

FUNCIÓN LINEAL: TIPOS DE REPRESENTACIONES

Gonzalo Catriel Ravinale

**Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”.
Ciudad de Buenos Aires, Argentina**

gonzaravinale-94@hotmail.com

RESUMEN	ABSTRACT
<p>Tras la lectura de distintos trabajos, se evidencia la carencia de articulación entre los distintos modos de representaciones de las funciones lineales produciéndose que los estudiantes tengan dificultades para su comprensión (consideran a cada representación como un objeto matemático distinto). La representación gráfica es propuesta como un complemento de la representación algebraica con lo cual los mayores problemas se presentan al invertir esta conversión. Si los estudiantes logran comprender las diferentes representaciones de la función lineal podrán apropiarse de dicho concepto matemático y realizar las conversiones entre ellas.</p>	<p>After reading different works, the lack of articulation between the different modes of representations of linear functions is evident, producing that students have difficulties in understanding (consider each representation as a different mathematical object). The graphic representation is proposed as a complement to the algebraic representation, with which the greatest problems arise when inverting this conversion. If the students can understand the different representations of the linear function, they will be able to appropriate this mathematical concept and make the conversions between them.</p>
PALABRAS CLAVE:	KEYWORDS:
Representaciones, Función Lineal, Articulación	Representations, Lineal Funtion, Articulation

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo pretende analizar las formas en que se accede a un conocimiento matemático mediante los diferentes registros de representación. Además se tratará de comprender que obstáculos se presentan en su articulación. Se ejemplifica con una situación en contexto áulico de articulación de diversos registros para tratar de responder las siguientes preguntas:

- ¿Cómo influye la definición de función para que cada registro sea considerado independiente del otro?
- ¿Cuál es la función del discurso matemático escolar en las dificultades de articulación de distintos registros?

La coordinación de registros de representación requiere que la conversión pueda ser fácilmente efectuada para todos sus diferentes cambios de registro. Para favorecer esta coordinación, parece esencial proponer una tarea que conduzca a explorar sistemáticamente las variantes posibles de una representación en un registro y predecir las variaciones análogas de las representaciones en el otro registro.

MARCO TEÓRICO

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática constituye un campo de estudio privilegiado para el análisis de las actividades cognitivas fundamentales. Para poder comprenderlo han surgido gran cantidad de teorías con un enfoque de análisis particular cada una; la Teoría de Registros de Representaciones Semiótica es una de ellas y fue creada por Raymond Duval.

La relación entre las representaciones internas y externas de un objeto matemático no pueden ser consideradas como diferentes pues una necesita de la otra: la representación mental (imágenes y concepciones sobre un objeto o su asociado) es producida gracias a la interiorización de una representación externa (enunciados en lenguaje natural, fórmulas, gráficos, tablas, entre otros) y sus transformaciones hacen que aumenten las representaciones mentales y se vuelvan más accesibles (Morales, 2013).

El desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones semióticas de la misma manera que las imágenes mentales son una interiorización de los perceptivos. A esto es necesario añadir el hecho de que la pluralidad de sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y por tanto sus representaciones mentales.

Esta teoría define dos grandes conceptos. Uno de ellos es semiosis que hace referencia a la producción de representaciones dependientes del sistema que se utilice para generarlas, es cualquier forma de actividad, conducta o proceso que involucre signos incluyendo la creación de un significado. Es un proceso que se desarrolla en la mente del sujeto y se inicia con la percepción del signo en cuestión finalizando con la presencia mental del objeto. Por otro lado el concepto de noesis que se refiere a la aprehensión conceptual de los objetos representados incluyendo los desarrollos generados por el sujeto, son los actos cognitivos que este presenta. Es importante destacar que existe una relación demasiado estrecha entre ambos procesos ya que los signos se utilizan para comunicar nuestras concepciones y es la semiosis la que permite que estas ideas sean transformadas en símbolos y mediante la noesis son expresadas al mundo en forma de signos o símbolos, en otras palabras, sin semiosis no hay noesis. (Duval, 2004).

Los actos más elementales de formación son, según los registros, la designación nominal de objetos, la reproducción de su contorno percibido, la codificación de relaciones o de algunas propiedades de un movimiento. Estos actos elementales son interesantes solo en la medida en que las representaciones así formadas están, implícita o explícitamente, articuladas en representaciones de orden superior. Esta articulación depende de las posibilidades de estructuración propia a cada sistema semiótico, por tanto, es importante que la formación de representaciones respete las reglas propias al sistema empleado, lo que se denomina reglas de conformidad que definen un sistema de representación y, en consecuencia los tipos de unidades constitutivas de todas las representaciones posibles en un registro. La formación de las representaciones semióticas, es en efecto, más compleja que la aplicación de las reglas de conformidad.

La Teoría de Registros de Representaciones Semiótica es importante para la investigación de las ciencias y en particular para el análisis del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática gracias a que los conceptos matemáticos, en general, tienen más de un registro de representación.

METODOLOGÍA

Para poder desarrollar el trabajo, se implementa el desarrollo de una secuencia de actividades realizada en un primer año y también se contará con observaciones para poder detectar como está presente el discurso matemático escolar.

Se realizaron cinco observaciones correspondientes a los primeros y segundos años de la escuela secundaria donde el concepto matemático de función lineal aparece en el primer año planteado como una primera aproximación desde la gráfica mediante la operación con tablas de valores para en segundo año poder tener un acercamiento más profundo, como una herramienta, por ejemplo para resolver algún sistema de ecuaciones, pero ya como un concepto aprendido y capaz de ser manipulado en sus múltiples registros de representación.

En el segundo año al ser un tema que se presupone ya aprendido pueden presentarse dos discursos docentes: uno con un rol más dominante del profesor donde da por sabido de forma homogénea todo el conocimiento que debió haber sido aprendido el año anterior, de todos modos decide reforzar algunos puntos con correcciones y comentarios de las actividades en el pizarrón, la validación queda en sus manos y los estudiantes aceptan lo que reciben de su parte sin la necesidad de plantear ninguna inquietud quedando así la clase bajo un discurso monólogo del docente.

Otra de las posturas se opone totalmente: en la concepción de validación, en el discurso en forma de monólogo que emplea el docente y en la participación que se les asigna a los estudiantes.

En todas las observaciones, se presentan actividades del tipo: “Dada la fórmula de la función lineal, realice el gráfico correspondiente”; y también otra similitud es la definición del concepto de función bajo la concepción de la teoría de conjuntos.

Particularmente también se destaca que la función lineal es concebida y presentada directamente desde su gráfico y fórmula, dejando de lado todo otro tipo de representación posible.

Con respecto al discurso de los estudiantes se resumen algunos de los comentarios más importantes que se observaron: Una función es hacer una tabla y un dibujo; La función lineal es una recta; Se hace una tabla y después un gráfico; En la tabla se usan los valores que cada uno quiere; Es lineal porque tiene X y un número solo.

Por otro lado se desarrolla una secuencia en un primer año. Se presenta a todos los estudiantes el siguiente problema: Los alumnos de primero B deciden alquilar un salón para festejar fin de año. El dueño les dijo que deben pagar \$300 por el servicio del lugar y después \$150 por cada persona que vaya; los chicos solo quieren ir ellos entonces deben confirmar cuantos irán para saber el monto total que deben abonar. Arme un gráfico donde se pueda observar cuando hay que pagar según la cantidad de chicos que confirmen asistencia.

Mientras van bosquejando, se pasa por los bancos y se observan diferentes gráficos, algunos que los chicos van tachando y descartando y otros que plantean distintos sin poder justificar cual es el correcto. Una vez que se recorren todos los bancos se hace una puesta en común y la mayoría lo resolvió correctamente.

Luego se les pide que encuentren la fórmula general que representa a ese gráfico. Presentan dos casos diferentes: $T=300+150.P$ donde T es el total a pagar y P la cantidad de chicos que va; y $P=300$ si es que no va nadie a la fiesta y $p=300+150.c/u$ si es que va al menos uno de ellos donde P es la plata a pagar y c/u es cada uno de los chicos que asista. Se dialoga con los chicos y comprenden que ambas representan la misma función.

Se les asigna la definición de la misma: La función lineal es aquella función cuya expresión es del tipo $Y=mX+b$ donde Y y X son números variables.

Después se le asigna diferentes funciones para que las representen gráficamente y se les pide que planteen diferentes situaciones problemáticas para cada una de ellas (trabajando así tres tipos distintos de representaciones).

CONCLUSIONES

Basándose en los aportes de Duval sobre las relaciones entre las representaciones internas y externas, se puede comprender que la función lineal no puede ser considerada por fuera de esta dependencia ya que es de suma importancia la interrelación entre ellas. Por ejemplo en las observaciones realizadas, en todas las ocasiones para poder conseguir una representación mental de la función lineal previamente se recurre a enunciados, fórmulas, tablas o gráficos para su interiorización haciendo constantemente un pasaje entre estos registros de representaciones generando así que aumenten las representaciones mentales y estas se vuelvan más accesibles; es por ello que se acude a visualizaciones previas para poder construir, por ejemplo, un nuevo gráfico.

En la actividad llevada a cabo, en una primera instancia se observó que los estudiantes al momento en que tenían que realizar un gráfico (representación externa), estaban interviniendo de manera muy fuerte sus imágenes mentales de cómo debería ser el mismo a tal punto que todos plantean una función lineal creciente, salvo un único caso que la consideró de forma constante. El hecho de que lo armen como una función creciente, hace que su razonamiento sea que si van más personas a la fiesta se gaste más dinero y por ende su gráfico también deberá mostrar esta relación.

El desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones semióticas de la misma manera que las imágenes mentales son una interiorización de los perceptivos, es por ello que en las clases observadas los docentes primero enseñaban la fórmula de la función lineal y luego se les interrogaba, por ejemplo, sobre cuál era la ordenada al origen o cuál era la pendiente o que puedan deducir si está correcto el gráfico o no sin la necesidad de tener que recurrir a una tabla. Esto se condice también con la actividad diseñada y llevada a cabo en el aula ya que primero se logra que los estudiantes puedan comprender la función lineal previa una interiorización del mismo con ejemplos, relación con conocimientos previos y también con ejemplos en los que ellos puedan aplicar y resolver de manera autónoma y ahí incorporar las nociones matemáticas correspondientes y así luego poder tener una mayor percepción sobre los distintos casos y actividades a desarrollar. Es fundamental que para poder acudir a una imagen mental, previamente se la tenga bien incorporada para que funcione como una herramienta y no como un obstáculo.

Desde el discurso matemático docente, sin embargo, se observó que la función lineal es presentada de manera acotada, como un gráfico o como una fórmula y nada más que ello sin que intervenga otro tipo de sistema semiótico o sin que se establezca algún otro tipo de relación.

La Teoría de Registros de Representaciones define dos grandes conceptos. Uno de ellos es el de semiosis, el cual hace referencia a la producción de representaciones por parte de los estudiantes, por ejemplo en la actividad, donde pueden desarrollar ellos mismos los problemas que servirán de

situación a modo de ejemplo de cada fórmula de una función lineal ya que se involucran diferentes signos que ellos tienen para crear un significado nuevo (acuden a su experiencia al nombrar lugares conocidos, en situaciones cotidianas o en ejemplos previos) pero todo esto fue gracias a que ellos lograron poder desarrollar mentalmente y de manera perceptiva al objeto matemático en cuestión. Esta semiosis también se observó en las clases analizadas cuando se les pedía a los estudiantes que primero armen una tabla de valores, en los primeros años, para después realizar el pasaje al gráfico haciendo así que los signos que interioricen (provenientes de la tabla) se transformen en un significado al graficarlo relacionando con que a mediar en que armaban la tabla vayan logrando adquirir la presencia mental de la función lineal que trabajan. En un paso siguiente a esto se encuentra el otro concepto que define esta teoría que es el de noesis, el mismo ocurrirá en el momento en que los estudiantes logran la aprehensión conceptual de la función lineal.

Para poder justificar que cada representación de la función lineal es un proceso de semiosis se deben encontrar los tres momentos que están ligados a ella; los mismos son:

1. Formación de una representación identificable: Claramente esto se puede explicar mediante las clases observadas y mediante la actividad llevada al aula ya que en ambos se trabaja con una (o en algunos casos más de una) representación de la función lineal, en general es sobre el gráfico (en algunos casos también sobre la fórmula).
2. Tratamiento o transformación interna: Es cuando los estudiantes comprenden el armado de la tabla de valores o la confección del gráfico pero cada uno por separado.
3. Conversión o pasaje de una representación a otra: Ya en este caso los estudiantes logran ir y venir de una a otra, esto se observó en las clases de un modo rutinario y repetitivo en los cuales los estudiantes solamente pasan de una fórmula a su respectivo gráfico (en algunos casos puntuales se da la relación inversa) pero en la actividad que se realizó en aula se desarrolla además una tercera que tiene que ver con el lenguaje coloquial de poder problematizar y contextualizar cada función y a su vez se interrelacionan los tres registros y se hace el pasaje de uno a otro justificando y validando con la otra haciendo que los estudiantes puedan ir y venir de una a otra comprendiendo como una unidad a la función lineal e integrando tres modos de representación siendo trabajados con igual jerarquía. Todo esto propició que se establezca una estrecha relación entre la semiosis y la noesis.

Durante el desarrollo de la actividad se propiciaron diferentes actos de formación, por ejemplo en el momento en que se les pide a los estudiantes que creen un gráfico lo que se está buscando es que logren desde el lenguaje coloquial hacer una designación nominal del contenido del problema, gracias a ello es que cuando fueron respondiendo las preguntas orales y justificando las de los compañeros lograban desenvolver una relación pudiendo reproducir las respuestas en base al análisis

del objeto en cuestión (el gráfico y la fórmula). Respecto a la codificación de relaciones lograron poder comprender los vínculos entre los tres tipos de registros: coloquial, algebraico y gráfico. Esto también se observó en algunas clases en las que lograron poder codificar cuando debían escribir la fórmula correspondiente a un gráfico o hacer el gráfico en base a la fórmula. Todas estas situaciones elementales son de sumo interés ya que favorecen que las representaciones logradas estén, implícita o explícitamente, articuladas entre sí y con otros registros de orden superior.

La puesta en correspondencia de dos representaciones pertenecientes a registros diferentes, puede establecerse a través de una equivalencia entre las unidades significantes elementales constitutivas de cada uno de los registros. Para determinar si dos representaciones son congruentes o no, es necesario comenzar por segmentarlas en sus respectivas unidades significantes, de manera tal que puedan ser puestas en correspondencia. Por ejemplo si queremos comparar las representaciones gráficas con las representaciones algebraicas que son las más comunes y presentes en el discurso matemático escolar, se destaca la congruencia entre ordenada al origen y la pendiente. Si por ejemplo queremos analizar en la actividad los momentos en que los estudiantes responden en la primer actividad las preguntas sobre su gráfico, logra hacer correspondencia entre gráfico y las preguntas (que vendrían a ser parte del problema en representación coloquial).

Gracias a esta segmentación comparativa es que se puede saber si las unidades significantes son unidades congruentes o no. En algunos casos esto puede hacerse directamente o por intermedio de una tercera representación que de alguna manera codifique las representaciones que se quieren comparar, como fue el caso en que se utilizó al lenguaje coloquial con preguntas para relacionar al gráfico con la fórmula.

En efecto, dos representaciones son congruentes solamente cuando hay correspondencia entre sus unidades significantes, por ende la dificultad de la conversión de una representación a otra depende del grado de congruencia entre la representación de salida y la representación de llegada. Por ello es que en las mayorías de las observaciones se detectó que se hacía más foco en los ejercicios de conversión de actividades de lenguaje algebraico al lenguaje gráfico y no intervenía otro modo de representación.

Es por ello que se decidió incluir al lenguaje coloquial en la actividad llevada a cabo en el aula ya que el cambio de representación resulta interesante cuando los tratamientos en dos registros diferentes no son congruentes. Bajo esta idea es que al momento de diseñar actividades se debe focalizar en que la importancia de un cambio de registro está en que se puedan efectuar tratamientos totalmente diferentes en un registro distinto a aquel en el que fueron dadas las representaciones iniciales.

Las dificultades que se tienen por la no congruencia de la conversión, pueden agravarse por el desconocimiento de uno de los registros de representación. Por ejemplo, cuando la conversión

se efectúa en el sentido algebraico en su paso al registro gráfico no parece surgir ninguna dificultad específica. Pero todo cambia cuando es necesario hacer la conversión inversa (de gráfico al registro algebraico).

Gracias a estos análisis se puede concluir que la diversificación de los registros de representación semiótica es la constante del desarrollo de los conocimientos, tanto desde el punto de vista individual como grupal. Un registro puede permitir efectuar ciertos tratamientos de una manera más económica y más potente que otro registro, por eso es importante que convivan y se interrelacionen entre sí.

Con esto se tiene que la diversidad de registros da la posibilidad de cambiarlo para formar la representación de la función lineal y por tanto escoger aquella que sea más económica y que más favorezca según la situación a trabajar. La consideración de varios registros de representación solo se justifica en las situaciones en que se comprueba que es necesario un cambio de registro para que sea más pertinente su tratamiento. Respecto a la estructura misma de la representación, se conforma la relación que une a la función lineal con su registro, la comprensión de una representación en un registro determinado implica directamente la comprensión de la función lineal, por ello debe abordarse desde todos los modos de representación posible para que se comprenda de manera correcta la noción matemática que se está trabajando.

Bajo esta última idea y siguiendo los aportes de Duval (2004) es que se pudo probar que los estudiantes lograron tener un acceso óptimo a la noción de función lineal gracias a que se propició un vínculo estrecho entre diferentes modos de representación. Se pudo lograr que los alumnos dispongan de tres sistemas semióticos diferentes (algebraico, coloquial y gráfico) para producir la representación de la función lineal y así mismo poder convertir las representaciones producidas de un sistema semiótico a otro, sin siquiera notarlo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Díaz Lozano, M., Haye, E., Montenegro, F. y Córdoba, L. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. En A. Ramírez y Y. Morales (Eds.), *Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*⁽¹⁾, (pp. 614 - 627). Santo Domingo: Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad del Valle. Colombia.

García, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Manizales. Manizales.

Hernández, A., Cervantes, J., Ordoñez, J. y García, M. (2017). Teoría de registros de representaciones semiótica. En F. Monserrat y R. Rodríguez (Eds.). *Escuela de Invierno en Matemática Educativa 20*, 39-46. México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.

Morales, Z. (2013). Las representaciones semióticas: un enfoque cognitivo de análisis de las dificultades en el aprendizaje del álgebra. En G. Bermúdez, A. Pollio y F. Vitabar (Eds.), *Congreso Iberoamericano de Educación Matemática 7*, 7825-7829. Montevideo: Sociedad de Educación Matemática Uruguay.

Rey, G., Boubée, C., Sastre, P. y Cañibano, A. (2009). Aportes didácticos para abordar el concepto de función. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20 ⁽¹⁾, 153-162.

Sánchez Peña, D. (2016). *Conceptualización de la función lineal y afín: Una experiencia de aula*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.