MATERIAL DIDÁCTICO INTERACTIVO PARA UNA ENSEÑANZA EFICAZ DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES ORDINARIAS

Susana B. Ruiz[1], María Inés Ciancio[2]

1 Depto. de Geofísica y Astronomía, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, UNSJ
2 Depto. de Geología, Facultad de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales, UNSJ San Juan, Argentina

sbruizr@yahoo.com.ar,miciancio@hotmail.com

FECHA DE RECEPCIÓN: 29/11/18 FECHA DE ACEPTACIÓN: 01/01/19

RESUMEN

Se presenta un material didáctico interactivo sobre Ecuaciones Diferenciales Lineales Ordinarias, para lograr aprendizajes significativos mediante una enseñanza eficaz. Las actividades seleccionadas, mediante trabajo grupal colaborativo, guían al alumnado en el empleo de distintos enfoques y realizar simulaciones con ayuda del software GeoGebra. Involucra la aplicación de conocimientos matemáticos, físicos y computacionales. Se pudo valorar la propuesta en contribuir para la compresión de la temática en forma significativa y más equitativa según distintos tipos de aprendizajes. Favoreció la integración de contenidos y la comunicación, fortaleciendo capacidades para afrontar nuevos problemas y responder interrogantes mediante el uso de tecnologías interactivas.

ABSTRACT

An interactive didactic material on Ordinary Linear Differential Equations is presented, to achieve significant learning through effective teaching. The selected activities, through collaborative group work, guide the students in the use of different approaches and perform simulations with the help of GeoGebra software. Involves the application of mathematical, physical and computational knowledge. The proposal could be evaluated in contributing to the understanding of the subject in a meaningful and more equitable manner according to different types of learning. It fostered the integration of content and communication, strengthening capacities to face new problems and answer questions through the use of interactive technologies

PALABRAS CLAVE:

Ecuaciones diferenciales, interactivo, enseñanza eficaz

KEYWORDS:

Differential equations, interactive, effective teaching.

INTRODUCCIÓN

Tanto en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, como en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de San Juan (UNSJ), la unidad temática Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) forma parte de los contenidos de la asignatura Análisis Matemático II, que comprende, además, el estudio de todos los temas tradicionales del cálculo diferencial e integral multivariado. En particular, el estudio de las EDO es de fundamental importancia para la formación de los alumnos, en las carreras que se imparten, ya que está fuertemente ligado a problemas de interés profesional.

El lenguaje del Análisis Matemático para funciones de una o varias variables es adaptable a muchos contextos, por la generalidad de sus objetos de estudio, por ello forma parte en el planteo de modelos y la determinación de soluciones de situaciones de la misma Matemática y otros campos científicos como son el de la Física, Ingeniería, Geofísica, Astronomía, Geología, etc., donde juega un papel relevante la teoría de EDO. Es por ello que es de mucha importancia que los docentes universitarios responsables de cátedra, en su rol de facilitadores del aprendizaje en dicha temática y para la mejora de la calidad educativa, brinden propuestas didácticas que contribuyan al logro de aprendizajes significativos. Estas propuestas se deben adecuar al espacio, tiempo y recursos didácticos que se disponen, como también a los conocimientos previos, intereses y perfil profesional de los alumnos a formar.

El aprendizaje significativo es el proceso según el cual se relaciona un nuevo conocimiento o una nueva información con la estructura cognitiva de la persona que aprende de forma no arbitraria y sustantiva o no literal. Esa interacción con la estructura cognitiva no se produce considerándola como un todo, sino con aspectos relevantes presentes en la misma, que reciben el nombre de subsumidores o ideas de anclaje (Rodriguez, 2010). El aprendizaje significativo depende de las motivaciones, intereses y predisposición del aprendiz. No se trata de un proceso pasivo, ni mucho menos, sino que requiere una actitud activa y alerta que posibilite la integración de los significados a su estructura cognitiva. Ante una actitud pasiva o negativa de estudiantes en el aula, el docente, en su rol de educador, no debe estar ajeno a esta situación, debe brindar experiencias motivadoras que favorezcan la integración de contenidos, vinculando los conceptos matemáticos a problemas concretos de la vida cotidiana, ya que ello favorece en el cambio hacia una actitud positiva y al logro de aprendizajes significativos.

También resulta relevante tener en cuenta en la práctica educativa el modelo socio-constructivista, en el cual considera la interacción como base del aprendizaje y propicia el trabajo colaborativo, la interactividad y la socialización del conocimiento, entre otros aspectos. En este contexto el estudiante asume un rol protagónico y el docente es mediador pedagógico, colaborador y dinamizador del proceso de aprendizaje (Tobón, 2006).

Investigaciones realizadas sobre una enseñanza eficaz han demostrado que la estrategia más eficaz es la utilización de actividades diversas adecuándose al momento, al contenido, al estudiante. Con ello se consigue una mayor motivación presentando nuevos estímulos hacia los estudiantes; cuando el docente utiliza diferentes actividades los contenidos se perciben como más interesantes y estimulantes provocando su natural curiosidad. Además permite que los estudiantes conecten lo aprendido con otros temas y situaciones cotidianas, constituyendo en sí mismas, ejemplos prácticos de significado y funcionalidad de aquello sobre lo que se esté trabajando. Otras investigaciones coinciden, para una enseñanza eficaz, en la importancia de la interacción entre profesores y estudiantes durante las sesiones de clase. Cuanto más tiempo dedican los maestros a hacer preguntas y a fomentar el debate y la discusión en pequeño y gran grupo, mayor efecto positivo se produce en el progreso de los estudiantes (Murillo, Martínez y Hernández, 2011).

Respecto a la enseñanza de las EDO, en muchos trabajos de investigación orientados a la búsqueda de una enseñanza eficaz, diversos autores señalan como elementos comunes: el empleo de herramientas tecnológicas, el trabajo de a pares o en grupos de alumnos, la resolución de problemas realistas, la modelización y la utilización paralela de los enfoques gráfico, numérico y analítico (Camacho, Perdomo y Santos, 2012; Morales, 2010; Borssoi y Werle, 2004).

Esta propuesta se enmarca en el siguiente contexto. Se presenta material didáctico interactivo elaborado por la cátedra “Análisis Matemático II” para alumnos del segundo año de las carreras de Licenciatura en Astronomía y Licencuatura en Geofísica de la FCEFN de la UNSJ, con el objetivo de lograr aprendizajes significativos en la temática de Ecuaciones Diferenciales Lineales (EDL) Ordinarias a coeficientes constantes. Las distintas actividades que se plantean están diseñadas para que se aborde la temática mediante análisis gráficos, analíticos y numéricos de modelos simples y aplicados a la Física. También mediante simulaciones con apoyo del software GeoGebra. En esta propuesta se elige trabajar con el software GeoGebra, ya que es un software libre y simple de utilizar. GeoGebra corresponde al conjunto de Sistemas Algebraicos de Cómputo (SAC) apropiado para la enseñanza del Análisis Matemático, con un creciente potencial de recursos de aplicación, tanto para alumnos como también para docentes, para favorecer los aprendizajes.

MODELO DE PROPUESTA DIDÁCTICA

La propuesta didáctica se denomina “Trabajo Especial de Ecuaciones Diferenciales Lineales”, cuyos destinatarios son alumnos universitarios con conocimientos previos de lo que representa una EDO, los tipos de solución y el método de variable separable. Las actividades están organizadas bajo la presentación de dos planteos generales. En el primer planteo se pretende que el alumno realice actividades con EDL ordinarias de primer orden realizando representaciones graficas, análisis, cálculos algebraicos y aproximados con ayuda de software. En el segundo planteo las actividades se centran en trabajar con EDL de segundo orden a coeficientes constantes, mediante la resolución de problemas físicos sobre sistemas masa-resorte donde se incluyen simulaciones. Las simulaciones se basan en cálculos aproximados y análisis gráficos. Se pretende que al finalizar el mencionado Trabajo, los alumnos puedan logran una integración de contenidos del Análisis Matemático 1(Análisis diferencial e integral), Geometría Analítica (graficas de rectas y pendientes de curvas planas), Algebra Lineal (funciones linealmente independientes) y Física Mecánica (velocidad, aceleración, Segunda Ley de Newton, Ley de Hooke, efecto de Resonancia) con el apoyo del software GeoGebra.

En el material de actividades elaborado se distinguen las siguientes partes:

- Presentación general introductoria del tema matemático a abordar, los objetivos del trabajo y la organización de actividades a través de diferentes planteos.
- En cada planteo, una breve introducción sobre la temática específica a tratar, de interés para ambas carreras.
- Desarrollo secuencial de actividades asociadas, y organizadas de lo simple a lo complejo, donde al alumno se lo guía a trabajar los contenidos en forma gráfica, numérica y analítica, con la ayuda del software GeoGebra.
- Espacio para el análisis, debate y reflexión, por parte del alumno, de las tareas desarrolladas y el material de trabajo empleado en la experiencia.

El desarrollo y evaluación del trabajo es en forma grupal. Se prevé, para la evaluación, la presentación del material desarrollado en forma escrita bajo la modalidad tipo informe final. El plazo para la presentación del informe grupal es de a lo sumo 10 días. Se tendrá en cuenta, en la valoración del trabajo además, el orden, prolijidad y completitud (como mínimo un 70%) de las actividades desarrolladas en forma correcta.

Modelo de Guía de Actividades

Trabajo Especial de Ecuaciones Diferenciales Lineales

Resumen: El objetivo de esta guía es abordar la resolución de Ecuaciones Diferenciales Lineales Ordinarias de orden 1 y 2, desde distintos enfoques (gráfico, algebraico, numérico y mediante simulaciones) para la mejor comprensión de la temática. Las actividades de este trabajo, están programadas a desarrollarse en forma grupal colaborativa, de a lo sumo 3 (tres) alumnos, en un plazo de a lo sumo 10 (diez días) a partir de la recepción del mismo.

Las tareas consignadas están organizadas secuencialmente, de lo simple a lo complejo, a partir de dos planteos diferentes. En ambos planteos se requerirá del empleo del software GeoGebra, para apoyar los cálculos e interpretaciones gráficas, como también la consulta del Material Didáctico de la Cátedra y de Biblioteca. Cuentan además con el apoyo y guía de Docentes de la cátedra en horarios de consultas y de gabinete consignados.

En particular, en el Planteo 2, trabajarán con modelos físicos-matemáticos, basados en sistemas masa-resorte, de interés en sus carreras. Abordarán también el estudio mediante simulaciones utilizando recursos de GeoGebra, bajo un material didáctico que se proporcionará en el Gabinete de Computación. Esta aplicación les permitirá realizar análisis de resultados al modificar parámetros de operación del sistema de estudio (Cornejo, Villegas, Serrano y Molina, 2013). El desarrollo completo del trabajo es a los fines de que, en un mismo ámbito, puedan realizar tareas simples e integradoras, sobre conceptos matemáticos, físicos y computacionales, que sean de importancia para la formación en sus carreras.

Planteo 1

Una EDO de la forma $y' + P(x)y = Q(x)$*, con* $P(x)$ *y* $Q(x)$ *continuas e integrables en un dominio común se dirá una Ecuación Diferencial Lineal Ordinaria de primer orden (EDLO de primer orden).*

En este caso $y = y(x)$ es una función incógnita (función solución) que se desea determinar, donde x es la variable independiente real. Asumiendo que la función $y = y(x)$ es derivable, la derivada $y'(x_0)$ en cada punto $(x_0, y(x_0))$ representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

En nuestro caso: $y'(x) = Q(x) - P(x)\,y(x)$ *Forma Normal de la EDLO de primer orden*.

Teniendo en cuenta esto, y para el caso: $y' = \frac{y}{x}$ (es decir para: $P(x) = -\frac{1}{x}$ y $Q(x) = 0$, siendo $x \neq 0$) resolver las siguientes actividades.

Actividad 1:

a) Sabiendo que la derivada $y^{/}(x_0)$ representa en cada punto $(x_0, y(x_0))$ la pendiente de la recta tangente a la gráfica, representar gráficamente, en el plano *xy,* con pequeños segmentos trazados en cada uno de los siguientes puntos, una porción de la recta tangente a la gráfica que pasa por ese punto, en los casos:

(1,1), (1,-1) , (-1,1), (-1,-1), (2,2), (2,-2) , (2,0), (-2,1) y *(-1,2)*.

b) Empleando el programa GeoGebra y la instrucción

CampoDirecciones(<f(x, y)>)
donde *f (x, y)* es el segundo miembro de la Forma Normal de una EDO de primer orden, esto es, en nuestro caso $\frac{y}{x}$, repetir el trazado del punto anterior, pero esta vez para una gran número de puntos del plano equidistribuidos (más detalles se pueden ver en *https://wiki.geogebra.org/es/Comando_CampoDirecciones*).

Actividad 2:

a) Imprimir el Campo de direcciones obtenidos en la Actividad 3 e intentar esbozar cómo sería la curva solución que pasa por el punto (1,1). Tener en cuenta que por cada punto por donde pase la curva ésta debe ser tangente al pequeño segmento que está trazado en ese punto.

b) Comparar el trazado anterior con el que provee GeoGebra con la instrucción
ResuelveEDO(<Ecuación>, <Punto(s) de f>)
en la entrada CAS, donde en <Ecuación> se escribe $y^{/} = \frac{y}{x}$ y en <Punto(s) de f > se escribe (1,1). Para más detalles pueden ver *https://es.scribd.com/document/360322096/Comando-ResuelveEDO-GeoGebra-Manual*).

Actividad 3:

La instrucción “ResuelveEDO(<Ecuación>, <Punto(s) de f>)” intenta buscar analíticamente la solución exacta de la ecuación. Consulte en el material de “Apuntes de Cátedra” como se resuelve la EDLO de primer orden, y aplique dicho proceso algebraico en este caso. Comparar la solución obtenida, con la función que parece en la Vista Algebraica del GeoGebra .¿Cuál es la curva-solución que pasa por (1,1)?

Actividad 4:

La instrucción “ResuelveEDO(<f(x, y)>, <x inicial>, <y inicial>, <x final>, <Paso>)” realiza una resolución numérica aproximada, estimando puntos de la curva-solución del siguiente modo: la ecuación $y' = \frac{y}{x}$ se reemplaza por su expresión aproximada

$$\frac{y(x_n)-y(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = \frac{y(x_{n-1})}{x_{n-1}}$$

que se utiliza para estimar una sucesión de puntos $(x_n, y(x_n))$ a partir del punto $(x_{inicial}, y_{inicial}) = (x_0, y_0)$, y del valor x_{final} de interés en el estudio, siendo $h=x_n - x_{n-1}$ el Paso que se elija. Utilizar dicho comando para la ecuación diferencial considerada, $(x_{inicial}, y_{inicial}) = (x_0, y_0) = (1,1)$, $x_{final} = 3$, y pasos $h=1$, 0.5 y 0.1. Luego realizar el mismo cálculo a mano para $h=1$.

Planteo 2

El tema que ahora abordaremos es el movimiento de sistemas Masa-Resorte, visto en profundidad en Física Mecánica. Se analizaran los casos de sistemas de masa-resorte con oscilaciones libres (en ausencia de fuerzas externas), y con oscilaciones forzadas (con presencia de fuerzas externas). Los movimientos que se describen, en el último caso, representan ondas que son el resultado de un medio perturbado. El más sencillo de los movimientos es el que realizan los cuerpos elásticos. Una clase muy especial de movimiento ocurre cuando la fuerza sobre un cuerpo es proporcional al desplazamiento del cuerpo desde alguna posición de equilibrio. Estos movimientos denominados armónicos, relacionados a sistemas masa resorte, son de mucha aplicación en problemas de Ingeniería Civil en análisis sísmicos, en Astronomía en estudios de ondas electromagnéticas para medir indirectamente la rapidez de acercamiento o alejamiento de objetos celestes en el espacio respecto a la Tierra (Rojas, 2015), etc.

Modelo de Oscilaciones Libre:

Se toma un resorte ordinario, que resista tanto la compresión como la extensión, y se suspende verticalmente de un soporte fijo. En el extremo inferior del resorte se sujeta un cuerpo de masa *m* como se muestra en la Figura 1. Se supone que *m* es tan grande que puede despreciarse la masa del resorte. Si el cuerpo se tira hacia abajo cierta distancia y luego se suelta, experimenta un movimiento. Se supone que el cuerpo se mueve únicamente en sentido vertical.

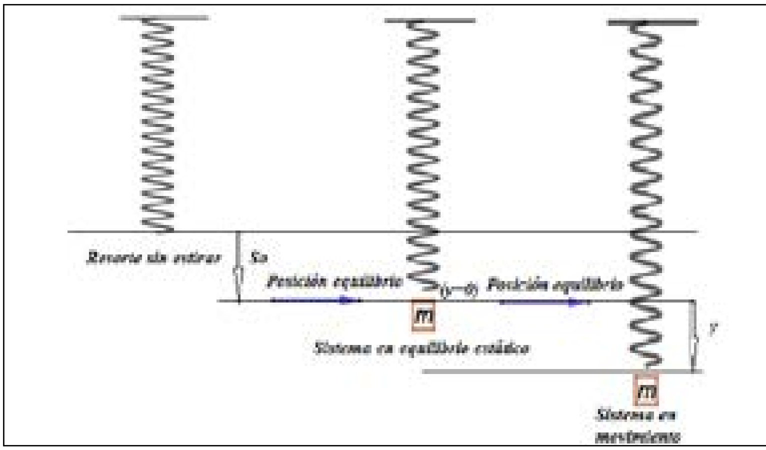

Figura 1. *Representación gráfica de un sistema masa-resorte libre de resistencia y de fuerzas externas*

Se desea determinar el movimiento de este sistema mecánico. Para ello se consideran las fuerzas que actúan sobre el cuerpo durante el movimiento. Esto llevará a una ecuación diferencial, de cuya solución y(t) se obtendrá el desplazamiento de la masa en función del tiempo t.

Se elige la dirección hacia abajo como la positiva y, en consecuencia, las fuerzas dirigidas hacia abajo se consideran positivas, y negativas las fuerzas en la dirección contraria.

La fuerza más evidente que actúa sobre el cuerpo es la atracción de la gravedad $F_1=mg$, donde *m* es la masa del cuerpo y *g* ($980cm/seg^2$) es la aceleración de la gravedad.

Se considera ahora la fuerza del resorte F_2 que actúa sobre el cuerpo. Experimentos indican que dentro de límites razonables, esta magnitud es proporcional al cambio de la longitud del resorte. Su dirección es hacia arriba si el resorte está estirado y hacia abajo si está comprimido. Por tanto, $F_2= -ks$, donde *s* es el desplazamiento vertical del cuerpo (recuérdese que el extremo superior del resorte es fijo), a la constante k se le llama modulo del resorte y el signo menos hace que sea negativa (hacia arriba) para un valor positivo de y (estiramiento del resorte) y positiva (hacia abajo) para y negativa (compresión del resorte).

Si $s=1$, entonces $F_2= -k$. Entre más rígido sea el resorte, mayor será el valor de k.

Cuando el cuerpo está en reposo (sin movimiento), la fuerza gravitacional y la fuerza del resorte están en equilibrio, siendo su resultante la fuerza cero, $F_1 + F_2= mg - ks_0=0$, siendo el estiramiento del resorte que corresponde a esta posición, la cual recibe el nombre de posición de equilibrio estático.

Se denota por $y = y(t)$ al desplazamiento del cuerpo a partir de la posición de equilibrio estático $(y=0)$, con la dirección positiva hacia abajo.

Este desplazamiento produce una fuerza adicional $-ky$ sobre el cuerpo, por la ley de Hooke. Por tanto, la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en la posición $y(t)$es:

$$F_1 + F_2 - ky = -ky \ (1)$$

Sistema no amortiguado (ecuación y solución): Si el amortiguamiento del sistema es tan pequeño que puede despreciarse, entonces (1) es la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. La ecuación diferencial se obtendrá entonces mediante la aplicación de la segunda Ley de Newton

Masa x Aceleración=Fuerza

donde Fuerza significa la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en cualquier instante. En el caso presente, la aceleración es $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$ y la resultante la da (1). Así, $my''-ky$ (Kreyszig, 2010).

Por tanto, el movimiento de este sistema está gobernado por la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes $my''+ky=0$ *(2)*.

Actividad 1:

Mostrar que la solución general de (2) es $y(t)=C_1 \cos (bt) + C_2 \operatorname{sen} (bt)$, aplicando el método para resolver una Ecuación Diferencial Lineal Homogénea a coeficientes constantes, siendo $b=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Actividad 2:

Plantear y resolver la ecuación diferencial correspondiente al sistema de resorte no amortiguado, para el caso *k=40N*/metros, *m=10kg*, tiempo inicial *=0seg*., posición inicial de la masa *y=0* metros y velocidad inicial de la masa*=5metros/seg* (bajo las condiciones iniciales *y(0)=0ey/(0)=5.)*.

Actividad 3:

Resolver la ecuación diferencial de la actividad anterior utilizando el comando ResuelveEDO en la vista CAS de GeoGebra y mediante representaciones graficas que caracteriza el movimiento del sistema.

Actividad 4:

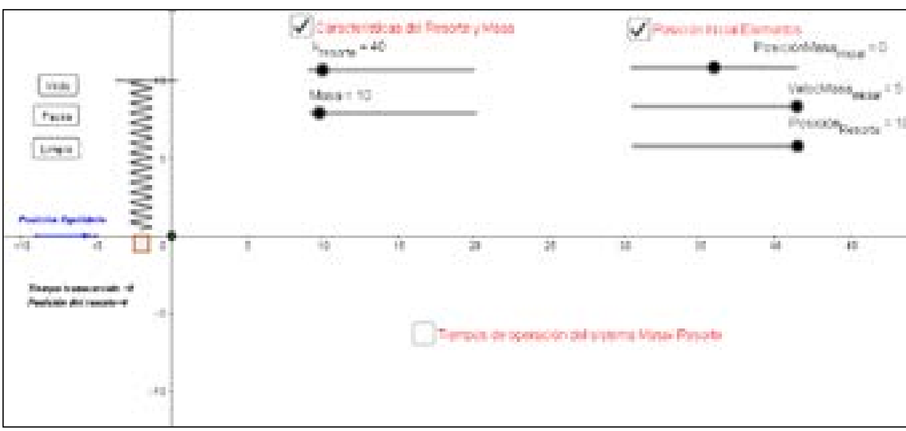

Figura 2. *Imagen del simulador masa- resorte, construido empleando recursos del GeoGebra.*

La Figura 2 muestra la imagen de un simulador de sistema masa resorte como el definido en este trabajo. El simulador se ha construido utilizando recursos de GeoGebra, para analizar el comportamiento del sistema al variar distintos parámetros dentro de un cierto rango de valores que incluye los planteados en la Actividad 2. Utilizar el simulador propuesto, para analizar el comportamiento del sistema al ir variando los parámetros que caracterizan el resorte (*k*), la masa del objeto (*m*) y las posiciones iniciales de los objetos del sistema (tiempo inicial, posición inicial del objeto y velocidad inicial). Expresar sus conclusiones.

Actividad 5: Movimiento forzado.

"Los movimientos forzados se obtienen si se hace que una fuerza externa F(t) actúe sobre el objeto. En cuyo caso se resuelve la ecuación diferencial $my^{//}+ky=F(t)$ *(3) donde F(t) se denomina fuerza de excitación."*

Plantee y resuelva la ecuación diferencial (3) para sistemas masa resorte sin amortiguamiento y con presencia de fuerzas de excitación, aplicando el método de los coeficientes indeterminados, en el caso de las condiciones definidas en la Actividad 3, considerando la presencia de fuerzas externas F(t) al sistema, en cada uno de los siguientes casos:

$$i)\ F(t)=t\ ,\ ii)\ F(t)=\cos(bt)\ \text{con}\ b=\sqrt{\frac{k}{m}}\ \text{y}\ c)\ F(t)=t+\cos(bt)\ .$$

En cada caso, comparar resultados y extraer conclusiones.

Actividad 6:

Idem a la actividad anterior, para
a) *F(t)=at con a=1, 10 y 20.*
b) *F(t)=cos(ht) con h= 1.5, 1.8, 1.9 , 1.99 y 2 (observe que* $b=\sqrt{\frac{k}{m}}=2$ *).*
c) *F(t)=t+cos(bt) para* $b=\sqrt{\frac{k}{m}}$ *.*

Hallar las soluciones mediante el empleo del comando ResuelveEDO de GeoGebra.
Comparar las expresiones analíticas y gráficas en cada caso, con la obtenida en el caso homogéneo (sin presencia de fuerzas de excitación). Discutir en grupos los resultados y expresar conclusiones.

Actividad 7:

Espacio para expresar sus vivencias, aspectos positivos y negativos, respecto a las actividades realizadas en el trabajo especial desarrollado.

APLICACIÓN Y RESULTADOS DE LA PROPUESTA

Respecto a la puesta en práctica del Trabajo Especial propuesto, sólo se ha realizado una prueba piloto con alumnos avanzados en las carreras de Geofísica y Astronomía en la asignatura Análisis Matemático II, para el Planteo 2, donde se observó que las tres primeras actividades no presentan grandes dificultades en su resolución, desde el enfoque algebraico. Pudieron determinar las raíces de la ecuación característica asociada a la EDLH, para luego, plantear la solución general de la ecuación diferencial $10\,y''+40y=0$ y luego resolverla teniendo en cuenta las condiciones iniciales planteadas. Obtuvieron la ecuación del movimiento $y(t) = \frac{5}{2}\, sen\ (2t)$ del sistema masa resorte. Posteriormente lograron caracterizar el movimiento, mediante la visualización de la gráfica con GeoGebra (Figura 3), como periódico oscilatorio con período $T= \frac{2\pi}{2} = \pi$ y amplitud $A=\frac{5}{2}$, que se conserva a través del tiempo.

En los horarios de consulta, los docentes guiaron y apoyaron a los alumnos mediante material bibliográfico, realizando preguntas convenientes dirigidas para que los alumnos pudieran establecer relaciones entre conocimientos de diferentes áreas, vinculando los nuevos conocimientos a conocimientos previos dentro de un mismo área, con el objetivo de que se aproximen al nuevo saber en forma integrada y concreten las actividades en forma apropiada.

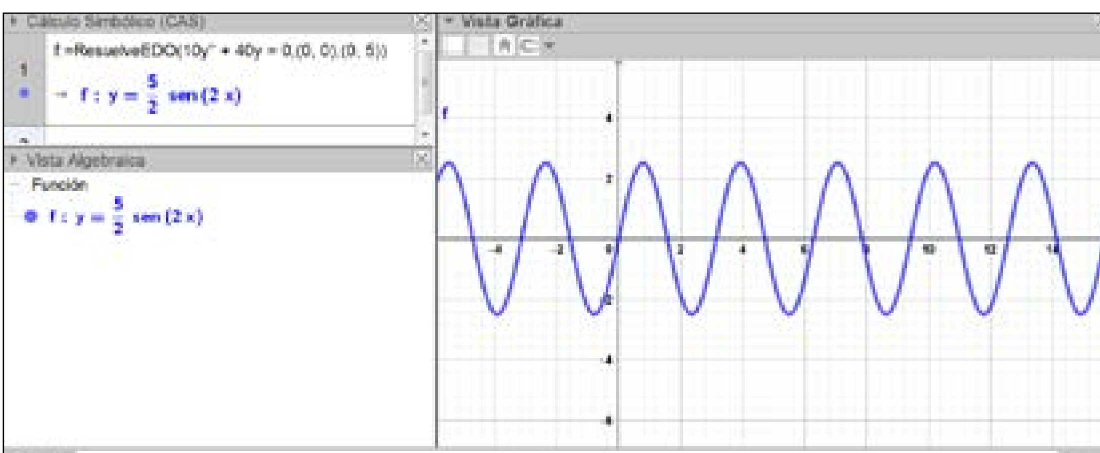

Figura 3. *Visualización grafica de la función incógnita de la Actividad 2, del Planteo 2, para movimiento de un sistema masa resorte no amortiguado y sin fuerzas externas utilizando GeoGebra*

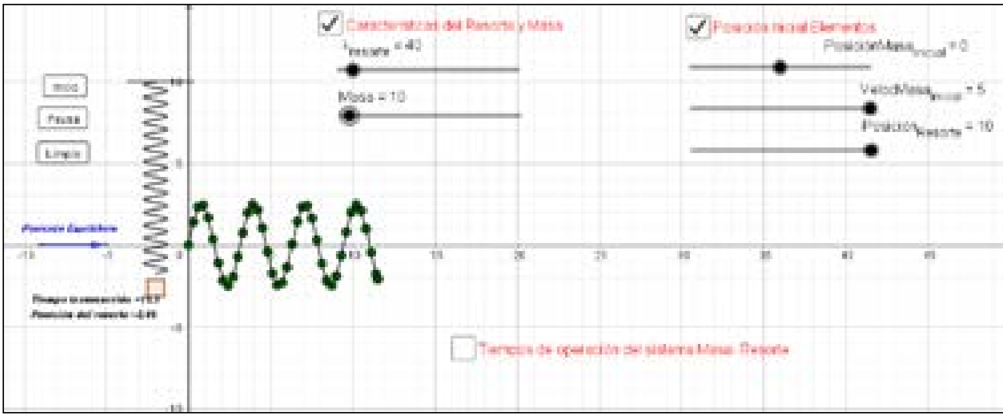

Figura 4. *Visualización gráfica, en la simulación, para el movimiento del sistema masa resorte bajo las condiciones planteadas en la Actividad 2 con GeoGebra.*

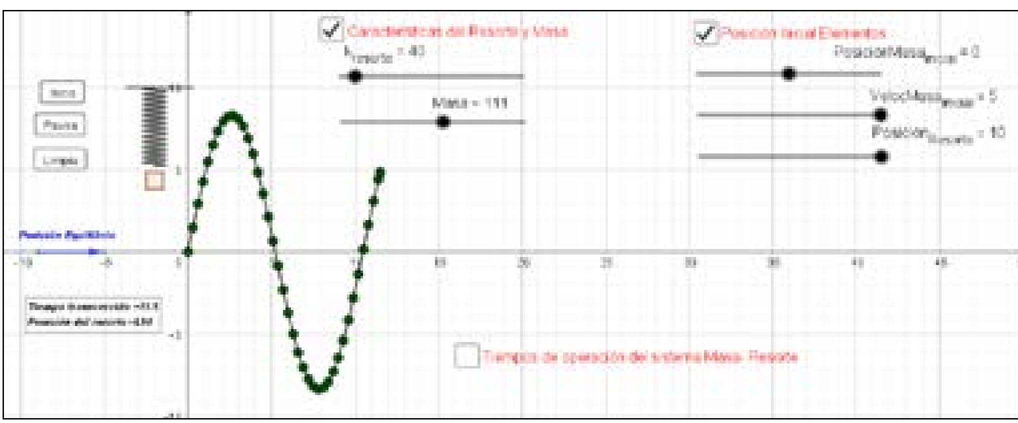

Figura 5. *Visualización gráfica, en la simulación con GeoGebra, para el movimiento del sistema masa resorte bajo las condiciones planteadas en la Actividad 2 modificada en peso de la masa.*

Parte de las Actividades 4, 5 y 6 desarrolladas, en el Planteo 2, quedan ilustradas en las Figuras 4 a 7. Se observa como el movimiento del sistema varía en función de la constante k del resorte, la posición inicial de la masa, el peso de la masa y su velocidad inicial (Figuras 4 y 5). Los alumnos se mostraron muy motivados en las simulaciones como recurso para la mejor comprensión de los problemas y como aporte para conjeturar sobre el comportamiento del sistema ante futuras posibilidades de fuerzas externas. En el análisis del comportamiento del sistema en función de cómo se definen los parámetros ante presencia de fuerzas externas (Figuras 6 y 7) valoraron el recurso de visualización grafica para complementar la interpretación de la solución algebraica y entender con mayor profundidad los desarrollos metodológicos analíticos en la solución EDLO a coeficientes constantes.

A partir de un análisis reflexivo sobre la experiencia didáctica a través del empleo del Trabajo Especial propuesto en una prueba piloto, teniendo en cuenta registros de actividades, evaluaciones y vivencias de docentes y alumnos, se pudo valorar la propuesta didáctica como superadora, en cuanto a contribuir al logro de aprendizajes significativos y más eficaces, respecto a la propuesta inicial de la cátedra que sólo considera el enfoque algebraico y resoluciones de ecuaciones diferenciales sin ningún contexto de aplicación. La estrategia de ofrecer múltiples actividades desde distintos enfoques sobre la temática, aportó a los grupos de alumnos diferentes aproximaciones hacia el mismo conocimiento, y la posibilidad de adquirir los mismos en forma más equitativa, beneficiando a todos los estudiantes independientemente de sus características, expectativas o estilos de aprendizaje. En particular abordar la resolución de EDOs desde la resolución de un problema físico de interés para las carreras universitarias utilizando recursos tecnológicos apropiados, facilitó la integración de contenidos de distintas áreas (Matemática, Física e Informática), motivando al aprendizaje del software GeoGebra como un medio para abordar nuevos temas físicos de interés donde se apliquen la teoría Matemática.

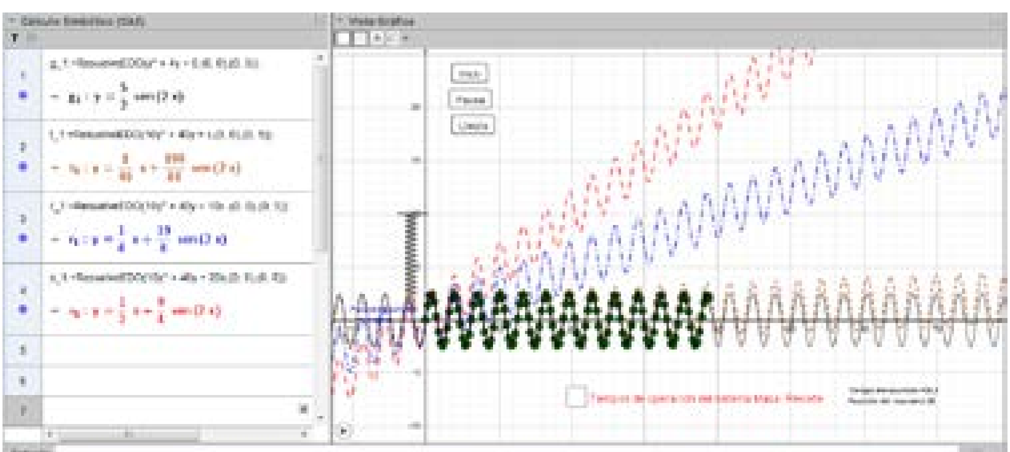

Figura 6. *Visualización gráfica, en la simulación, para el análisis realizado para sistemas masa resorte con presencia de fuerzas externas de la forma F(t)=at, con a=1, 10 y 20.*

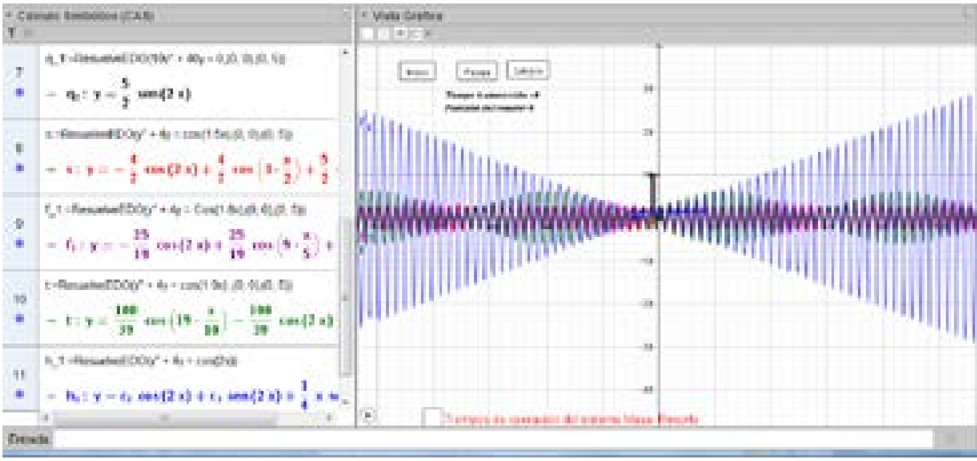

Figura 7. *Gráficas que surgen del análisis realizado para sistemas masa resorte con presencia de fuerzas externas de la forma F(t)=cos(ht) con h= 1.5, 1.8, 1.9 , 1.99, 2. Para h=2 se observa efecto de resonancia.*

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

El estudio de las EDO es de fundamental importancia para la formación de los alumnos en distintas carreras de la Facultad de Ingeniería y la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la UNSJ, ya que constituye uno de los ejes principales en carreras con perfil profesional aplicado. Es por ello la importancia de generar propuestas didácticas tendientes a la mejora de la calidad educativa en esta temática, para alumnos de dichas instituciones. En búsqueda de una enseñanza eficaz y un aprendizaje significativo en EDOL se genera una propuesta didáctica, desde la cátedra Análisis Matemático II de la Lic. en Geofísica y Lic. en Astronomía de la UNSJ, mediante la elaboración de un material didáctico denominado "Trabajo Especial de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias", que tiene como aspectos importantes para su desarrollo: el trabajo colaborativo en grupos pequeños de alumnos, el planteo de modelos simples y de interés para las carreras, la resolución de problemas con EDOL desde distintos enfoques, el empleo de recursos de visualización grafica mediante simulaciones con GeoGebra. A partir de una prueba piloto se pudo apreciar que a partir de este tipo de material es posible desarrollar capacidades en los alumnos para generar su propia experiencia en encontrar soluciones y responder a los interrogantes planteados desde distintas perspectivas. Brinda posibilidades de aproximación al conocimiento desde distintas perspectivas y en forma más equitativa según distintos estilos de aprendizaje. El trabajo en este tipo de entornos fomenta el interés del alumno, aumenta la confianza en ellos mismos, el trabajo colaborativo refuerza las relaciones, y al proponer actividades cada vez más complejas, vemos importantes progresos, mostrándose cada vez más interés en "hacer matemática". Por otro lado, la introducción de nuevas tecnologías en la resolución de problemas con EDO, supone un aliciente más para enfrentarlos, ya que agiliza y ofrece la posibilidad de simular diferentes situaciones, sobre todo en estas décadas, donde el uso de la tecnología constituye parte de la vida diaria de los estudiantes y profesionales de las distintas carreras mencionadas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Borssoi, A. y Werle, L. (2004). Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferencias ordinárias. *Educação Matemática Pesquisa*, *6*(2),91-121.

Camacho, M., Perdomo, J. y Santos, M. (2012). Procesos conceptuales y cognitivos en la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias vía la resolución de problemas. *Enseñanza de las Ciencias*, *30* (2), 9-32.

Cornejo Serrano, M. C.; Villegas Saucillo, J. J.; Serrano García, D. A.; Molina Estrada, A. (2013). Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, simuladas en GeoGebra. *Pistas Educativas Año XXXIII*, 6-27.

Kreyszig, E. (2010). Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*. México, Limusa Wiley.

Morales, Y. (2010). Enfoques y Dificultades en la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. *Revista Premisa*, *12*(45), 25 – 36.

Murillo, F.; Martínez, C.; Hernández, R. (2011). Decálogo para una la enseñanza eficaz. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *9*(1), 13-14.

Rojas Peña, I. (2015). B.B.2 Efecto Doppler en ondas electromagnéticas. *Astronomía Elemental: Volumen II: Astrofísica y Astrobiología.* USM, Apéndice.

Rodriguez Palermo, M. L. (2010). *La investigación acción en educación*. Recuperado de: https://elibros.octaedro.com/appl/botiga/client/img/10112.pdf.

Tobón, S., (2006). *Aspectos Básicos de la Formación Basada en Competencias*. Recuperado de: https://maristas.org.mx/gestion/web/doctos/aspectos_basicos_formacion_competencias.pdf