras de herramientas y representaciones sociales. El individuo no se encuentra aislado, sino que lleva a cabo interacciones con otros, a través de la comunicación de ideas y realizando una socialización de aprendizajes. A partir de la relación entre aprendizaje, experiencia y socialización, se generan socialmente conocimientos, pero también creencias y expectativas. Estas tienen, respectivamente, características cognitivas y afectivas que se ponen en juego en la dinámica del aula de matemática.

Puede comprenderse “la actividad como aquella observable tanto en los individuos como en los grupos humanos; la práctica de referencia como un conjunto articulado de actividades, también como aquella que permite la articulación de la actividad con la práctica social; la práctica social como reguladora (normativa) de la práctica de referencia y sus actividades relacionadas” (Montiel, 2005, p.126).

La matemática educativa es la disciplina que estudia los procesos de adquisición y transmisión de diferentes contenidos de la matemática, en situación escolar. Se propone describir y explicar los fenómenos relativos a las relaciones entre su enseñanza y aprendizaje y no se reduce a buscar una buena manera de enseñar una noción fija aún cuando espera a término, ser capaz de ofrecer resultados que permitan mejorar el funcionamiento de la enseñanza.

Nuestra postura es que cada elemento del sistema se modifica a medida que evoluciona la clase a consecuencia de la propia dinámica del aula, así por ejemplo, las reacciones de un estudiante están originadas, por la matemática que aprende, por el profesor que le enseña, por los libros que usa, por la idea de actividad matemática que el sistema escolar le transmite, es decir; asumimos que la condición situada del estudiante en el aula determina muchas de sus manifestaciones (Castañeda, 2009, p.1379).

En esta visión, los escenarios socioculturales cobran gran importancia, ya que "la socioepistemología se plantea el examen del conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y escenarios socioculturales particulares. El conocimiento, en este caso, se asume como el fruto de la interacción entre la epistemología y los diversos factores sociales" (Lezama, 2005, p.341). Las características de éstos influyen de manera directa en el proceso de construcción del conocimiento. En particular, según Lévy, "nuestro pensamiento se encuentra profundamente moldeado por dispositivos materiales y colectivos sociotécnicos" (Lévy citado por Villarreal, 2004, p.46).

El saber erudito no se construye en el aula. Es en escenarios académicos no escolares en los que los científicos producen conocimiento. En el aula, generalmente se construyen conocimientos de los que se ha eliminado su historia, origen y evolución; se aíslan ciertas nociones y propiedades, se las transpone al contexto escolar. A este fenómeno se lo denomina transposición didáctica (Brousseau, 1986). La problemática de estudio de la matemática educativa es "el examen de los fenómenos que se suceden cuando el saber matemático, constituido socialmente fuera de la institución escolar, se introduce y se desarrolla en el sistema de enseñanza" (Farfán, 2003, p.5). Este proceso de transposición de conocimientos científicos a conocimientos escolares es complejo ya que se trata de un movimiento de saberes de una comunidad hacia otra; en general, se ha realizado de una manera un tanto espontánea, lo que significa que casi nunca se han estudiado sus implicaciones a largo plazo.

El discurso matemático escolar, no es el discurso matemático simplificado. Es saber transpuesto y se refiere a cómo se interpreta, usa y se comparte la matemática en situación escolar. En la formación del discurso matemático escolar influyen profesores, padres, académicos, políticos y autores y editores de libros de texto (Castañeda, Rosas y Molina, 2010). En él se refleja una ideología a través de forma de presentar y tratar objetos matemáticos en el aula (qué debe estudiarse, cómo, en qué orden, etc.). De manera explícita o implícita genera normativa de la actividad de aula pues las actividades que se desarrollan se encuentran de acuerdo a él, se logra a partir de consensos entre quienes forman parte de la noósfera.

El discurso matemático escolar está compuesto por varios elementos que manifiestan sus características; entre ellas, podemos citar: los programas de la asignatura de acuerdo con diseños curriculares, los textos de matemática que son utilizados en la escuela, las interacciones profesor – alumno que se realizan en el escenario escolar con la finalidad de construir el conocimiento, el uso de recursos didácticos y las interacciones entre alumnos que permiten socializar los aprendizajes. Todos estos factores hacen que ciertos aspectos del discurso matemático escolar parezcan inmutables, modelados a partir de posturas personales e institucionales. Es posible detectar rasgos comunes de tipo conceptual o que corresponden al enfoque didáctico y la organización del saber que caracterizan al discurso matemático escolar de un escenario determinado.

La socioepistemología viene proponiendo a través de sus investigaciones un cambio del discurso matemático escolar que permita a los estudiantes adquirir significatividad para los conocimientos que construyen. Para ello propone reflexionar acerca de la componente social y su papel en la construcción del conocimiento matemático y fijar la atención entre factores y recursos, entre ellos los tecnológicos, que influyen en la construcción y comunicación del conocimiento que utilizan los estudiantes y en cómo incorporan elementos que construyen fuera de la escuela a sus actividades académicas escolares. Cabe preguntarse cuál es el papel que desempeñan los recursos tecnológicos dentro del discurso matemático escolar actual y, si no es posible a partir de un cambio en ellos, favorecer en los estudiantes la adquisición de significatividad de los conocimientos matemáticos que hemos mencionado.

En el aula se construye una cotidianidad en la que implícitamente se ponen en juego la posición epistemológica del profesor y sus creencias relacionadas con las actividades matemáticas que se implementan en el aula (Castañeda, 2009). A partir de los temas y la organización establecidos por los programas de estudio, es el profesor quien ajusta, organiza y prepara el saber a través de las actividades que propone a sus estudiantes. El tipo de discurso del profesor y el que adoptan los estudiantes en los momentos de socialización de la clase de matemática no son independientes. El tipo de recursos que se utilizan en el aula también forma parte de este proceso e influye en el discurso matemático escolar, interviniendo en la construcción del conocimiento y favoreciendo determinadas formas de argumentación relacionas con la manera en la que se los utiliza en las actividades planteadas en el aula.

## La tecnología desde la aproximación instrumental

Al referirnos a la tecnología y su relación con los actores involucrados, se denomina artefacto a algo (material o simbólico) susceptible de uso (Rabardel, 2011). Un artefacto junto con las habilidades del sujeto en su utilización, se convierte en un instrumento. Para lograrlo debe existir una relación significativa entre el artefacto y el usuario en relación a un tipo específico de actividad. El usuario asume el uso del artefacto como propio y hace corresponder las técnicas y los esquemas mentales que desarrolla mientras lo usa. En el aula, los artefactos se convierten en instrumentos para el pensamiento. El papel del profesor y de las actividades que propone son fundamentales para este proceso.

A través de la historia es posible identificar algunos momentos iniciales (Barceló, 2008) que fueron representativos de los avances tecnológicos que se constituyeron en artefactos:

- **1617:** Henry Briggs inventa los fundamentos de la Regla de cálculo sobre las ideas de John Napier
- **1623:** Wilhelm Schickard construyó la primera calculadora mecánica.
- **1643:** Blaise Pascal inventó un dispositivo de cálculo denominada máquina aritmética, más tarde conocido como Pascalina
- **1671:** Gottfried Wilhelm Leibniz inventó una máquina de multiplicar por suma iterada.
- **1835:** Charles Babbage diseña la máquina analítica.
- **1872:** Frank Baldwin inventó en los Estados Unidos la calculadora de rueda dentada.
- ***1885:*** William Seward Burroughs patentó la primera máquina que operada por teclas que permitía sumar y calcular (a diferencia de los diseños anteriores, que exigía operar palancas separadas) que incluía una impresora incorporada que comenzó a comercializarse en 1891 por la Burroughs Corporation, convirtiéndose en una de las principales compañías en el mercado de máquinas de contabilidad y computadoras.
- **1900-1960:** las calculadoras mecánicas dominaron el mercado de computación de escritorio.
- **1975:** Se diseñó software que permite procesamiento numérico de manera accesible. Aparecieron las calculadoras de escritorio
- **1980:** Surgieron las calculadoras programables.
- **1985:** Las calculadoras graficadoras fueron puestas a la venta.
- **1995:** Se diseñaron las calculadoras simbólicas.

No es tan claro determinar cuándo cada uno de estos artefactos se transformó en instrumentos para el aula de matemática. Sin lugar a dudas, podría decirse que no fue sencilla su introducción y asimilación en el discurso matemático escolar.

En un principio, la presencia de las calculadoras en la escuela fue muy cuestionada, ya que se consideraba que atentaban contra la adquisición de conocimientos matemáticos. Se han establecido fuertes debates en torno a las presuntas consecuencias negativas que su uso puede ocasionar en el aprendizaje y también sobre cuál es la edad más adecuada para iniciar a los alumnos en su uso y de qué manera.

Algunas investigaciones proporcionan contraejemplos en relación a la creencia popular de una relación antagónica entre el uso de la calculadora y el desarrollo del cálculo mental. Del Puerto y Minnaard (2002, p. 169), afirman que el uso de la calculadora promueve que:

- Los alumnos generen información acerca de un problema dado.
- Organicen dicha información a través del uso de la calculadora.
- Exploren patrones con esta información.
- Realicen conjeturas acerca de los patrones.
- Usen la calculadora como apoyo en la evaluación y modifiquen estrategias.
- Saquen partido del error para ensayar otras estrategias.
- Utilicen cálculos mentales.

Cuestionamientos similares se realizaron en torno a las computadoras y su utilización en el aula. Entre los factores que han influido a su incorporación, pueden mencionarse la liberación del trabajo requerido para realizar cálculos repetitivos y largos que no aportan al conocimiento de la disciplina, su aplicación a la verificación de resultados en la ejercitación y la motivación para las actividades de aula, sobre todo en la escuela secundaria.

Convertir un artefacto en instrumento, implica, indudablemente, el uso inteligente del mismo. No sirve que se reproduzca en la computadora lo que puede anotarse fácilmente en el pizarrón. El recurso tecnológico debe ser entendido como parte de uno, su utilización debe ser realizada de manera natural, sin que el alumno esté sintiendo que su uso es forzado. Tampoco tiene que ser un fin en sí mismo. Por ejemplo: el lápiz fue en determinado momento un artefacto. Hoy lo utilizamos naturalmente para escribir algo, para hacer una anotación, etc. Lo mismo ocurre con el compás si se requiere trazar una circunferencia en la clase de geometría: su presencia en el discurso matemático escolar como instrumento es incuestionable.

En las aulas “las prácticas sociales de cómputo se han modificado” (Trouche, p.12) en los últimos tiempos. Las calculadoras, ya están presentes como instrumentos en el discurso matemático escolar. Las computadoras, en muchos casos, también. En distintos países se han implementado planes de incorporación de netbooks en las aulas basados en políticas de inclusión de TIC y el reconocimiento de su uso como derecho (Borba y Penteado, citado por Villarreal, 2004). Sin embargo, en muchas oportunidades se trata de artefactos que no alcanzaron el status de instrumento en las aulas, no lográndose un verdadero aprovechamiento de los recursos disponibles. A veces, se concibe la presencia de la máquina no como la posibilidad de acceder al complejo mundo de las tecnologías de la información y la comunicación, sino básicamente como un elemento exógeno que irrumpe la rutina dentro del aula. Es considerada fundamentalmente como una herramienta que tiene programas en su interior y que más allá de los discursos, todavía no encuentra su sentido pedagógico y menos aún, la posibilidad de generar algún cambio positivo a partir de su inclusión dado que prevalecen las dificultades de orden técnico (bloqueos, roturas, falta de conectividad externa) que sumadas al desconocimiento inicial acerca de cómo superarlas, provocaban frustración y resistencia (Sternschein, 2018, 128).

En estos casos, es claro que no se ha logrado su integración en el discurso matemático escolar. Esa presencia como “elemento exógeno” atenta contra su utilización como instrumento en el aula.

Existe otro recurso tecnológico cuya presencia en la sociedad es cada día mayor: el teléfono celular. En escenarios no académicos son utilizados como instrumentos en actividades relacionadas con numerosas prácticas sociales, más allá de una llamada telefónica. En el aula, en cambio, se prohíbe su uso, desconociéndose su potencial.

El teléfono celular puede pasar a ser un recurso didáctico que se suma y complementa los tradicionales. Las potencialidades didácticas se basan, en líneas generales, en el uso masivo de estos dispositivos por parte de los estudiantes. Existen múltiples razones para utilizar los dispositivos móviles en la escuela, tales como el reconocimiento de la importancia del uso de tecnología familiar y cotidiana en el contexto escolar (Orozco Martínez, 2011), permitiendo subsanar la desconexión digital (Kolb, 2008) entre la forma en que los estudiantes usan la tecnología para su comunicación cotidiana y como la utilizan en el aula.

## Algunas actividades orientadas al uso inteligente de los recursos tecnológicos.

A continuación se describen algunas experiencias realizadas en el Profesorado de Matemática mediante el planteo de actividades de las asignaturas Análisis Matemático I y Análisis Matemático II en cuyas resoluciones se permitió y promovió a los estudiantes la utilización de recursos tecnológicos.

Los alumnos no tienen indicaciones acerca de cuáles son los recursos a utilizar, pueden decidir cuáles utilizan y en qué momento. Las actividades descriptas aprovechan los graficadores y otros programas para funciones de una o más variables.

**1. Sobre dominios de funciones de una variable.**

Cuando se propone determinar el dominio de una función, en Análisis Matemático I, se plantea a los alumnos:

**a. Obtenga el dominio de la siguiente función:**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

**b. Compruebe gráficamente su respuesta.**

La Figura 1 muestra la gráfica obtenida por los alumnos mediante un graficador. Los estudiantes carecen de herramientas conceptuales para realizar una gráfica puesto que este tema forma parte de la introducción a la materia.

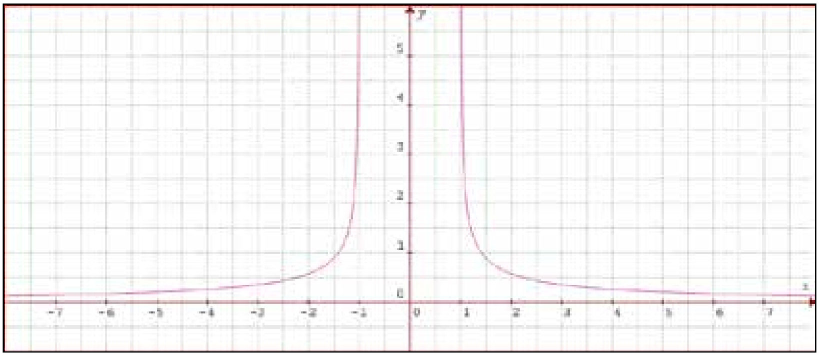

***Figura 1.*** *Gráfica de la función* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

La utilización de un graficador permite realizar una comprobación gráfica de la respuesta que darían realizando el cálculo correspondiente de la determinación de su dominio. En este caso,

$$Dom_f = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$$

A partir de la observación de la gráfica es posible la verificación de los cálculos que hayan realizado y comprender su significado por medio de la visualización.

Otra posibilidad consiste en invertir el orden de las consignas y proponer:

**a. A partir de la gráfica de la función** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ **, indique cuál es su dominio.**

**b. Compruebe analíticamente su respuesta.**

En este caso, los alumnos deberán hacer uso de un graficador y realizar una conjetura para responder a la primera consigna y posteriormente realizar los cálculos correspondientes. La conjetura que realicen será puesta a prueba para ser confirmada o refutada. De esta manera los estudiantes comprenden la importancia de poner a prueba sus conjeturas y el valor de las respuestas que se obtienen realizando los cálculos adecuados.

## 2. Sobre el estudio completo de una función

Un problema clásico en el discurso matemático escolar actual de Análisis Matemático I es:

Realice el estudio completo de la función:

$$f(x)=\frac{x}{\ln x}$$

Estas actividades, suelen culminar con la obtención de la gráfica cartesiana de la función en la que se vuelcan todos los elementos que se han determinado previamente: dominio, extremos relativos o locales de la función, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos de inflexión, intervalos de concavidad y convexidad, asíntotas, etc.

Para la determinación del dominio, debe considerarse que el argumento del logaritmo debe ser positivo y que el denominador no debe anularse. A partir del cálculo se llega a la conclusión que:

$$Dom_f = (0,1) \cup (1+\infty)$$

Puede escribirse también: $Dom_f = (0+\infty)-\{1\}$

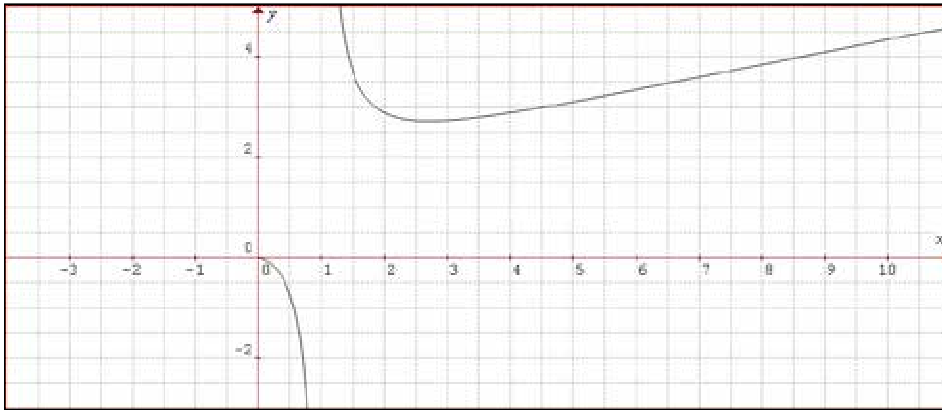


***Figura 2.*** *Gráfica de la función* $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

En clase se planteó la consigna anterior, promoviendo el uso de un graficador, haciendo hincapié en el registro de las conjeturas que realizaron y las maneras en las que las confirmaron o refutaron. Los alumnos no se encontraban en el laboratorio de informática, por lo que debieron recurrir a sus teléfonos celulares. Esta práctica no es un escollo porque los estudiantes disponen de dispositivos con los recursos necesarios en la clase de matemática.

Al trabajar en grupos colegiados se produjeron interesantes discusiones en el aula. Los alumnos determinaron el dominio de la función a partir de la gráfica. Comprobaron que no está definida para valores negativos de la variable independiente, ni en el valor 1.

Los estudiantes manifestaron casi en forma unánime que la función poseía una asíntota oblicua. Percibieron, además, que existe un mínimo local o relativo. En algunos grupos utilizaron el zoom del graficador para agrandar o achicar la escala o buscar algunas características adicionales de la gráfica antes de realizar cálculos. A continuación, a partir del cálculo algebraico, llegaron a la conclusión que no hay asíntota oblicua, a pesar de que inicialmente así lo habían afirmado. Obtuvieron las coordenadas del mínimo relativo y lo corroboraron con la gráfica. Verificaron la existencia de una asíntota vertical en x=1.

Si reflexionamos a partir de esta experiencia, acerca de las ventajas y desventajas de graficar la función antes de realizar su estudio completo, vemos que, evidentemente, la gráfica cartesiana no sería el producto final, pero la riqueza de la discusión generada en el aula y la utilización de los cálculos matemáticos para analizar la validez de las conjeturas que los mismos alumnos formularon muestran un uso conveniente de graficadores en el estudio completo de funciones.

Si durante las clases se permite el uso de graficadores, ¿estaría vedado su uso en las evaluaciones? La utilización del graficador como un instrumento en el aula, hace que también tenga que estar disponible durante la evaluación. Por lo tanto, se hace necesario repensar el tipo de actividades que se plantean en las evaluaciones, para que siga siendo utilizado como un instrumento.

## 3. Sobre el cálculo de límites

Si se propone el siguiente ejercicio:

Calcule: $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

Con técnicas de cálculo, los alumnos comprueban que: $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Si en este caso, los alumnos realizan el gráfico cartesiano de la función $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ la Figura 3 muestra qué obtienen.


***Figura 3.*** *Gráfica de la función* $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

No puede percibirse a partir de esta gráfica que la función potencial – exponencial tiene una discontinuidad en el punto (0, e). Sin embargo, haciendo uso del concepto de límite de una función, los estudiantes conjeturan que la ordenada de ese punto es un valor entre 2 y 3, pero a menos que realicen el cálculo, no es posible obtener el resultado.

El uso del graficador debe ser significativo para el alumno. Debe ser comprendido como un instrumento útil en el aula de matemática, pero que por sí solo no es suficiente. La actividad didáctica planteada por el profesor debe tener coherencia interna e intencionalidad didáctica, debe orientarse a que los estudiantes resignifiquen los contenidos matemáticos estudiados. En este ejemplo se comprueba la ventaja del gráfico pensando que los límites se calculan en puntos donde la función no está definida.

El gráfico no reemplaza a la discusión en clase sobre el estudio de funciones, genera una serie de situaciones que deben ser aprovechadas para enriquecer la clase y para hacer que los alumnos utilicen de manera inteligente y crítica los recursos tecnológicos de los que disponen.

## 4. Sobre el cálculo de integrales definidas

Se plantea a los estudiantes:

***Calcule el área de la superficie encerrada por la curva:*** $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

***y la recta que une los puntos: (-1, -2) y (2, 1)***

Para la determinación del área, es necesario calcular una integral definida. Previamente deben representarse ambas funciones para ubicar el recinto de integración.

Con el graficador puede realizarse esto (Figura 4), sin embargo, el alumno debe corroborarlo con el cálculo a los efectos de determinar los límites de integración aunque es posible que conjeture cuáles son.

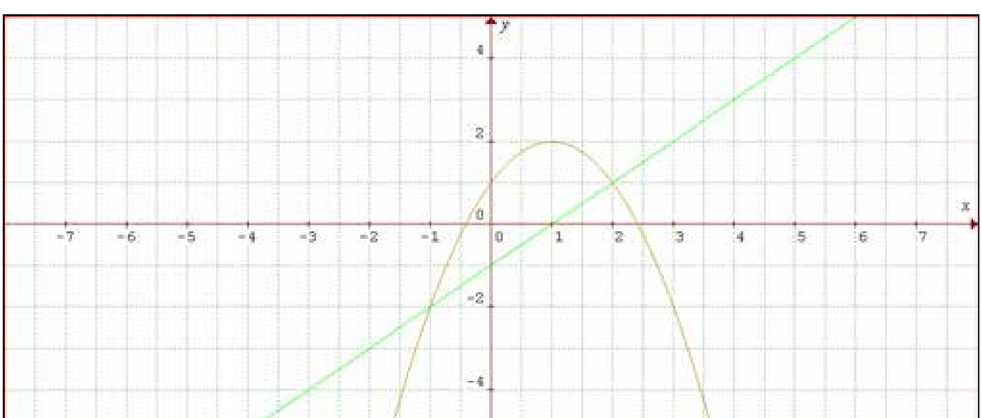


***Figura 4.*** *Gráfica de las funciones* $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = x - 1$

La integral definida no ofrece dificultades: $\int_{-1}^{2}[(-x^2+2x+1)-(x-1)]dx$

En este caso, el graficador es utilizado simplemente para agilizar la descripción del recinto.

## 5. Sobre la aplicación de integrales definidas

Calcule la longitud del arco de curva de la función f si:

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

$$f(x) = \ln[\cos(x)]$$

La Figura 5 muestra la gráfica que se obtiene con un graficador.

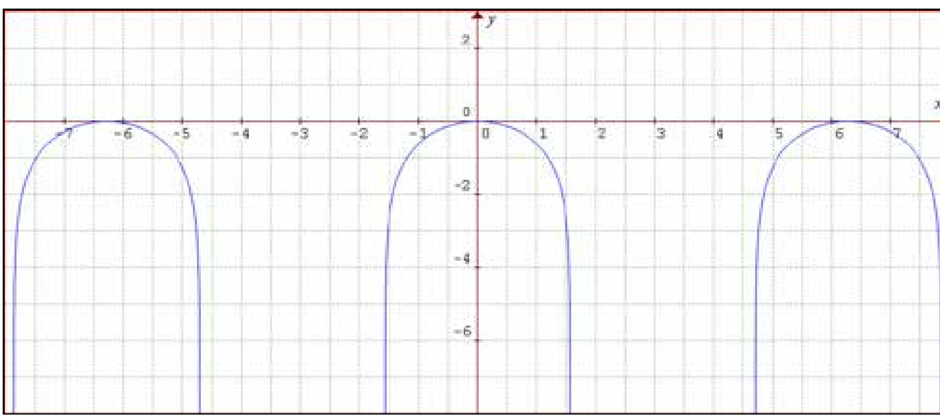


***Figura 5.*** *Gráfica de la función* $f(x) = \ln[\cos(x)]$

Puede ocurrir que los alumnos no adviertan que la función es periódica aunque no es significativo para la consigna del problema.

Se elige esa función para facilitar la resolución de la integral correspondiente.

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Realizando los cálculos, se obtiene:

$$f(x) = \ln[\cos(x)]$$
$$f'(x) = -tg(x)$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + tg^2(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(x)dx$$

Si los estudiantes contrastan los resultados obtenidos mediante cálculo con los obtenidos a partir de algún utilitario que permita obtener la primitiva, se generará una discusión interesante que permite, una vez más, entender que el uso de la herramienta informática no es la panacea universal. En efecto,

Mediante el cálculo: $\int \sec(x)dx = \ln\left|\sec(x) + tg(x)\right|$

En la figura 6 se ve una captura de pantalla del programa de cálculo de la primitiva.

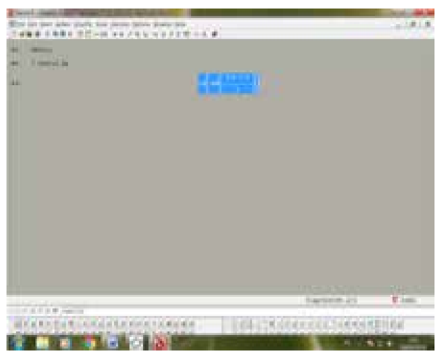

***Figura 6.*** *captura de pantalla del programa de cálculo de la primitiva de f(x)=sec(x)*

Esta situación en particular se dio en clase mientras los alumnos trabajaban en grupo, lo que generó una interesante discusión hasta que encontraron la manera de verificar que ambas expresiones eran equivalentes. Entre los resultados obtenidos hubo propuestas de aplicar equivalencias trigonométricas y de derivar ambas expresiones para comprobar si eran o no equivalentes.

De todas formas, el uso de algún programa de cálculo de integrales definidas permite obtener el resultado en forma directa. Sin embargo, las propuestas deben pensarse para que los alumnos comprendan la importancia de las distintas herramientas y las aprovechen. En este ejemplo era necesario el cálculo de la primitiva para la posterior aplicación de la regla de Barrow. Al efectuar la diferencia entre los valores que toma la primitiva en el extremo superior y el inferior se obtiene el mismo resultado utilizando cualesquiera de las expresiones obtenidas; de esta manera se comprueba su equivalencia. Es importante que se realicen estas comprobaciones en clase.

## 6. Sobre integrales múltiples y sus aplicaciones

Una de las mayores dificultades que presentan los alumnos en el cálculo de integrales dobles o triples es visualizar el recinto de integración en el espacio. El cálculo de un volumen puede efectuarse a partir de una de las integrales nombradas. En ambos casos debe conocerse la o las ecuaciones de los campos escalares que lo limitan.

En efecto, como integral doble: $\iint\limits_D F(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)dy\right]dx$

o bien $\iint\limits_D F(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{f(y)}^{g(y)} F(x,y)dx\right]dy$

considerando, en este caso, los límites de integración de acuerdo con el recinto D, proyección del sólido cuyo volumen quiere calcularse sobre el plano xy. Pueden plantearse la proyección sobre los otros planos coordenados según las características de tal volumen.

También, como integral triple: $\iiint\limits_V dxdydz = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \int_{F(x,y)}^{G(x,y)} dzdydx$

En este caso, el integrando es el campo escalar de tres variables F (x,y,z)=1 y se determinan los límites de integración sobre la base del sólido cuyo volumen quiere determinarse. Habría hasta seis variantes posibles en cuanto al orden de integración teniendo presente las características del recinto. En ambos casos se han considerado coordenadas cartesianas rectangulares aunque se sugiere el sistema más adecuado para simplificar los cálculos.

Calcule el volumen limitado por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 8 - x^2 - y^2$

El alumno debe encontrar la proyección conveniente del recinto sobre alguno de los planos coordenados (en este caso el plano xy) y determinar los límites de integración justificando analíticamente. Sin embargo, el gráfico de ambas superficies permite visualizar y proceder en consecuencia.

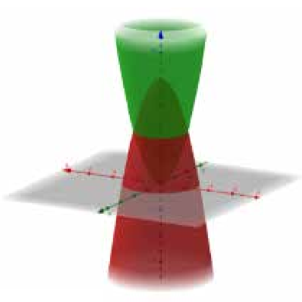

***Figura 7***

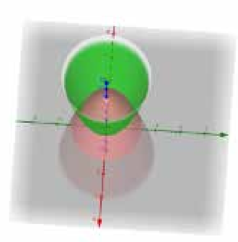

***Figura 8***

Los programas permiten la visualización desde diferentes ángulos (figuras 7 y 8), lo cual contribuye a que el estudiante perciba claramente cuáles son las superficies y su intersección.

Mediante el cálculo y un cambio de coordenadas adecuado se resuelve el problema. Puede recurrirse a alguno de los utilitarios a tal fin. No obstante es importante aclarar que el planteo del problema depende pura y exclusivamente del alumno y que, la herramienta informática, tiene un valor inestimable para permitir la visualización y verificación de cálculos que podrían ser tediosos. Los errores de cálculo son habituales y pueden subsanarse mediante el uso de la computadora o el celular.

$$V = 4\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\rho^2}^{8-\rho^2} \rho.d\rho.d\varphi.dz$$

Se aprovechó la simetría del sólido, se realizó el cambio de coordenadas pertinente y se efectuó el cálculo. Téngase en cuenta que se consideró al círculo centrado en el origen de coordenadas y radio 2 para determinar los límites de integración.

La ventaja de disponer de un graficador y un programa para efectuar los cálculos correspondientes es inestimable.

## COMENTAROS FINALES

En los ejemplos anteriores, se ha podido observar que es sencillo lograr una motivación del uso del recurso tecnológico en el aula de matemática, ya que como los estudiantes viven en escenarios socioculturales en los que la tecnología es cotidiana, para ellos es un instrumento. Su aprovechamiento como tal en las aulas, requiere un replanteo sobre las actividades propuestas, sobre qué se evalúa y cómo se confecciona el examen.

Si el alumno no maneja los conceptos matemáticos, si no se preparó debidamente para la evaluación, las facilidades que le ofrece la tecnología no le son útiles, ya que no puede conjeturar adecuadamente y si lo hace, no le es posible validarlo.

Si el estudiante no dispone de teléfono celular, podría alegarse que queda excluido de este tipo de discusiones. Sin embargo, como la propuesta no es utilizar este recurso como central en el aula, sino como un instrumento, dispondrá de otros instrumentos con los que habrá trabajado como tales previamente. Con este tipo de actividades se promueve el trabajo colaborativo y colegiado, favoreciendo en los estudiantes las discusiones y acuerdos en grupo.

El surgimiento de software aplicable al aula de matemática y su incorporación sin exigir el uso de alguno determinado, hace que los estudiantes deban indagar acerca de cuáles les resultan más adecuados a su forma de trabajo, cuáles son los que realmente van instaurándose como instrumentos para cada uno de ellos. Exige que sea el profesor de matemática quien presente conceptos de la matemática apoyándose en el uso de tecnología, pero dejando libertad para su elección.

El planteo de distinto tipo de actividades, algunas de las cuales se apartan de las clásicas porque requieren que el producto final sea otro, no significa que la tecnología reemplace a la matemática, sino por el contrario, necesita el conocimiento y manejo de conceptos matemáticos para poder argumentar adecuadamente buscando de qué manera la matemática otorga elementos para dar respuesta a preguntas e hipótesis.

En los ejemplos presentados, es posible ver cómo los alumnos conjeturan, ponen a prueba, argumentan, investigan, visualizan, a partir de las gráficas obtenidas y con los elementos que observan. Se trata de ejemplos que promueven el descubrimiento y la reflexión en la clase de matemática, permitiendo ir "más allá" de los procedimientos rutinarios y favoreciendo procesos de visualización en la construcción del conocimiento matemático. Complementan y amplían los objetivos de la enseñanza tradicional y permiten enfoques inductivo y experimental que favorece la construcción de conceptos matemáticos. Los estudiantes descubren relaciones matemáticas de manera más rápida y eficaz resignificando los conceptos matemáticos al encontrarles su utilidad en la argumentación.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barceló, M. (2008). *Una historia de la informática.* El Ciervo 96, Barcelona:

Briceño, E.; Cordero, F. (2008). *El uso de las gráficas bajo una perspectiva instrumental. Un estudio socioepistemológico.* En P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22. 1 217-1226. Clame, México.

Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7(2), 33-115.

Castañeda, A. (2009). *Aspectos que fundamentan el análisis del discurso matemático escolar.* P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 22, 1379-1390. Clame, México.

Castañeda, A.; Rosas, A.; Molina, G. (2010). *El discurso matemático escolar de los logaritmos en los libros de texto. Premisa*, 12(44), 3-18.

Del Puerto, S.; Minnaard, C. (2002). *La calculadora como recurso didáctico.* En C Barcelo i Vidal (Ed.), *Homenatge al professor L. A. Santaló*, 165-175. Universidad De Girona.

Farfán, R. M. (2003). *Matemática Educativa: un camino de filiaciones y rupturas.* En J. R. Delgado Rubí (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 16(1). 5-10. Ediciones Lorena, Santiago de Chile:

Kolb, L. (2008). *Toys to Tools: Connecting Student cell phones to educations.* Oregon: International Society for Technology in Education.

Lezama. J. (2005). *Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8 (3), 339-362.

Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos.* Ediciones Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada IPN, México.

Orozco Martínez, J. (2011). *El uso del teléfono celular como recurso didáctico en el aula para el tema Álgebra Vectorial enfocada a la Física.* Tesis de maestría no publicada. México: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.

Sternschein, N. (2016). T*ransformaciones a partir de la implementación de los programas de acceso en el ámbito escolar.* Tesis de Magíster no publicada. Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires.

Trouche, L. (2005). Calculators in mathematics education: a rapid evolution of tools, with differential effects. En D. Guin, K. Ruthven, y L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument*, 9-40. Springer.

Tuyub, I.; Cantoral, R. (2007). *Las prácticas sociales como base del conocimiento en toxicólogos. Un modelo.* En G. Montiel (Ed.), *Memorias de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 141–153. Red Cimates: Mérida, Yucatán, México.

Villarreal, M. (2004). *Transformaciones que las tecnologías de la información y la comunicación traen para la educación matemática. Yupana*, 1(4), 41-55.