LOS CAMBIOS DE VARIABLES Y SUS DIFICULTADES EN EL CÁLCULO INTEGRAL

Carlos F. Pesce, Cecilia Crespo Crespo

Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González".

Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico. Ciudad de Buenos Aires, Argentina

FECHA DE RECEPCIÓN: 22/11/18 FECHA DE ACEPTACIÓN: 29/12/18

RESUMEN

La finalidad del presente trabajo es el análisis de las dificultades que presentan los alumnos para la utilización de los cambios de variables adecuados en la resolución de uno de los problemas clave del cálculo infinitesimal: la integración. Se estudiaron las características de la presencia de los cambios de variable en el discurso matemático escolar y situaciones concretas en las que se recurre al procedimiento de cambiar la o las variables con el fin de hacer más sencillo el camino de resolución de problemas clásicos.

ABSTRACT

The purpose of this work is the analysis of the difficulties that students present for the use of the changes of variables by the suitable way in the resolution of one of the important problems of infinitesimal calculus: the integration. Characteristics of the presence of variable changes in school mathematical discourse were studied through concrete situations in which the procedure of changing the variable or variables is used in order to make the path of resolving classic problems easier.

PALABRAS CLAVE:

cambio de variable, cálculo integral, discurso matemático escolar

KEYWORDS:

change of variable, integral calculus, school mathematical discourse

INTRODUCCIÓN

En matemática es usual la realización de una sustitución o un cambio de variable ante la necesidad de simplificar ciertos problemas vinculados a una de las ramas de mayor aplicación práctica: el cálculo diferencial e integral. Esta técnica de transformación está omnipresente, generando dificultades en los estudiantes, aunque en muchas oportunidades no se repare en ellas.

La problemática que da origen a este trabajo ha sido detectada durante las clases de las asignaturas Análisis Matemático I y Análisis Matemático II pertenecientes al plan de estudio de la carrera de profesorado en matemática. El aula es un laboratorio donde se presentan las situaciones de aprendizaje dignas de ser analizadas y reportadas en el afán de sacar conclusiones que permitan generar cambios en el discurso matemático escolar para el abordaje de ciertos temas concretos.

La socioepistemología ha sido el marco teórico bajo el cual se ha realizado la presente investigación, pensando a la matemática como un saber cultural o, en otras palabras, situando a esta disciplina en el rango de conocimiento de generación humana.

Los objetivos del presente trabajo de investigación están centrados en el estudio de los obstáculos que presentan los estudiantes en el proceso de los cambios de variables destinados a la simplificación del cálculo de integrales simples y múltiples. Aunque el cambio de variables está presente en las diferentes ramas de la matemática, la investigación se centrará en los inconvenientes que surgen en el cálculo de integrales en los diferentes cursos de análisis. En efecto, no sólo se analiza el tipo de errores cometidos por los alumnos durante las clases y en los exámenes sino también se indaga la causa de tales equivocaciones sobre la base de los trabajos realizados por los estudiantes en las instancias anteriormente mencionadas.

Marco teórico

El marco teórico que da sustento a la presente investigación es la socioepistemología, entendiendo por tal a la teoría en la que confluyen los aspectos sociales, cognitivos, didácticos y lo epistemológico. El conocimiento matemático se construye a partir de los cuatro componentes indicados.

Enmarcados en la teoría socioepistemológica, se parte de la base de que el conocimiento matemático se va consolidando a partir de las prácticas sociales asociadas (Cantoral, 2013). "La socioepistemología promueve una muy particular forma de estudiar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las Matemáticas: abandona una tradicional mirada centrada en objetos hacia otra centrada en prácticas que es guiada por el constructo teórico de práctica social" (Cantoral, Montiel y Reyes Gasperini, 2015, p.10)

Ofrece un marco adecuado para el estudio, la interpretación y la reflexión sobre los diversos problemas que surgen en las prácticas. De hecho, queda establecido que la matemática puede ser comprendida como una disciplina que se construye socialmente sin perder de vista que se trata de un conjunto de verdades independientes de la actividad del hombre y preexistentes a su aparición en la tierra.

Cabe destacar la reflexión de Castañeda: "la construcción de la matemática responde a ciertos intereses o preocupaciones, ya sea eruditos o socioculturales pero que se crea con el propósito expreso de ser enseñable." (Castañeda, Rosas y Molina Zavaleta, 2006, p.7). Desde el discurso matemático escolar se hace un análisis de la problemática tratada en la presente investigación, apelando a los diferentes aspectos que lo integran. Se consideran los planes y programas de estudio de las asignaturas, los libros de texto, la forma de exposición en el aula así como también las creencias y convicciones de los profesores, estudiantes y académicos en general.

La idea central del trabajo surge de las dificultades que presentan los alumnos frente a los cambios de variables en el cálculo integral. Si bien aquí está en juego la forma en que el docente encara la problemática en el aula y las diversas dificultades que pueden presentar los estudiantes, no puede soslayarse bajo ningún punto de vista el papel de los libros de texto en el análisis realizado. Tal análisis se transforma en un recurso importante de la investigación en matemática educativa.

Los cambios de variable en el discurso matemático escolar

Los cambios de variable aparecen en diferentes situaciones en el estudio del cálculo infinitesimal. Sin embargo, los libros de texto, tutoriales, complementos teóricos elaborados por los docentes, etc., utilizan asiduamente tales cambios de variables aunque carecen de una explicación del por qué de ese recurso.

En general se justifican tales procesos a partir de la simplicidad que traen aparejada en los cálculos, según el problema por resolver. Si bien se ha escrito e investigado sobre el concepto de variable y los usos (Escalante Vega y Cuesta Borges, 2012; Morales Peral y Díaz Gómez, 2003; Saavedra y Silveira, 2011), es escaso lo que se ha encontrado referido estrictamente a los cambios de variable (Flores Hernández, 2011).

Es posible identificar situaciones didácticas diversas que obligan a reflexionar sobre el papel del cambio de variable. Por ejemplo:

- **Cálculo de primitivas:** se presenta dificultad en la elección de la sustitución adecuada a los efectos de transformar la integral indefinida dada en otra que resulta inmediata para resolver
- **Resolución de ecuaciones numéricas:** los alumnos entienden el procedimiento para resolver ciertas ecuaciones trascendentes o algebraicas mediante un cambio de varia-

ble adecuado luego de que el profesor lo ha realizado por primera vez
- **Resolución de ecuaciones diferenciales:** se presenta siempre el interrogante del por qué de la elección del cambio de variable pertinente para transformar la ecuación diferencial dada en alguna de las elementales
- **Desarrollos en serie de potencias:** se puede obtener, en ciertos casos, un desarrollo a partir de otro ya conocido mediante un cambio de variable
- **Transformadas de Fourier y Laplace:** no se logra entender claramente en las aulas lo que representa el paso de la variable temporal a la variable frecuencia (compleja)
- **Parametrización de curvas:** se comprende luego de algunos ejemplos de pasaje a coordenadas cartesianas ortogonales en algunos casos particulares
- **Cambios de coordenadas:** se entiende la utilidad luego de realizar el cambio de variables sin tomar conciencia de lo que representa.

La lista anterior incluye sólo algunos casos en los que se recurre a los cambios de variable con los objetivos anteriormente expuestos. La presente investigación se centra sólo en algunas de las situaciones listadas, profundizando en el problema de la integración.

Se tienen en cuenta los aspectos del discurso matemático escolar a saber: los libros de texto, los alumnos con sus obstáculos o dificultades así como también la mirada del aula desde el perfil del profesor.

En lo que atañe al cálculo de integrales se trabaja con los cursos de las asignaturas Análisis Matemático I y II correspondientes al profesorado en matemática desde los aspectos enumerados en el párrafo anterior. El tema central del análisis está limitado a los cambios de variables en el cálculo de primitivas así como también en las integrales definidas simples, dobles y triples con sus aplicaciones asociadas. También, mediante algunos ejemplos se muestran otros cambios de variables según se ha expuesto anteriormente.

Los alumnos y las dificultades con los cambios de variable en general

La experiencia de aula es otro de los factores de motivación a la reflexión sobre los procedimientos que se enseñan en los diferentes contextos donde se recurre al cambio de variables.

Las situaciones que se presentan año tras año en los cursos de precálculo y cálculo, donde lógicamente, cambia la población estudiantil, realimentan el cuestionamiento del docente.

Las siguientes son algunas de las preguntas recurrentes de los alumnos ante los cambios de variables:

- 1. ¿Por qué se hace tal sustitución y no otra diferente?
- 2. ¿De dónde sale?
- 3. ¿Se trata de un procedimiento de cálculo?
- 4. ¿Por qué se hace un cambio de variable?

Los cambios de variable aparecen en una infinidad de situaciones en las que se procede a resolver un determinado problema.

Los estudiantes comprenden la ventaja del recurso luego de haber sido explicado por el docente, no antes, sobre todo en los principiantes.

En algunos casos se recurre a ese mismo cambio de variable mientras que en otras se requerirá de práctica y pericia en la acertada y atinada elección de tales cambios.

Los alumnos y las dificultades con cambios de variables en el cálculo de integrales

- **a) Cambios de variable en el cálculo de primitivas**

En el cálculo de primitivas, los docentes sugieren a los estudiantes la práctica intensiva para lograr la correcta elección de la sustitución que permitirá el cálculo de manera sencilla. En otros casos de integrales indefinidas la sustitución ya está establecida, justificada por la simplificación de los desarrollos. Los libros de texto tratan algunos casos particulares.

En líneas generales, los alumnos no se cuestionan la necesidad del aprendizaje de tales procesos. Sólo unos pocos se quejan de que deben aprender el procedimiento argumentando que es sólo un trabajo memorístico para saber qué sustitución debe realizarse y en qué casos.

En la figura 1 se observa una incorrecta asignación de los cambios de variables para la resolución del ejercicio propuesto en una evaluación parcial de Análisis Matemático I.

El enunciado del ejercicio es el siguiente:

Calcule: $\int_{0}^{+\infty} x \cdot e^{-x} dx$

Aunque el alumno A1 reconoce que debe integrarse por partes (antes del paso al límite por tratarse de una integral impropia de primera especie), se equivoca en el proceso de integración puesto que deriva. En ese caso no percibe la complicación de los cálculos que devendría si reemplazara con los cálculos correctamente realizados.

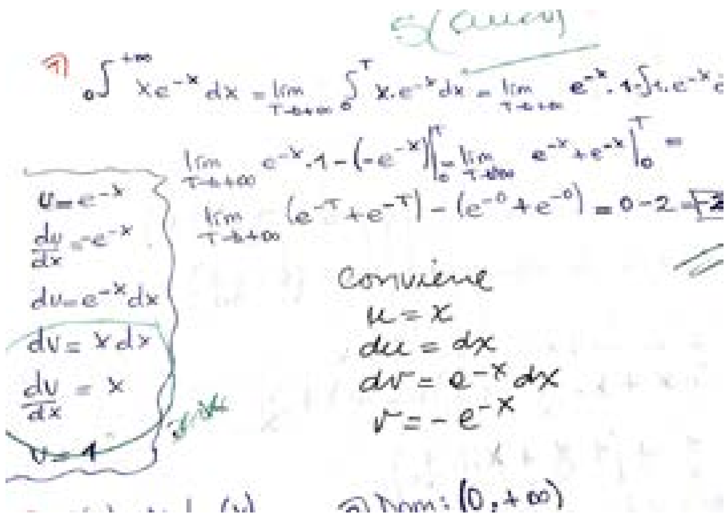

Figura.1: *Asignación errónea de los cambios de variables (Alumno A1)*

El objetivo del ejercicio no es resolver la primitiva sino indicar si la integral impropia converge y, en caso, afirmativo calcularla.

En la figura 2 puede observarse otro caso del mismo error en los cambios de variables. El alumno A2 reconoce que el cálculo de la primitiva debe hacerse mediante el método de integración por partes. Sin embargo deriva en lugar de integrar además de haber realizado los cambios incorrectos.

El enunciado del ejercicio es el siguiente:

Calcule: $\int_{0}^{1} x \cdot \ln x \, dx$

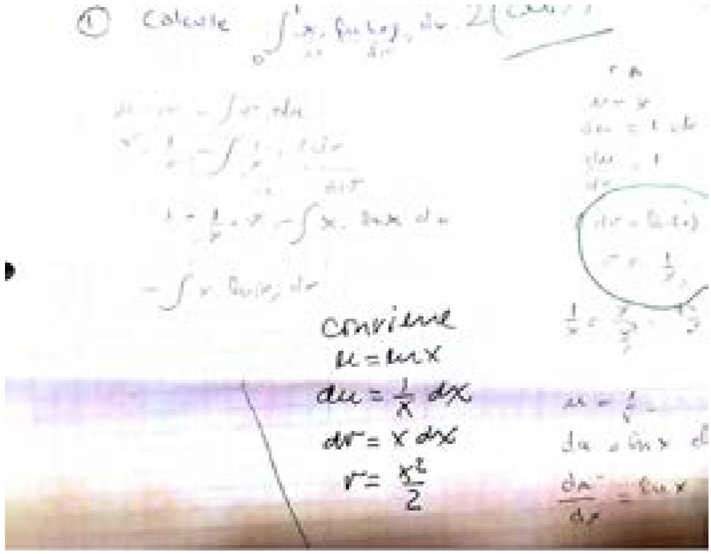

Figura 2: *Asignación errónea de los cambios de variables (Alumno A2)*

La equivocación del alumno A2 es similar a la del alumno A1 porque, al haber cometido el error indicado no puede percibir que la integral que resulta de la fórmula de integración por partes se complica.

Aquí se pone de manifiesto que el alumno no ha comprendido la finalidad de los cambios de variable sino que lo aplica como una técnica carente de significado.

El cálculo que se aprecia en la figura 2 es parte de la resolución de la integral impropia de segunda especie.

La figura 3 muestra un error que se puede atribuir a distracción en general.

El enunciado del ejercicio es el siguiente:

Calcule: $\int Arctg(x)\,dx$

Al pedir el cálculo de esta primitiva pueden evaluarse los dos métodos de integración más elementales: el de sustitución o cambio de variables y el de integración por partes.

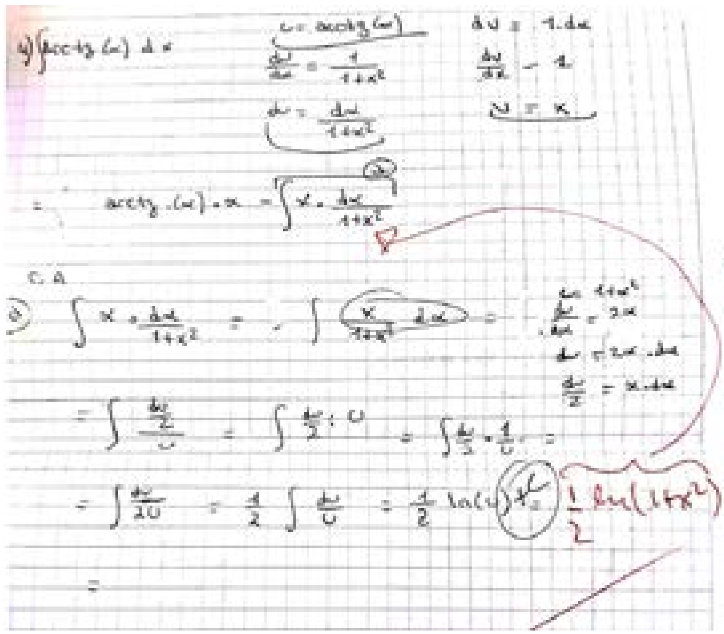

Figura 3: *Olvido en el reemplazo luego del cálculo auxiliar (Alumno A3)*

Si bien las elecciones de los cambios de variables son correctas, el alumno A3 se olvida de reemplazar a la integral por su resultado realizado aparte en carácter de cálculo auxiliar.

Indudablemente el desarrollo de las herramientas informáticas hace posible no sólo el cálculo de primitivas sino la evaluación de las integrales definidas, aún en los casos de funciones que no tienen primitiva conocida.

Podría llegar a pensarse en la eventual pérdida de conocimientos matemáticos por el uso de las aplicaciones en computadoras o celulares. Sin embargo, con un análisis simple, puede comprenderse que se están relegando en parte contenidos de índole puramente procedimental que no contribuyen realmente al conocimiento matemático.

Promover el uso de la tecnología en el aula o fuera de ella no implica, bajo ningún punto de vista, que se dejen de lado totalmente los procedimientos de cálculo porque el alumno debe conocerlos y adquirir práctica en ellos. La cuestión es que no se dediquen varias clases al estudio exhaustivo de los procesos y que se piense en ellos como un fin en sí mismo.

La cantidad de horas totales dedicadas a una asignatura pueden aprovecharse para tratar aquellos temas para los que las herramientas informáticas no sirven. Las discusiones sobre cuestiones teóricas, algunas demostraciones importantes, la resolución de problemas de aplicación en los que el alumno debe pensar en las formas posibles de solución resultan mucho más provechosas que la práctica intensiva de un método de resolución algorítmico.

Por ejemplo, cuando se desarrollan los métodos de resolución de ecuaciones en general (tanto numéricas como diferenciales), resultaría interesante que el fin en si mismo no fuese sólo eso sino que las soluciones brinden respuesta a un problema concreto que debió ser planteado con anterioridad por el alumno. Esta manera de proceder hace que el estudiante evalúe los resultados obtenidos en pos de la coherencia con lo que se pretende calcular.

Se necesita una evolución en el discurso matemático escolar en el sentido de que estos cambios obligan a revisar el contrato didáctico. En realidad, el uso de la tecnología en el aula debe ser concomitante con su uso en evaluaciones. Esto merece un replanteo sobre qué y cómo evaluar para que el sólo manejo holgado de la herramienta informática no baste para la resolución de los problemas correspondientes. Si se evalúan procesos repetitivos, como suele suceder, pensando en el discurso matemático escolar vigente, queda totalmente fuera del análisis la pertinencia de la incorporación de los utilitarios informáticos.

A la luz del adelanto tecnológico y el desarrollo de software de aplicación, resulta prácticamente innecesario el cálculo de la primitiva con la intención de la aplicación de la regla de Barrow para hallar el valor de una integral definida. Aunque se han desarrollado métodos numéricos iterativos de cálculo, hoy se prescinde de ellos explícitamente porque los programas ya efectúan las integrales.

Se deberían repensar las clases para dedicar tiempo a lo que la computadora no puede realizar en lugar de desarrollar en forma sistemática cada uno de los métodos de integración. Asimismo, el docente debería hacer una referencia histórica que justifique el por qué de la búsqueda de la resolución de tales integrales.

En general, a las nuevas generaciones de estudiantes les resulta difícil comprender la existencia de una vida sin computadoras ni celulares. Sin embargo, es importante recordar que el cálculo tiene una antigüedad de más de tres siglos, mientras que la matemática viene desarrollándose desde hace más de veinticinco.

La gran mayoría de los alumnos dispone de las herramientas informáticas. La promoción de su uso en el aula es tarea del docente y en general es bien recibida la propuesta por parte de los estudiantes de los diferentes niveles de enseñanza, sobre todo en el superior. La incorporación de este recurso didáctico complementa la tarea del profesor y, fundamentalmente, permite que el alumno gane tiempo al liberarse del trabajo mental del cálculo algebraico. Por otra parte, se aprovechan las clases para las explicaciones teóricas y los desarrollos de interés para contribuir al aprendizaje.Sin embargo, los programas de cálculo deben usarse con cautela, en especial, si se pretende corroborar un resultado. Téngase en cuenta que la fórmula obtenida mediante cálculo puede ser bien diferente aunque sean equivalentes. Es tarea del estudiante realizar los cálculos necesarios para comprobar si son iguales.

En la figura 4 se observa el uso del utilitario Derive para la resolución de los tres ejercicios propuestos en las evaluaciones.

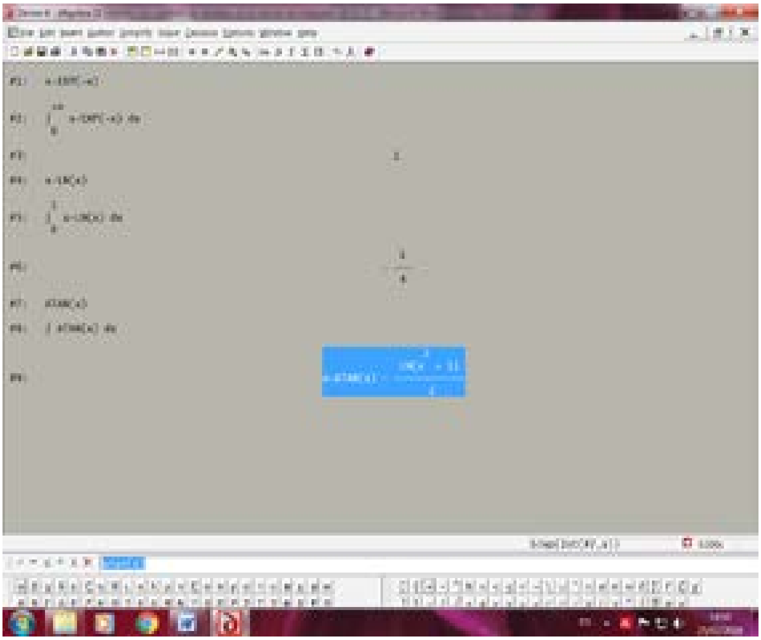

Figura 4: *Resolución de los ejercicios propuestos con Derive*

El alumno debe conocer la sintaxis que utilizan los programas para el ingreso de los datos.

Más allá de las valoraciones personales es indudable que la informática se transformó en un recurso indispensable en las clases de matemática, en especial en las asignaturas de cálculo. A pesar de todo, el docente es reticente a innovar, permaneciendo en la zona de confort. Además, trata de reproducir la manera en que cada uno aprendió.

Los cambios en la metodología y la incorporación de los nuevos recursos debe realizarse gradualmente evaluando los pro y los contra. De ese modo se puede ir estableciendo un cambio en los contenidos y en las secuencias didácticas correspondientes.

- **b) Cambios de variables en el cálculo de integrales múltiples**

En este caso sí es necesario un razonamiento más profundo para decidir el cambio de variables apropiado para la resolución. Sí bien se aprovechan los utilitarios informáticos, es imprescindible el proceso de elaboración por parte del alumno para el planteo del problema a resolver. A pesar de ello, no es necesario hacer la deducción del cambio de coordenadas en cada caso concreto sino establecerlo cuando el problema lo amerite.

Las integrales múltiples con las aplicaciones geométricas y físicas abren un panorama interesante de reflexión y análisis de las dificultades de los alumnos.

Sobre la base de la experiencia de los cursos de cálculo en varias variables, uno de los problemas consiste en la determinación de los límites de integración.

En integrales dobles, el estudiante conoce las coordenadas cartesianas y las polares. Aunque pueda lograr un manejo razonable, se le presentan algunas dificultades, en especial, cuando el extremo superior de integración no es constante sino que depende de la otra variable. El planteo ya trae dificultades a partir del recinto plano dado y la elección de un sistema de coordenadas u otro.

En algunos casos se requiere la proyección sobre alguno de los tres planos coordenados según convenga, con lo cual puede haber errores en la determinación de los límites de integración.

Si el tiempo lo permite, resulta provechoso mostrar la ventaja de un cambio de variables con la resolución del mismo ejercicio en coordenadas cartesianas y el nuevo sistema de coordenadas. Deben elegirse cuidadosamente para que la resolución no sea tan laboriosa que requiera manipular integrales complicadas de resolver.

Aunque el docente demuestre que el cambio de coordenadas requiere del cálculo del módulo del jacobiano de transformación y lo recuerde en cada ejemplo, en el momento de resolver los problemas, hay omisiones en cuanto al factor que debe agregarse en el integrando. Ese olvido redundará en un resultado erróneo.

En el siguiente ejercicio, propuesto en una evaluación parcial en la asignatura Análisis Matemático II del profesorado en matemática, se muestra precisamente tal omisión.

El enunciado del ejercicio es el siguiente:

Calcule la siguiente integral utilizando el sistema de coordenadas más conveniente:

$$\int_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy \quad \text{con} \quad D=\{(x,y)\in\Re^2 / 1\le x^2+y^2\le 4\}$$

En la figura 5, el alumno A4 omitió escribir el jacobiano de transformación. Se trata de la variable ρ, que queda multiplicada al resto del integrando que también ha sido transformado según el cambio de coordenadas correspondiente.

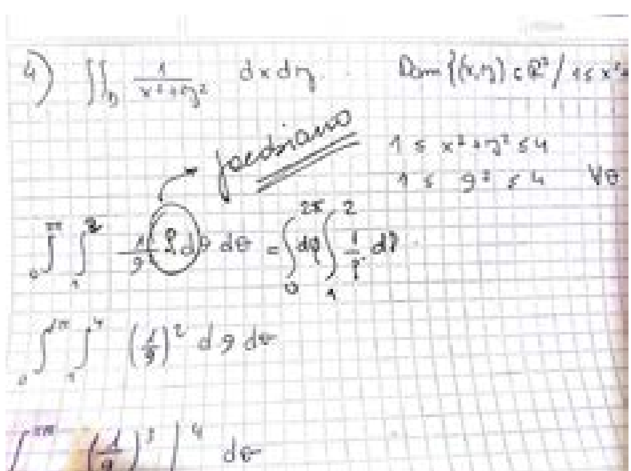

Figura 5: *Olvido del jacobiano de transformación a coordenadas polares (Alumno A4)*

La omisión del factor de cambio de coordenadas también se suele dar en la ejercitación pero aparece especialmente en las evaluaciones, por razones de tiempo escaso y nervios lógicos ante la situación de examen.

El alumno se equivoca también en el límite superior de la segunda integral. Ese error es usual porque se tiene el radio elevado al cuadrado en la ecuación de la circunferencia.

Otro error no tan común puede verse en la figura 6. El alumno A5 se equivoca al reemplazar luego de haber realizado el cambio de coordenadas, sólo en el numerador de la expresión de campo escalar dado.

El enunciado del ejercicio es el siguiente:

Calcule la siguiente integral utilizando el sistema de coordenadas más conveniente: $\int_D \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dxdy$ con el recinto D limitado por las rectas $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ y las circunferencias $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 9$ en el primer cuadrante.

Figura 6: *Error en el cambio de coordenadas (Alumno A5)*

Los límites de integración son correctos y no se ha omitido el módulo del jacobiano de transformación. Sin embargo la expresión resultante no es correcta según lo indicado.

Frente al mismo ejercicio, el alumno A6 escribió correctamente los límites de integración pero omitió el cambio de variables en la integral aunque sí aparece el factor de transformación de coordenadas.

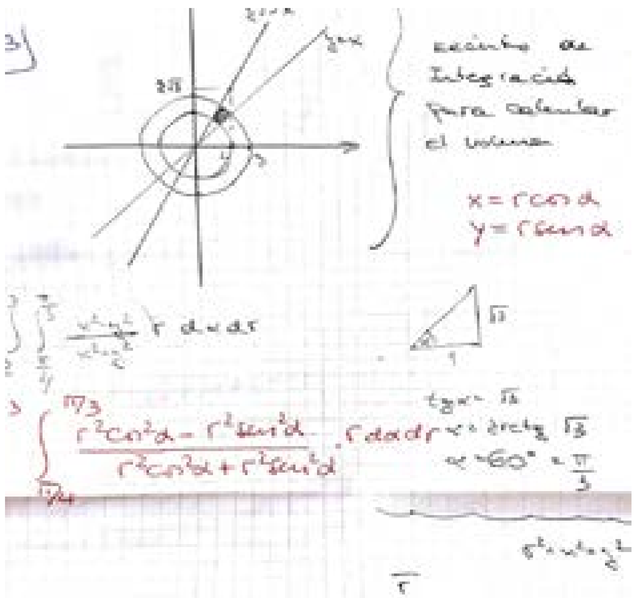

Figura 7: Error en el cambio de coordenadas (Alumno A6)

En la figura 7, se observa cómo el alumno A6 graficó correctamente el recinto de integración, hizo lo propio con los límites pero omitió el cambio de las variables.

Para el cálculo de integrales triples, en los cursos se explican sólo las coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. Aquí se suma otro obstáculo que no está vinculado con el cambio de variables. En efecto, la visualización del recinto cuyo volumen quiere determinarse, en tres dimensiones, agrega una dificultad adicional por un escaso o nulo manejo de la geometría del espacio.

Los graficadores para computadoras y celulares permiten la visualización del recinto de integración. El estudiante debe poseer el conocimiento de geometría analítica básico para comprender cuál es el recinto de integración. Algunos casos resultan sumamente complejos porque alguna de las cuádricas con centro que limitan los recintos se encuentran desplazadas con respecto al origen de coordenadas. La mayor dificultad es la determinación del sólido y su proyección sobre el plano coordenado más conveniente para obtener los límites de integración respectivos.

Se han mostrado los errores más comunes en los estudiantes frente a una instancia de examen parcial. Los alumnos manifiestan las dificultades en la ubicación correcta del recinto así como también en el planteo de los límites de integración.

No sólo los libros de texto de distintas épocas han mantenido la forma de exposición. Al docente se le hace muy difícil desprenderse de lo adquirido en su período de formación y recurre a sus propios apuntes de clase aunque indudablemente encuentre formatos que han caducado.

Algunos comentarios finales

Los cambios de variables en el cálculo de primitivas se tratan en todos los libros de texto de cálculo consultados (Ayres y Mendelson, 2016; Granville, 2009; Larson, 1995; Leithold, 2006; Mataix Aracil, 1939; Pérez González, 2008; Rabuffetti, 1984; Rey Pastor, Calleja, y Trejo, 1969; Rey Pastor, Calleja y Trejo, 1957; Sadosky y Guber, 1984; Stewart, 1999). Sin embargo se ha observado que las publicaciones más modernas no le han dedicado tantas páginas e, inclusive, ha sido relegado a los últimos capítulos. Estos nuevos textos ya hacen referencia a las herramientas informáticas que permiten el cálculo directo. Debido a ello extienden la exposición y las discusiones teóricas en aquellos temas que sí requieren elaboración por parte del alumno. En efecto, las aplicaciones geométricas y físicas de la integral definida son tratadas con sumo detalle.

El grado de importancia de la exposición de los cambios de variable en los diferentes cursos de análisis matemático no ha ido cambiando sustancialmente con el paso del tiempo. Esta actitud conservadora se da particularmente en algunos profesores con muchos años de trabajo que presentan reticencia a la introducción de la herramienta tecnológica en el aula de matemática. Sin embargo, las publicaciones más recientes promueven el uso de la herramienta informática explicando que los resultados obtenidos por cálculo analítico pueden obtenerse fácilmente con los programas de aplicación respectivos.

La dinámica del discurso matemático escolar vigente exige pensar en los cambios que deben realizarse en la forma de exponer los contenidos así como también las secuencias didácticas pertinentes.

Asimismo, ese cambio proviene no solo de la irrupción de la computadora o el celular como recurso didáctico sino también de los cambios en los hábitos de estudio. El libro de texto ha quedado relegado, en parte, por contenidos multimediales cuyas fuentes pueden ser no fidedignas. De este modo el acceso al conocimiento queda fragmentado porque el alumno, en definitiva, aprende procedimientos para resolver sin entender el por qué en la gran mayoría de los casos.

No se ha notado un cambio sustancial en el discurso matemático escolar a lo largo de los años en lo referente al tratamiento de las integrales múltiples. Aunque el proceso de cálculo las reduce al cálculo de integrales simples sucesivas (teorema de Fubini) independientemente de los cambios de variables realizados, se sugiere el uso de tablas de integrales o los programas de cálculo (actualmente) aludiendo que el problema central no es precisamente el cálculo de las integrales reiteradas sino el planteo del problema en sí junto con la elección acertada del cambio de coordenadas que facilite la resolución.

Efectivamente, en los cursos de cálculo más avanzados, se percibe que el discurso matemático escolar se ha mantenido con el devenir del tiempo, tanto en las aulas como en los libros de texto. Esta rigidez se debe a que se trata de temas más avanzados en los que no se reportan tantas dificultades y, en consecuencia, no son motivo de reflexión por parte de los estudiosos de la matemática educativa.

Se concluye que los cambios de variable son procedimientos que facilitan el cálculo. No se ha encontrado otra justificación sobre la base de lo analizado.

Aunque los cambios de variables se tratan en forma implícita como parte del desarrollo de ciertos temas, en la resolución de las ecuaciones diferenciales, por ejemplo, se los menciona aunque se procede en forma directa sin una discusión previa de la factibilidad.

No se ha encontrado registro de alguna metodología específica destinada a los cambios de variable. Los profesores recurren al procedimiento sin mediar una introducción previa aunque se explique el por qué de tal proceso en cada caso particular.

En definitiva en el espectro del discurso matemático escolar, los libros de texto tienen una marcada influencia sobre el resto de los aspectos que lo integran. Los profesores siguen las publicaciones para el armado de sus clases y los alumnos toman como referencia para el estudio la bibliografía sugerida. A pesar de ello y retomando las ideas vertidas en el trabajo, se siguen repitiendo los esquemas de las secuencias didácticas.

Trascendiendo el tema tratado en este trabajo, podría abrirse una nueva línea de investigación en la que se analice el por qué de la reticencia al cambio en general. Habría que indagar en cuestiones más profundas que están vinculadas con la antigüedad docente de profesores, su formación académica, su acceso a artículos de matemática educativa, congresos, charlas y estudios en el área de la matemática educativa.

Se hace imperiosa la necesidad de un cambio en este sentido, es decir, reformular la estructura vigente del discurso matemático escolar, analizándolo desde el punto de vista de la socioepistemología, pues el quehacer matemático es una actividad social que involucra a los diferentes actores del sistema educativo. Los cambios en el discurso matemático escolar se apreciarán en la medida que las nuevas generaciones de docentes asimilen las nuevas formas de exposición de los libros de texto, incorporen los nuevos recursos didácticos y reflexionen sobre el contexto en el que se encuentran los alumnos.

Considerando que se han perdido, en parte, los hábitos de estudio tradicionales, los profesores deben promover el uso de textos específicos, sugerirlos en sus clases y promover las ventajas del libro de texto. La coherencia de exposición de un buen texto complementa una clase y contribuye a generar una base sólida sobre determinados conceptos que sí lo ameritan.

Los estudiantes, apremiados por la falta de tiempo o por carencia de método, recurren a videos cortos explicativos que pueden resultar interesantes y útiles si provienen de docentes avezados en el tema. La desventaja de esta forma de acceder al conocimiento es la fragmentación y la apropiación de métodos que en la gran mayoría de los casos no están debidamente fundamentados por brevedad del tiempo de exposición de los mismos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ayres, F. y Mendelson, E. (2016). *Cálculo.* México: Impresiones Editoriales F.T.S.A. de C.V.

Cantoral, R. (2013), *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*, Mexico: Gedisa.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes Gasperini, D. (2015a). Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la teoría socioepistemológica. AIEM. *Avances de investigación en Educación Matemática 8, 9-28.*

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes Gasperini, D. (2015b). El programa socioepistemológico de investigación en matemática educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 18* (1), 5-17.

Castañeda, A., Rosas, A. y Molina Zabaleta, G. (2006). El discurso matemático escolar de los logaritmos en libros de texto. *Premisa 11* (44), 3-18.

Escalante Vega, J. y Cuesta Borges, A. (2012). Dificultades para comprender el concepto de variable: un estudio con estudiantes universitarios. *Educación Matemática 24* (1), 107-132.

Flores Hernández, R. (2011). El cambio de variable en la transformada de Laplace: resultado de una investigación. P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 24, 449-458. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Granville, W. (2009). *Cálculo diferencial e integral*. Mexico: Limusa.

Larson, R. (1995). *Cálculo y geometría analítica.* Madrid, España: Ed. Mc Graw - Hill.

Leithold, L. (2006). *El cálculo.,* México: Oxford University Press.

Mataix Aracil, C. (1939). *Análisis algébrico e infinitesimal*. Madrid, España: Nuevas Gráficas S.A.

Morales Peral, L. y Díaz Gómez, J. (2003). Concepto de variable: dificultades de su uso a nivel universitario. *Mosaicos Matemáticos (11)*, 109 - 114.

Pérez González, F. (2008). *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable.* Granada: Universidad de Granada

Rabuffetti, H. (1984). *Introducción al análisis matemático (Cálculo 2).* Buenos Aires: El Ateneo.

Rey Pastor, J., Calleja, P. y Trejo, C. (1969). *Análisis Matemático. Volumen I. Análisis algebraico. Teoría de ecuaciones. Cálculo infinitesimal de una variable.* Buenos Aires: Kapelusz.

Rey Pastor, J., Calleja, P. y Trejo, C. (1957). *Análisis Matemático. Volumen II: Cálculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones.* Buenos Aires: Kapelusz.

Saavedra, J. y Silveira, A. (2011). Algunas dificultades del concepto de variable. Reportes técnicos. 11 - 07. URFI - INCO

Sadosky, M. y Guber, R. (1984). *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral*. Buenos Aires: Alsina.

Stewart, J. (1999). *Cálculo, conceptos y contextos.* México: Internacional Thompson Editores.