

PROPUESTA TEÓRICO-DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DEL ÁREA

**Armando Morales Carballo, José Efrén
Marmolejo Valle, Bernardo Ríos Parra y
Angie Damián Mojica**

Universidad Autónoma de Guerrero, México

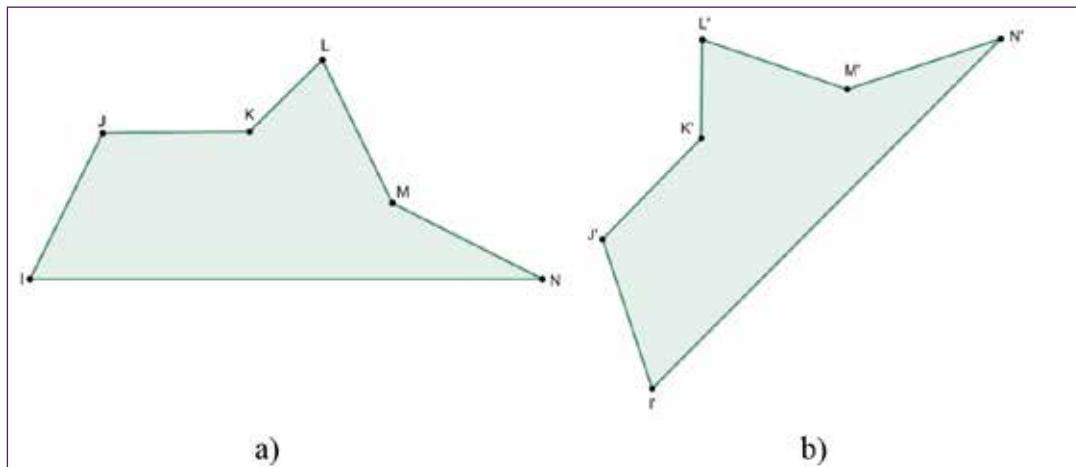
armando280@hotmail.com, jmarmolejov@uagrovirtual.mx,
b2io5p@yahoo.com.mx, big_angie@hotmail.com

RESUMEN	ABSTRACT
<p>Se describe una propuesta teórico-didáctica para la planeación de enseñanza del concepto de área de polígonos simples en el preuniversitario. En ella se presentan dos trayectorias hipotéticas de aprendizaje, la primera se basa en procesos de conteo para inducir la fórmula de Pick para determinar la medida de áreas y la segunda, en el método griego y en el uso de las transformaciones isométricas, ambos procesos fueron mediados por el uso del software GeoGebra. Con este trabajo se aportan elementos didácticos que favorecen la elaboración de actividades para el tratamiento del concepto de área para polígonos simples en posición no estándar.</p>	<p>A theoretical-didactic proposal for the planning of teaching of the concept of area of simple polygons in the preuniversity is described. It presents two hypothetical learning trajectories, the first is based on counting processes to induce the Pick formula to determine the measurement of areas and the second, in the Greek method and in the use of isometric transformations, both processes were mediated by the use of GeoGebra software. This work provides didactic elements that favor the development of activities for the treatment of the concept of area for simple polygons in a non-standard position.</p>
PALABRAS CLAVE:	KEYWORDS:
Propuesta didáctica, recurso heurístico, inducción, polígono simple, transformación isométrica	Didactic proposal, heuristic resource, induction, simple polygon, isometric transformation

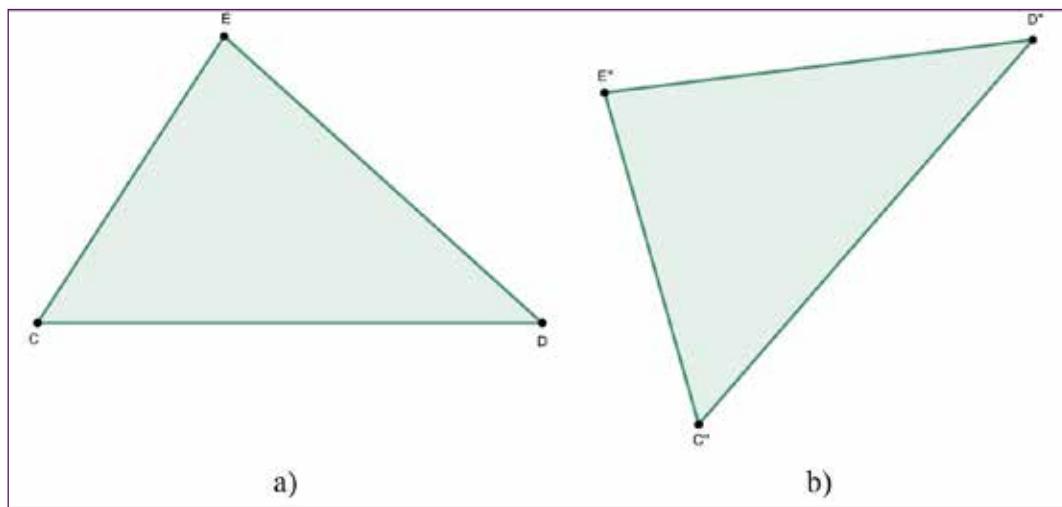
INTRODUCCIÓN

El concepto de área de figuras planas, es un contenido importante dentro del sistema de contenidos propuestos en los planes y programas de estudios de enseñanza-aprendizaje de la matemática en los niveles básico, preuniversitario y universitario en carreras de Matemáticas principalmente.

Recientemente, se trabajó con un grupo de treinta estudiantes de primer grado de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México, la asesoría versó sobre tópicos de elementos de geometría, posteriormente, se les aplicó a los alumnos un sistema de actividades sobre la noción y determinación de la medida del área (una actividad que en el ciclo escolar anterior fue aplicada a un grupo de nueve estudiantes del preuniversitario), luego de la aplicación se identificó lo siguiente: veintiún estudiantes de los treinta que conformaron el grupo presentaron dificultades para determinar la medida del área de un polígono irregular, ver Figura 1(b); sólo a groso modo establecieron la manera de hacerlo cuando uno de sus lados es paralelo al eje horizontal, ver Figura 1(a).

*Figura 1. Fuente: Elaboración propia*

Con la intención de indagar sobre esta dificultad, se les preguntó a este grupo de estudiantes sobre cómo determinar la medida del área de un triángulo, y al respecto, se corroboró en ellos que la dificultad manifestada en el caso anterior, prevalece en el caso de triángulos. En el inciso a) de la Figura 2 se presenta el caso de un triángulo en el que uno de sus lados es horizontal y para este caso los estudiantes pudieron determinar la medida del área, no así para los triángulos como el caso b) de la Figura 2.

*Figura 2. Fuente: Elaboración propia*

Esta dificultad pone de manifiesto la necesidad de orientar elaboraciones didácticas para el tratamiento conceptual en general de los contenidos de la matemática que se imparte en todos los niveles educativos, en particular del concepto de área. De este concepto se requiere como actividades fundamentales para favorecer los procesos de asimilación: la operación, la construcción y definición y la aplicación del concepto; en este último se considera necesario el tratamiento del área de figuras planas en las posiciones estándar y no estándar, y en el estudio de problemas en particular geométricos y de aplicación de la matemática que impliquen la inducción y deducción de la utilidad del concepto, las fórmulas para su determinación que se usan en los niveles educativos de secundaria a superior, actividades de operación y relación en la enseñanza del concepto.

Importancia del concepto de área desde las investigaciones en educación matemática. En torno al concepto de área y perímetro se han realizado diversas investigaciones y se han centrado en el estudio de estos conceptos desde las edades tempranas (nivel primaria), en ese nivel se han documentado algunos errores, dentro de ellos se ha identificado que los alumnos piensan que el área y perímetro son lo mismo y no identifican que para una misma área hay una infinidad de perímetros y viceversa, estos errores imposibilitan a los alumnos avanzar en los procesos de comprensión de estos conceptos (Wahyu, Maghfirotun, Lukito y Van, 2012; González, Santa y Londoño, 2013). En la investigación que reportan D'amore y Fandiño (2007), sustentan que el obstáculo que se opone a la construcción de un conocimiento sobre la relación entre el área y el perímetro es de naturaleza didáctica, justifican además, que algunas de las razones radican en que se usan siempre figuras convexas, figuras estándar, hay ausencia de la atención a las relaciones entre el área y el perímetro y ausencia del tratamiento de las transformaciones, entre otras.

Otros trabajos en esta dirección señalan la importancia del estudio del área desde los niveles primaria a universitario, y coinciden en la búsqueda de estrategias y alternativas para la atención a los procesos de comprensión, y la aplicación del concepto a la resolución de problemas (García, 2013; López, Silva y Fuentes, 2013; Marmolejo y González, 2015).

ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

Tratamiento de los conceptos. Los conceptos son parte de la estructura matemática y juegan un papel fundamental en el desarrollo del conocimiento matemático y en la explicación de la realidad objetiva (Ballester, 1992). Gran parte de las dificultades sobre la comprensión de los contenidos matemáticos que se documentan en las investigaciones radica en la ausencia del tratamiento de los conceptos. Este trabajo tiene su fundamento en los procesos de asimilación de los conceptos, y de manera particular, atendemos una de las operaciones conceptuales: la determinación de la medida del área de un polígono simple.

En relación a los procesos de asimilación de los conceptos, Morales (2013) establece que para la asimilación se deben cumplir las siguientes etapas: *Aproximación al concepto*. En esta etapa se reconoce el concepto a nivel intuitivo en sus distintas representaciones, es necesario operar con él a fin de diferenciarlo con otros conceptos sobre objetos matemáticos. *Formalización del concepto*. La formalización del concepto abarca las bases de la fase anterior, y esencialmente está encaminada a favorecer el proceso de formación y definición del concepto, por ello, metodológicamente; se consideran: la aproximación, la formalización, la valoración y el control como etapas fundamentales de la propuesta, y dentro ellas se desarrollan dos trayectorias hipotéticas de aprendizaje del concepto de área. *Identificación del concepto*. En esta fase se identifica la vía para determinar la medida del área de un polígono simple a través de las trayectorias hipotéticas planteadas. *Aplicación del concepto*. Se describe el proceso a seguir para determinar la medida del área, se aplican las fórmulas clásicas.

En cada una de las etapas del proceso de asimilación los procedimientos heurísticos son una herramienta fundamental ya que constituyen recursos mentales de búsqueda que permiten orientar y aportar elementos en los procesos de comprensión y determinación del concepto sobre la base de resolución de problemas (Torres, 2013). Según el autor, los procedimientos heurísticos se clasifican en principios, reglas y estrategias las cuales interactúan durante los procesos de búsqueda, elaboración y aplicación de la vía de solución. Así, los principios heurísticos constituyen sugerencias para encontrar directamente la idea de solución principal de resolución; además posibilita determinar, por tanto, los medios y la vía de solución. Dentro de estos principios heurísticos se identifican: la analogía, reducción e inducción (Müller, 1997). La estrategia que se expone aquí, utilizará la inducción como un principio necesario para la generalización de la determinación de medidas de área de polígonos simples, siguiendo dos trayectorias hipotéticas de aprendizaje.

Las reglas heurísticas actúan como impulsos generales dentro del proceso de búsqueda y ayudan a encontrar, especialmente, los medios para resolver el problema. A este respecto Müller (como se citó en Torres, 2013) clasifica las reglas heurísticas en generales y especiales. Las reglas generales son: Si tienes que demostrar la igualdad de longitudes o amplitudes, trata de encontrar triángulos iguales que contengan esos segmentos o ángulos homólogos. Si la figura buscada no te conduce inmediatamente al resultado deseado, trata de obtener, mediante líneas auxiliares, figuras que sean fáciles de construir.

Algunas reglas especiales son: El método de lugares geométricos, consistente en determinar al menos dos conjuntos de puntos a los que pertenece el punto buscado y determinar la intersección de ambos conjuntos. El método de las transformaciones geométricas que radica en construir una figura que cumpla parcialmente con las condiciones exigidas y después obtener la figura de interés mediante una transformación geométrica.

Las estrategias heurísticas se comportan como recursos organizativos del proceso de resolución y contribuyen a determinar la vía de solución de la situación abordada. Por ejemplo, el trabajo hacia adelante y el trabajo hacia atrás. El trabajo hacia adelante parte de los datos hasta llegar a la solución de

la situación, el trabajo hacia atrás se examina lo que se busca y con el conocimiento actual se analizan posibles resultados intermedios de lo que se puede deducir lo buscado.

Trayectorias hipotéticas de aprendizaje. Simón y Tzur (2004) identifican las principales características de la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje de la siguiente manera: una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) consiste en los objetivos para el aprendizaje de los estudiantes, las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje, y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje. En esta dirección, investigadores como (León, Díaz, y Guilombo, 2014) coinciden en que las THA refieren a las predicciones del profesor sobre el camino por el que el aprendizaje puede movilizarse, son hipotéticas debido a que las trayectorias reales del aprendizaje de los estudiantes dependen de las condiciones de existencia de cada individuo y en que el aprendizaje de los individuos tiene ciertas regularidades.

Las THA proporcionan al investigador un criterio racional para decidir el diseño que habrá de considerar y las conjeturas de cómo hacer evolucionar los aprendizajes. Las tareas se seleccionan con base en hipótesis acerca del proceso de aprendizaje; las hipótesis sobre este proceso de aprendizaje se basan en las tareas propuestas. Este constructo se fundamenta en los siguientes supuestos:

- 1. La construcción de una trayectoria hipotética de aprendizaje se basa en la comprensión del conocimiento actual de los estudiantes que recibirán la instrucción.
- 2. Una trayectoria hipotética de aprendizaje es el vehículo para planificar el aprendizaje de conceptos matemáticos.
- 3. Las tareas matemáticas proporcionan las herramientas para promover el aprendizaje de conceptos matemáticos concretos y, por lo tanto, son un elemento clave del proceso de instrucción.
- 4. Dada la naturaleza hipotética e inherentemente incierta de este proceso, el profesor se verá obligado a modificar sistemáticamente cada aspecto de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje 1 (THA1). Esta trayectoria está basada en el método del conteo, y se apoya en el uso del software para posibilitar mediante lo dinámico-visual las etapas de: acercamiento a la intuición del comportamiento de puntos en el interior, de la frontera y de la relación entre ellos para la medición del área, inducción de la fórmula de Pick y su aplicación en el cálculo de áreas, mediante el uso de las transformaciones isométricas del plano: traslación y rotación se llevan los triángulos a las posiciones estándar, y se contrasta a nivel teórico el resultado de este proceso con la aplicación de las fórmulas clásicas. En la última etapa se redescubre que la fórmula de Pick y las fórmulas clásicas para medir áreas de triángulos determinan la misma medida.

La THA describe la siguiente vía: Se divide en triángulos el polígono simple, en cada triángulo se aplica la fórmula de Pick, mediante la traslación y rotación se lleva a la posición estándar cada triángulo, y se posibilita la aplicación de la fórmula clásica “la mitad de la base por la altura”, este proceso

favorece el significado y comprensión de los conceptos asociados y el de las fórmulas clásicas. Como actividades de fijación se motiva a la prueba matemática, basada en el conocimiento de la fórmula para determinar el área del rectángulo. En primera instancia se plantea la determinación y justificación del proceso para medir el área de un triángulo rectángulo y posteriormente para un triángulo cualquiera; en este caso se ponen en juego la fórmula para medir el área de un rectángulo y el uso del teorema de Pitágoras, finalmente, se propone analizar y justificar la siguiente propiedad: Dadas dos paralelas y , si en y se fijan dos puntos y un tercer punto móvil en y . Con la información dada se construye el triángulo, al mover el punto en y se forman una infinidad de triángulos y sin embargo, se demuestra que el área permanece constante.

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje 2(THA2). Esta trayectoria está basada en el método de los griegos acerca de la cuadratura. Luego del estudio de la cuadratura de un rectángulo, de la transformación de un rectángulo y de manera general de un cuadrilátero a un triángulo manteniendo la medida de sus área, se usa aquí el método para transformar un polígono simple a un triángulo de área equivalente mediante el uso de la geometría dinámica que posibilita el software GeoGebra, y mediante el uso de las transformaciones: traslación y rotación se lleva la figura final a la posición estándar, posición en la cual es aplicable de manera sencilla la fórmula clásica, y finalmente la determinación de la medida del área del polígono original.

El software como recurso heurístico en la actividad de enseñanza y aprendizaje de la Geometría.

Los problemas de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en los distintos niveles han motivado tanto a investigadores como a docentes hacia la búsqueda de nuevas herramientas para incidir en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la disciplina. Las tendencias actuales sobre la enseñanza de la Matemática han destacado la importancia del uso de la tecnología educativa como una herramienta que favorece dichos procesos.

Investigadores como (Marmolejo y Campos, 2012; Arango, Gavirria y Valencia, 2015) resaltan la importancia de incorporar el uso de las tecnologías en el trabajo en el aula, ya que estos recursos permiten a los alumnos explorar otros ambientes que favorecen la resolución de las actividades de enseñanza que se les proponen y que, con sólo el uso del lápiz y papel, la información de los libros de texto, notas de clase, entre otros, les sería difícil de obtenerlas.

Morales, Locia y Marmolejo (2014) y Morales, Locia y Salmerón (2016) señalan que el software GeoGebra es un recurso heurístico que permite, vía la visualización y manipulación identificar patrones de comportamientos, propiedades y relaciones entre los objetos matemáticos. Destacan además, que se favorecen los procedimientos heurísticos de analogía, reducción, inducción y generalización. Estas conclusiones fueron identificadas a partir del análisis de propuestas basadas en el software que los investigadores han realizado para el tratamiento de problemas relativos a perímetros, áreas, sobre el concepto de mediana y del estudio de las transformaciones de traslación y rotación en la enseñanza de la geometría en el preuniversitario.

Elementos matemáticos. Los elementos matemáticos fundamentales que se consideran en la propuesta son: área, polígono simple, punto reticular, red reticular, red poligonal, fórmulas clásicas para medir áreas de figuras planas, fórmula de Pick, traslación, rotación, transformación geométrica.

PROPUESTA DIDÁCTICA

Se concibe que las propuestas didácticas son producto de elaboraciones más complejas como las llamadas metodologías. Sin embargo, las propuestas también pueden ser diseñadas en función de la perspectiva del profesor, del alumno, del plan de estudios y principalmente en función del contenido (Morales et al., 2014). En este sentido, es que se ha considerado una propuesta de carácter metodológico cuya característica principal es la de proveer un método de enseñanza, en el cual los procedimientos heurísticos favorezcan la inducción en el estudio del área de polígonos simples utilizando como herramienta principal el software GeoGebra. La propuesta didáctica consta de la siguientes etapas: Preparación de las condiciones del nivel de partida, identificación de condiciones para la inducción de la medida del área e inducción de la medida del área de polígonos simples, cada una de las fases juega un papel central en el desarrollo de dos trayectorias hipotéticas de aprendizaje que se han concebido: una a través de la inducción y generalización de la fórmula de Pick y otra basada en el método de los griegos; ambas trayectorias pretenden ser un acercamiento hacia la significación de área y la determinación de su medida.

Como parte de la fundamentación teórica del trabajo, se revisó en libros clásicos de geometría la descripción del método de los griegos para favorecer la transformación de un polígono simple a un triángulo de área equivalente y en torno a la fórmula de Pick, su uso en la determinación de áreas y su tratamiento; para ello, se revisaron los investigaciones reportadas en (Ramírez, 2010; Jiménez y Blancco, 2017; Verduzco, Briseño, Palmas, y Vázquez, 2000).

DISCUSIÓN Y RESULTADOS

Desarrollo de la THA1.

Etapa 1. Preparación de las condiciones del nivel de partida. En esta etapa, se propone la determinación de medida de áreas de figuras planas (triángulos y cuadriláteros) que tienen un lado horizontal, la actividad se lleva a cabo mediante el uso del software. El objetivo fundamental en esta etapa es que los alumnos visualicen la forma y posición de la figura de estudio, por otro lado, identifican las fórmulas en juego a partir del dato numérico que muestra el software. *En caso de que se manifiesten dificultades, se activará la cuadrícula y el sistema coordenado; a fin de apoyar la significación.*

Posterior a la descripción dada se propone mostrar en la vista gráfica del software una figura plana (triángulo o cuadrilátero) que cumple la siguiente condición: *ninguno de sus lados es paralelo al eje horizontal* y se pide determinar la medida de su área. Previo a indicar esta actividad se oculta la vista algebraica, por lo que de entrada, no se observa el dato numérico que indica la medida del área. Esta acción pretende orientar hacia el objetivo y motivación del por qué buscar otras formas para determinar la medida de áreas.

A partir del planteamiento anterior, se propone llevar a cabo las siguientes actividades utilizando el software: Se construye una trama con el uso del software. Una manera de hacerlo es con la instrucción de dobles secuencias, con la instrucción **Secuencia((p, q), p, 0, 6), q, 0, 6**) se construyó la trama que se muestra la Figura 3, cada punto de ella tiene componentes enteros.



Figura 3. Fuente: Elaboración propia

Se construye un triángulo mediante la instrucción Polígono sobre la trama con vértices en puntos de ella, a través de la instrucción Traslación y Vector se traslada el triángulo construido a la posición del triángulo como se observa en la Figura 4. Podrá observarse que mover un vértice del triángulo en la trama éste cae en otro punto de ella.

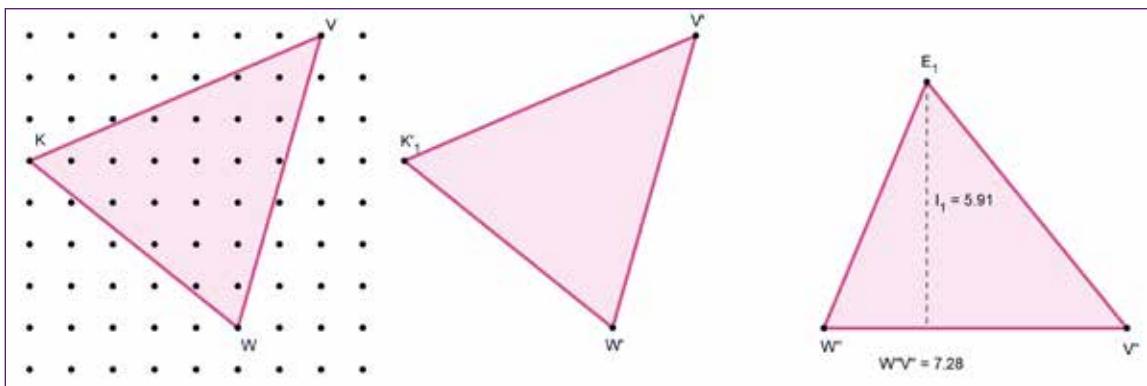


Figura 4. Fuente: Elaboración propia.

En la **Vista Algebraica** del software se identifica que en el caso particular la medida del área del triángulo es de 21.5 unidades cuadradas, este número corresponde también a la medida del área del triángulo , al utilizar la instrucción **Rotación** y traslación el triángulo se lleva a posición del triángulo cuya medida del área es de 21.5 unidades cuadradas pero dicha medida se determinó mediante la fórmula clásica “mitad del producto de la base con la altura”, luego de varios ensayos análogos al caso descrito, se orientó la actividad hacia la búsqueda de la relación de puntos reticulares interiores del triángulos y los puntos reticulares en la frontera para determinar la medida del área utilizando como referencia la medida que genera en la Vista Algebraica el software y la fórmula clásica.

Etapa 2. En el triángulo que está sobre la trama se hace la siguiente identificación: hay veintiún puntos en el interior, dichos puntos interiores lo indicaremos por , y en la frontera se identifican tres puntos . Así, el mismo valor que se obtiene con la aplicación de la fórmula clásica.

El ejemplo que se acaba de describir muestra el caso de un triángulo que no tiene lado alguno horizontal y tampoco es un triángulo rectángulo. Sin embargo, la prueba matemática de la equivalencia de la fórmula introducida y la fórmula clásica se basa en la prueba para los casos de triángulos rectángulos y rectángulos; y la prueba del caso general para triángulos con vértices en puntos reticulares y con lado no horizontal o vertical consiste en inscribirlos en rectángulos en el que un lado esté sobrepujado en un lado del rectángulo, o inscribir el triángulo en un rectángulo. El análisis de cada caso y la búsqueda de relaciones con la fórmula clásica para determinar el área de un triángulo permite identificar elementos para la comprensión del concepto de área (*necesidad de uso de las transformaciones isométricas, el uso de la regla y el compás usando software, nociones sobre fórmulas clásicas para determinar áreas de figuras planas, no*

ciones sobre la cuadratura, entre otros). Aquí se muestra sólo un caso de la prueba matemática (pues no es el objetivo central de este trabajo), tras el acercamiento realizado usando el software.

Teorema. Sea T un triángulo rectángulo con vértices en puntos enteros de una red poligonal con un cateto horizontal, se verifica que .

Caso particular. Trabajaremos con el triángulo que se muestra en la Figura 5, se identifica que la longitud de los catetos y son de 6 y 8 unidades y los lados tienen 7 y 9 puntos respectivamente. Luego, el número de puntos en el interior es , los puntos en la frontera son .

Por tanto, .

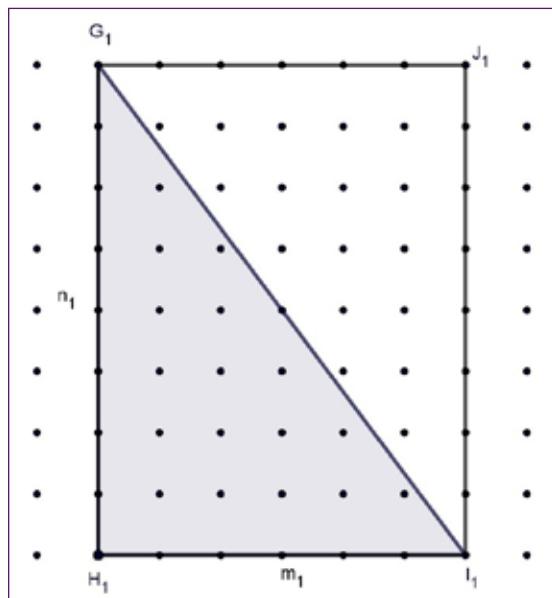


Figura 5. Fuente. Elaboración propia

Caso general. Sean y los catetos, estos lados tienen y puntos y sea el número de puntos en la diagonal del rectángulo auxiliar sin considerar los puntos en los extremos. Entonces indica el número de puntos en la frontera del triángulo, para determinar el número de puntos en el interior del triángulo; primero determinamos el número de puntos interiores del rectángulo, de la siguiente manera , luego el número de puntos en el interior del triángulo se obtiene por .

Por tanto, .

De forma análoga, se construyen en la trama cuadriláteros y en general se pueden construir polígonos simples (para este caso se tendrá que ampliar la trama) verifican la fórmula de Pick

y redescubren que la división en triángulos y las consideraciones en cada caso favorecen la validación de la fórmula, y su relación con las fórmulas clásica para medir el área de triángulos.

Etapa 3. Para la fijación y valoración, en esta etapa se propone estudiar los polígonos simples sobre tramas cuyos puntos son reticulares (*puntos con componentes enteros*) para ello se sugiere la división en polígonos simples con lado común y validar la fórmula de Pick. Cuando la división sea en triángulos se sugiere utilizar las transformaciones de traslación y rotación para llevarlos a posiciones donde sea fácil la aplicación de la fórmula clásica, si se sigue esta orientación, al final se deben sumar las áreas encontradas y compararlas con el área del polígono original. Finalmente, reflexionar, establecer y validar o refutar las conjeturas acerca del uso de la fórmula de Pick cuando los vértices de los polígonos no están en una red reticular.

Durante las actividades que se realizaron y las que se proponen realice el profesor o el alumno, o profesor-alumno deben favorecer los procesos de comprensión del concepto: su identificación, uso y aplicación. De manera particular, en la búsqueda de relación el método de conteo que posibilita la fórmula de Pick se favorece los recursos geométricos de transformación que involucran el concepto de área como se visualiza en el desarrollo de la THA2.

Desarrollo de la THA2. ¿A partir de qué se plantea la THA2? Uno de los acercamientos previo a llevar a cabo el proceso de transformación del polígono a un triángulo de área equivalente, consistió en la división del polígono en triángulos; luego se midieron con el software las áreas de cada uno de éstos, se formó la suma y se constató que esta suma coincide con el valor que de entrada da software cuando se construye una figura geométrica plana, en este caso el polígono A, B, C, D, E. Sin embargo, el proceso no culminó ahí, cada triángulo se trasladó y rotó hasta colocarlo en una posición estándar donde es evidente el uso de la fórmula clásica para el área de triángulos “*la mitad del producto de la base por la altura*”.

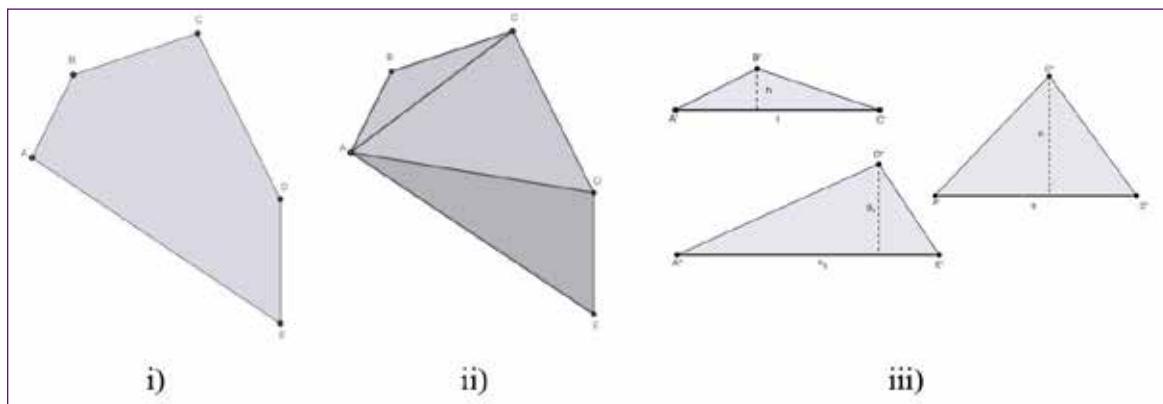


Figura 6. División en triángulos del polígono $P[ABCDE]$.

El proceso de realización mediante el software GeoGebra es el siguiente: Se activa la instrucción **Polígono**, se cliquea en cinco puntos diferentes, el sexto clic es sobre el punto inicial para completar la construcción del polígono, en i) de la Figura 6 se observa el polígono construido. Se activa de nueva cuenta la instrucción **Polígono** y se sigue el proceso descrito para construir los tres triángulos en los que se divide la figura. Mediante las opciones **Traslación** y **Rotación** se lleva cada triángulo a la posición estándar, finalmente se aplica la fórmula para determinar el área de cada triángulo, y después generar la suma. En este caso, el área del polígono principal es 22.5 centímetros cuadrados y las medidas de las áreas de los triángulos de división son: centímetros cuadrados, y la suma resulta 22.5. Luego de esta actividad se trabajaron otros casos particulares y a partir de aquí se determina la THA2.

Producto de la aplicación de las etapas que describe la estrategia, se favoreció la transformación del polígono irregular a) de la Figura 8 a un triángulo de área equivalente.

En la Figura 8 se muestra la aplicación del método griego en la transformación del pentágono irregular a un triángulo cuyas áreas son equivalentes, dicho proceso fue realizado mediante el uso del software GeoGebra. En el inciso e) de la figura; se realizó con el software una transformación isométrica: rotación, con la finalidad de colocar el triángulo logrando que uno de sus lados tenga una posición horizontal, esta es la posición estándar que generalmente ilustran los textos, en esta posición no presenta dificultad la utilidad de la fórmula clásica.

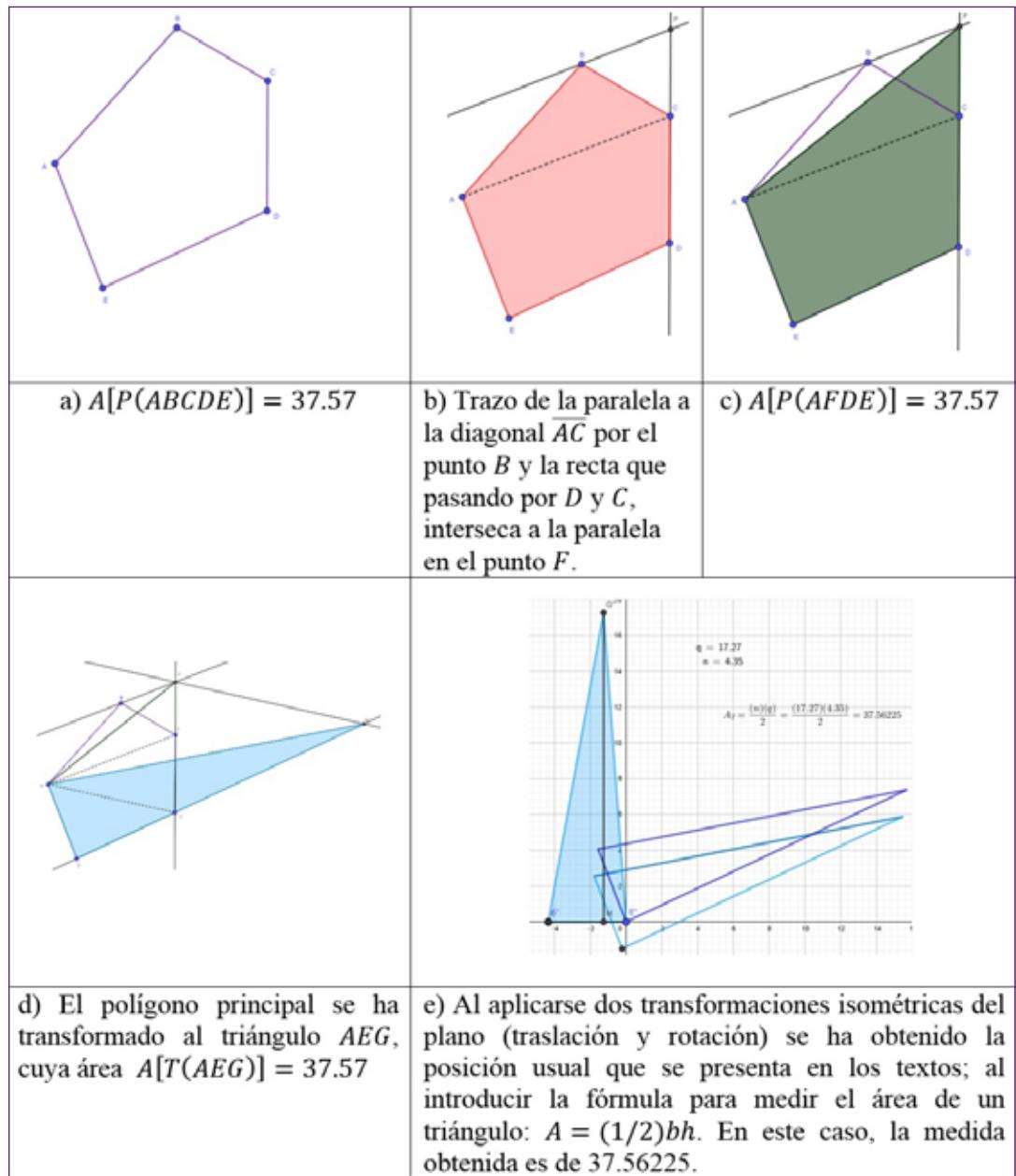


Figura 7. Fuente: Elaboración propia

CONCLUSIONES

La propuesta que se ha descrito desde la visión teórico-didáctica pretende despertar el interés de los docentes del nivel medio superior en la atención a la preparación de actividades que favorezcan la comprensión del concepto de área, la actividad operacional favorece ciertas habilidades de cálculo operacional. Sin embargo, las investigaciones y producto de la misma práctica docente se identifica como necesidad fundamental el tratamiento del aparato conceptual de la matemática, por tanto se coincide con las posiciones que sostienen que gran parte de la problemática en la comprensión de la matemática se debe al escaso tratamiento de los conceptos, en particular del concepto de área. Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje que se plantearon son desde una mirada del grupo de autores y se fundamentaron en los elementos teórico-metodológicos que sustentan el trabajo.

En cada etapa de la estrategia se pretende alcanzar un nivel de comprensión, por ello se consideró trabajar en cada THA actividades de acercamiento y de casos particulares como aseguramiento, se aportaron elementos para la deducción de la fórmula de Pick, la prueba y su relación con la fórmula clásica para determinar el área, se hizo la justificación para casos de triángulos, luego se indujo la utilidad y la relación para casos generales. En el caso del segundo acercamiento basado en el método griego, éste se favorece mediante recursos geométricos, se transforman polígonos irregulares a triángulos y en el paso a la posición estándar de los triángulos se destaca el papel de la traslación y la rotación. Estas transformaciones junto con el método de los griegos arrojan elementos que posibilitan una manera de demostrar la fórmula para medir el área de un triángulo, y favorecen algunas propiedades esenciales que reafirman el concepto de área, en ambos acercamientos el software GeoGebra jugó el papel de recurso heurístico principal.

Actualmente se diseñan las actividades específicas para experimentar cada una de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje con estudiantes de nuevo ingreso a la carrera de matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arango, J., Gavirria, D. y Valencia, A. (2015). Differential Calculus Teaching through Virtual Learning Objects in the Field of Management Sciences. *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 176, 412-418.
- Arenas, M. F. (2012). *Propuesta didáctica para la enseñanza de áreas y perímetros en figuras planas* (Tesis de Maestría). Universidad de Medellín, Colombia.
- Ballester, S. (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Corberán, R. M. (1996). *Ánalisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad*. (Tesis de Doctorado). Universidad de Valencia, España.
- González, J. (2014). *Compreensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café* (Tesis de Maestría). Universidad de Antioquia, Colombia.

- Hernández, E. (2016). *Estrategia para la enseñanza de los conceptos de área y volumen, utilizando como mediadores de aprendizaje el origami y las tecnologías digitales* (Tesis de Maestría). Universidad de Medellín, Colombia.
- Jiménez-Gestal, C. y Blanco, L. J. (2017). El teorema de Pick como pretexto para la enseñanza de la Geometría don Estudiantes para Maestro. *Números*, 94, 7-21.
- Jungk, W. (1981). *Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la matemática 2. Segunda parte*. La Habana: Pueblo y Educación.
- León, O. L., Díaz Celis, F., y Guilombo, M. (2014). Diseños didácticos y trayectorias de aprendizaje de la geometría de estudiantes sordos, en los primeros grados de escolaridad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 9-28.
- López, R. E., Silva, D. y Fuentes, J. A. (2013). GeoGebra en el estudio de áreas y perímetros. *Pistas Educativas*, No. 104, Instituto Tecnológico de Celaya, México.
- Marmolejo, J. E. y Campos, V. (2012). Pensamiento lógico matemático con scratch en el nivel básico. *Vínculos* 9(1), 87-95.
- Marmolejo, G. A. y González, M. T. (2015). El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 10(1), 45-58.
- Morales, A. (2016) propuesta didáctica para la enseñanza de la traslación de coordenadas y su uso en la graficación de curvas. *Premisa* 18 (71), 1-16.
- Morales, A., Marmolejo, J. E., y Locia, E. (2014). El software GeoGebra: Un recurso heurístico en la resolución de problemas geométricos. *Premisa* 16 (63), 20-28.
- Morales, A., Locia, E., y Salmerón, P. (2016). *Recursos heurísticos para la actividad de enseñanza de las transformaciones geométricas en el nivel preuniversitario*. Atenas 3(35), 64-79.
- Müller, H. (1997). *El trabajo heurístico y la ejercitación en la enseñanza de la Matemática en la enseñanza general politécnica y laboral*. Instituto Superior Pedagógico Frank País García.
- Ramírez, J. L. (2010). *El teorema de Pick y redes de puntos*. MATERials MATemàtics, Vol. 5, pp. 1-41. Publicación electrónica de divulgación del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autònoma de barcelona. España.
- Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Task in Conceptual learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.
- Torres, P. (2013). La instrucción heurística en la formación de profesores de Matemáticas. En Dolores, C., García, M., Hernández, J. A., Sosa, L. (Eds.). *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 205-221). Díaz de Santos.
- Verduzco, J., Briseño, L., Palmas, O. y Vazquez, R. (2000). *Áreas de figuras en el geoplano*. Facultad de Ciencias, UNAM: México.
- Wooton, W., Beckenbach, E. F. y Fleming, F. J. (1985). *Geometría Analítica Moderna*. México: Publicaciones cultural S. A. de C. V.