

LAS DEFINICIONES DE RAZÓN Y PROPORCIÓN PARTE II UN ESTUDIO COGNITIVO

María Colina y Carmen Valdivé

Unidad Educativa “Carbonero”,
Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado (UCLA),
Venezuela

mariucolina@hotmail.com, carmenv@ucla.edu.ve

RESUMEN	ABSTRACT
<p>El estudio forma parte de una investigación que analiza las definiciones que tienen los estudiantes de Matemática I del Programa de Economía de los conceptos de razón y proporción fundamentados en la teoría cognitiva Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), empleando como herramienta los esquemas conceptuales y la reconstrucción de la evolución histórica de tales conceptos. Tiene su génesis en el interés por determinar la manera en la que los estudiantes aprenden la teoría de la derivada, más aún, de la aplicación de la derivada a la economía entendida como el límite de un cociente incremental o el límite de la tasa de cambio promedio, lo que constituye pilar fundamental para su formación profesional.</p>	<p>The study is part of a research that analyzes the definitions that students of Mathematics I of the Economics Program have of the concepts of rate and proportion based on the cognitive theory Advanced Mathematical Thinking (AMT), using as a tool the conceptual schemes and the reconstruction of the historical evolution of such concepts. It has its genesis in the interest to determine the way in which students learn the theory of the derivative, even more, from the application of the derivative to the economy understood as the limit of an incremental quotient or the limit of the average exchange rate, what constitutes a fundamental pillar for their professional training.</p>
PALABRAS CLAVE:	KEYWORDS:
<p>razón y proporción, pensamiento matemático avanzado, esquema conceptual, Cálculo diferencial</p>	<p>rate and proportion, advanced mathematical thinking, conceptual scheme, Differential Calculus</p>

1. INTRODUCCIÓN

Los conceptos de razón y proporción constituyen sin duda alguna tópicos fundamentales para el estudio de muchas de las temáticas trabajadas en los diversos niveles y modalidades de la educación en Venezuela. Resulta inquietante que un concepto tan básico y a la vez tan complejo, no se le brinde la importancia que se merece en el aula dentro del campo de la Educación Matemática y más aún que no se efectúe la trasposición para articularlo con otros objetos matemáticos desde la praxis educativa.

Ahora bien, los conceptos antes mencionados, los encontramos de forma implícita en mucho de los contenidos de matemática que son abordados en el subsistema de educación universitaria, como lo es, por ejemplo, el concepto de derivada como un límite de cociente incremental, que es una pieza de gran importancia que forma parte de la base fundamental del estudio del Cálculo Diferencial y

posteriormente del Cálculo Integral. Sin embargo, los conceptos de razón y proporción no aparecen en el currículo de las distintas universidades que se encuentran en Venezuela. De hecho, tampoco se encuentran en el currículo del subsistema de educación básica. En torno a esto Pérez (2006) expone lo que se escribe a continuación:

En el currículo escolar actual de la Segunda Etapa de Educación Básica, existen diversos contenidos matemáticos de gran importancia que no tienen prosecución en la organización de los contenidos de los grados sucesivos de la Tercera Etapa de Educación Básica. Uno de estos contenidos fundamentales es el de la proporcionalidad, abordado en los grados 5° y 6° de la Segunda Etapa, pero que no se encuentra presente en forma explícita en los contenidos del 7° y 8° Grados de la Tercera Etapa de Educación Básica.

De acuerdo a lo observado por Pérez (2006) los docentes de Educación Básica, rara vez plantean problemas en los que está inmerso (en forma gradual) el razonamiento proporcional, puesto que simplemente hacen uso de algoritmos, como por ejemplo, proceden mediante despejes. Esto causa, según Oller y Gairín (2013) que estos muestren dificultades cuando utilizan esos conceptos. Salazar y Díaz (2009) explican en su trabajo de investigación que “en una mirada histórico-epistemológica, las magnitudes, de gran importancia en los tiempos de Euclides, hoy prácticamente han desaparecido de la enseñanza” (p.209). Por su parte, Lois, Milevicich, Gelsi y González (2009) en su estudio acerca de la derivada como función sostienen lo siguiente:

A los estudiantes les resulta difícil, reconocer, en un problema referido a razones de cambio, la necesidad de un proceso de derivación. En este tipo de problemas, los alumnos tienen dificultades, no sólo en relacionar ambas magnitudes, sino también en darle sentido a la razones de cambio que intervienen en la ecuación. En general, de modo tradicional, se presenta el concepto de derivada como la pendiente de la recta tangente, lo cual presupone que la noción de pendiente ya es conocida por los alumnos, pero luego se pasa al tratamiento algebraico y teórico, donde se asocia la tangente al resultado de un proceso al límite de una familia de rectas secantes (p.915).

Pérez (2006) en torno a lo anteriormente expuesto afirma lo siguiente:

La noción de proporcionalidad reviste gran importancia no sólo en el dominio de las actividades matemáticas de la escolaridad obligatoria, sino también en numerosas aplicaciones de la ciencia y la técnica, por ejemplo en Física (permite estudiar y explicar las relaciones entre magnitudes), en Química (se aplica al equilibrar las mezclas), en Geografía (se utiliza en el control de ciertas situaciones a estudiar, utilizando escalas) (p.236).

De acá, emerge la motivación de llevar a cabo una investigación inherente a las ideas que poseen los estudiantes asociadas a los conceptos de razón y proporción, con el fin de vislumbrar las dificultades en el proceso de aprendizaje de los conceptos donde se les involucre, como por ejemplo, el de derivada, con el propósito de aproximarnos al pensamiento matemático que posee el estudiante en lo relativo a estos constructos, lo cual constituye de manera subjetiva, una oportunidad para que los estudiantes reflexionen sobre su proceso de aprendizaje y los profesores por su parte, acerca de las estrategias que manejan frecuentemente dentro de sus espacios de enseñanza.

Así, una pieza fundamental de la investigación que se desarrolla es la Teoría Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). De esta teoría, se empleará como herramienta los esquemas conceptuales en su acepción cognitiva, para ello se tiene la tarea de descubrir y describir las ideas que tiene el estudiante acerca de los conceptos de razón y proporción y la manera en la que relaciona estos con otros constructos desde su área de interés académico, llevándonos esto a preguntarnos ¿presentan esquemas conceptuales formales e informales asociados a estas definiciones los estudiantes de la asignatura de Matemática I del Programa de Economía del DCEE-UCLA?. Así, el propósito central de la investigación que se presenta en este manuscrito es aproximarnos a los esquemas conceptuales previos en los estudiantes de un curso de Matemática I del Programa de Economía de la UCLA asociados a las definiciones de razón y proporción.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Pensamiento Matemático Avanzado (PMA)

El estudio que se desarrolla está enmarcado en el llamado Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), la cual es una aproximación teórica cognitiva que ha sido desarrollada según Valdivé y Garbin (2008) por Tall (1991, 1992a, 1992b, 1995, 2001, 2004, 2005) y Dreyfus (1990, 1991). Sánchez (2010) se refiere a esta teoría explicando que “el PMA es una teoría cognitiva que busca describir la naturaleza del conocimiento matemático, así como también, los procesos cognitivos que emplea el estudiante para el aprendizaje de algún conocimiento matemático” (p.05). Dentro de la teoría de PMA nos interesan particularmente los esquemas conceptuales, como herramientas de investigación, los cuales constituirán la base fundamental de la investigación que se presenta.

Esquema Conceptual

Un esquema conceptual es la idea que tiene en su mente una persona sobre un concepto u objeto matemático. En torno a esto, Valdivé (2008) explica que la porción del esquema conceptual que es construido a través de las deducciones de las definiciones formales es llamado esquema conceptual formal y la porción del esquema conceptual que es construido de la experiencia natural del día a día con ejemplos, imágenes, procedimientos y procesos para darle significado a la definición formal, es

llamado esquema conceptual informal. Además, Chin y Tall (citado por Valdivé y Garbin; 2008) explican que en las investigaciones actuales, se observa que se establece una diferencia entre el esquema conceptual previo, *met-before* (se considera asociado a los conocimientos o experiencia previa y que es evocada para darle sentido a una situación) y un esquema conceptual. En concordancia con lo anterior, Valdivé (2008) clasifica a los estudiantes de acuerdo a las ideas o argumentaciones que presente en torno al algún concepto de la forma que sigue: (a) Estudiante informal, es aquel que utiliza lenguaje natural, representaciones e ideas intuitivas para justificar la mayoría de sus respuestas, (b) Estudiante formal, es aquel que apela a definiciones y teoremas matemáticos correctamente sin usar representaciones, lenguajes naturales o intuiciones en la mayoría de sus respuestas, (c) Estudiante mixto/puro, es el que usa ideas formales en unas respuestas y usa ideas informales en otras. Y (d) Estudiante puro, es el que en una misma respuesta mezcla ideas formales con informales en la mayoría de sus justificaciones.

Más aún la autora (ob. Cit.), explicita que un esquema conceptual demanda labores, circunstancias y problemas que lo hacen emerger, sugiriendo que se deben categorizar atendiendo a los siguientes aspectos: (a) Las ideas que el sujeto asocia al concepto, (b) Las representaciones asociadas que hacen emerger la noción y representaciones propias de la noción. Ambas son imágenes (dibujos, gráficas, palabras, gestos, símbolos) que el sujeto percibe del objeto o concepto y que evoca ante una situación problema o tarea, (c) Los procedimientos (algorítmicos, aritméticos, algebraicos, geométricos, manipulaciones simbólicas) que el sujeto activa ante la tarea cognitiva, (d) Las ideas más representativas asociadas al objeto matemático, (e) El contexto (geométrico, analítico, algebraico, aritmético o físico) que el sujeto asocia ante la situación y (f) Los métodos (matemáticos) que el sujeto implementa para resolver el problema.

Definición de un Concepto

Valdivé (2008) define concepto como una secuencia de palabras o símbolos. Es decir, que un estudiante puede tener una definición informal o formal de un concepto matemático, los cuales serán válidos. Tall y Vinner (1981) afirman que, la definición de un concepto es una secuencia de palabras o una definición verbal que explica el concepto con precisión. Además, argumentan que es posible distinguir entre las definiciones formales, aceptadas por la comunidad científica de los matemáticos, y las definiciones personales que se utilizan como construcción de una definición formal.

METODOLOGÍA

La investigación se enmarca bajo el enfoque cualitativo, dado que se orienta al conocimiento de un objeto matemático desde la subjetividad. De carácter interpretativo, dado que se estudian a los actores, respetando sus actuaciones, puntos de vistas para poder encontrar elementos que permitan determinar las dificultades que se presentan en una situación matemática (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). Además, es de tipo exploratoria ya que el objeto en cuestión, en este caso, los conceptos de razón y proporción, ha sido poco estudiado. Los actores sociales investigados son

25 estudiantes, con edades comprendidas entre los 18 y 22 años, del programa de Economía de la UCLA, que cursan la asignatura de Matemática I durante el lapso académico II-2015. Para el análisis cognitivo se utilizó el cuestionario para explorar y seguidamente describir los esquemas conceptuales asociados a la noción de razón y proporción que poseen los estudiantes el mismo fue validado previamente por dos expertos en el área a fin de alcanzar resultados confiables. El instrumento se le aplicó al iniciar el curso y se reaplicó luego de finalizar el tema correspondiente a la Derivada y sus aplicaciones a la Economía. El cuestionario inicial estuvo conformado por 24 ítemes. El cuestionario final quedó estructurado por 16 ítemes.

El propósito de las interrogantes es indagar la capacidad del estudiante de percibir la idea d. Se pretende determinar la manera en que los estudiantes asocian las razones y proporciones a otros objetos matemáticos a fin de irlo conduciendo a los conceptos que nos atañen para la investigación.

La información recabada con la aplicación del cuestionario inicial y la reaplicación del cuestionario efectuada el 09 de Junio de 2016 permitió seleccionar a los informantes clave a quienes se les efectuó una entrevista semi-estructurada con los propósitos de estudiar la evolución de los esquemas conceptuales met-before; y de estudiar cómo interactúan las ideas previas a medida que el estudiante está en contacto con la teoría formal de la Derivada. Estudio que requiere otro artículo.

Metodologías Específicas de Análisis

La metodología de recolección y análisis de la información se desarrolla a través de cuatro actividades, acordes con el método inductivo, siguiendo lo propuesto por Rodríguez, Gil y García (1999) y en concordancia a la metodología propuesta por Valdivé y Garbin (2008).

Actividades de Análisis

Fragmentación de la información

Se sintetiza la información en una matriz diseñada a manuscrito donde se recogen las respuestas suministradas por los actores sociales en el cuestionario inicial.

Identificación y clasificación de las unidades de análisis.

Las respuestas de los estudiantes se separaron caracterizándolas de acuerdo al tipo de ideas formales, informales o mixtas que estos expusieron. De acá, los actores se clasificarán como formales, informales, puros o mixtos/puros, considerando para ello la cantidad y el tipo de respuestas dadas por estos en el cuestionario.

Disposición y Organización de la Información.

Las respuestas de los estudiantes se organizaron en matrices y redes sistémicas. Las redes se estructuran según Valdivé y Garbin (2008) de la siguiente manera:

en forma de árbol con ramas que se subdividen en “clases” (se usa como formalismo la barra (|), que son categorías que se excluyen entre ellas), y en “aspectos” (se usa la llave ({} para indicar que son categorías no excluyentes). Con la llave (}) se indica que la nueva categoría incluye las anteriores. Al final de cada rama aparece el nombre del matemático representativo de cada categoría y/o subcategoría (p.423).

Descripción estructurada: Hallazgos.

Para cada pregunta del cuestionario se utilizó como sistema de representación las redes sistémicas en el análisis de las respuestas del cuestionario inicial emitidas por los estudiantes, lo cual permitió acercarse a los esquemas conceptuales cognitivos, seguido de cada red sistémica se describen los hallazgos. Además, se identifican los esquemas conceptuales evocados por los actores sociales y se aplica la caracterización de los esquemas conceptuales propuesta por Valdivé (2008) la cual se muestra en el siguiente apartado.

Análisis descriptivo del cuestionario inicial

Se observó diversidad de respuesta al aplicar el cuestionario inicial al grupo de estudiantes de Matemática I del programa de Economía. No obstante, un porcentaje significativo de

respuestas fueron dejadas en blanco por los estudiantes o explicitaron desconocer la respuesta a la interrogante. Se presenta a continuación una muestra de la estructura del análisis descriptivo que se le realizó a cada pregunta cuya disposición se compone primeramente por la pregunta seguidamente el propósito que esta persigue y posteriormente el análisis, donde se destacan las ideas formales e informales asociadas a los conceptos de razón y proporción, así como los procedimientos empleados para abordar la interrogante por el, la o los actores ya que esta información permite conocer la perspectiva que posee o poseen acerca de los objetos en estudio (usando letra itálica (cursiva) para destacar las palabras textuales argumentadas por los estudiantes). A continuación se detalla sólo el análisis de 5 preguntas seleccionadas por su relación con la intención de que lo que se desea mostrar en este artículo.

Análisis Descriptivo de la Pregunta N° 05.

A un obrero que percibe un sueldo de Bs. 9650 se le aumenta su salario en un porcentaje de 20%. ¿A cuánto ascenderá su paga con tal aumento? El propósito de este ítem es pretender detallar en los estudiantes procedimientos como la técnica de la regla de tres aplicada a porcentajes que hagan emerger el concepto de proporción.

Análisis.

Se observa que 21 estudiantes (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25) abordan el planteamiento justificando sus respuestas mediante ideas informales. Los estudiantes (1,

2, 7, 11, 13, 14, 16, 18, 25) expresan a través del lenguaje natural diversas argumentaciones, sin justificar el resultado que obtuvieron, que en el caso de los estudiantes (1, 2, 11, 13, 16, 18) es incorrecta. Por ejemplo, el estudiante (18) esboza su idea de la manera siguiente:

(18): *Sumándole el 20% que sería 420 más su sueldo cobrará 10070.*

Mediante procedimientos aritméticos los estudiantes (4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 19, 20, 21, 23, 24) determinan de forma acertada o desacertada el resultado. La mayoría de estos jóvenes (que procedió aritméticamente) determina el resultado correcto con una técnica similar a la regla de tres aunque no se encuentra escrita de forma explícita en sus argumentaciones. Sólo 4 estudiantes (3, 15, 17, 22) no respondieron y/o indicaron desconocer la respuesta a esta interrogante.

<p>A un obrero que percibe un sueldo de Bs. 9650 se le aumenta su salario en un porcentaje de 20%. ¿A cuánto ascenderá su paga con tal aumento?</p>	<p>Lenguaje natural (sin justificación)</p>	<p>Su aumento sería de 1930 Bs y su sueldo sería 11580 Bs } 7, 14, 25</p>
		<p>Al obrero se asciende un porcentaje de 20% le llega un sueldo 9680* } 11</p>
		<p>Sumándole el 20% que sería 420 más su sueldo, cobrará 10070* } 18</p>
		<p>38600BS, aumenta 4 veces* } 1</p>
		<p>1930-11580 es el sueldo ascender } 2</p>
		<p>Aumenta a 11450Bs* } 13</p>
	<p>Su paga con el aumento asciende a 48350* } 16</p>	
	<p>Lenguaje aritmético</p>	<p>$9650 \cdot 0,20 = 1930 + 9650 = 11580$ } 4, 9, 12, 24</p>
		<p>$9650 \cdot 0,20 = 1930 *$ } 5, 8, 21</p>
		<p>$9650 / 100 \times 20 = 1930$ } 6, 23</p>
		<p>$9650 \times 1,20 = 11580$ } 10</p>
		<p>$9650 \times 20\% = 1930 *$ } 19</p>
	<p>$\frac{9650}{20} = 19300 *$ } 20</p>	
<p>No responde y/o desconoce la respuesta } 3, 15, 17, 22</p>		

*** Respuesta errada**

Análisis Descriptivo de la Pregunta N° 07: ¿Qué es una razón?

La intención de esta interrogante es conocer la definición del concepto de razón evocada por el estudiante.

Análisis. En este ítem se observó que 3 estudiantes (4, 15, 22) apelan a la definición formal del concepto de razón expresando que es una relación entre magnitudes coincidiendo con las ideas que poseían los pitagóricos en relación a este concepto. En este mismo orden de ideas, se tiene que 11 estudiantes (1, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 20) emplean argumentos informales afirmando los estudiantes (1, 5, 13, 16) que es un resultado, lo cual es erróneo. Asimismo, los estudiantes (8, 9, 10, 11, 12, 14, 20) exponen que es una justificación escribiendo mediante lenguaje natural que una razón es una explicación de porqué sucede algo. Por otra parte, un total de 11 estudiantes (2, 3, 6, 7, 17, 18, 19, 21, 23, 24, 25) no respondieron y/o indicaron desconocer el concepto.

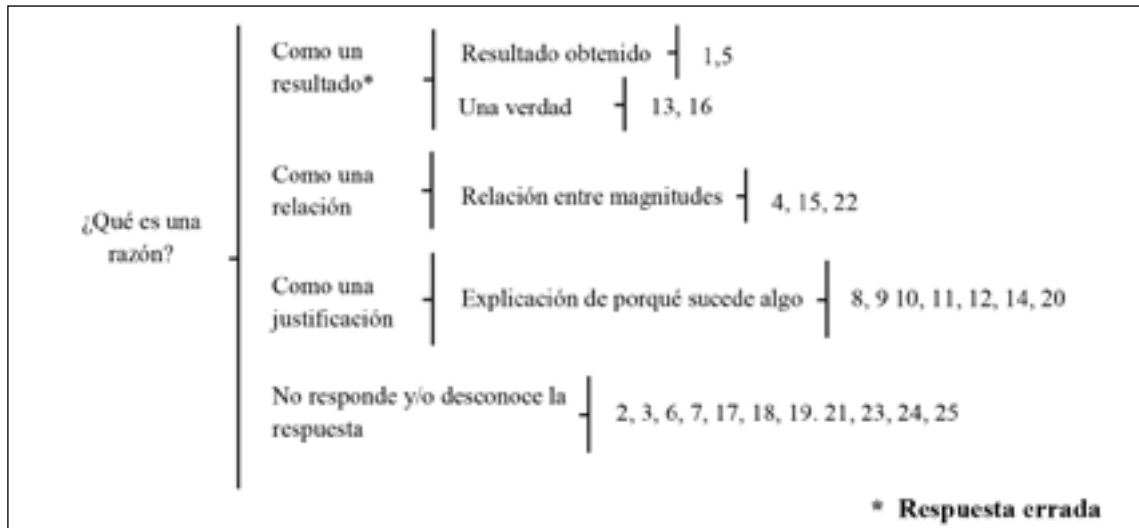


Figura 2:
Red Sistémica de las respuestas de los estudiantes al ítem 7

Análisis Descriptivo de la Pregunta N° 09: ¿Qué significado matemático le sugiere el término proporcionalidad? Esta pregunta tiene como intención conocer la definición que el término trae a la memoria del estudiante.

Análisis. Al efectuar la revisión de las respuestas para esta pregunta se tiene que 15 estudiantes (1, 2, 4, 5, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 22, 25) contestan de manera informal, presentando el significado de la proporcionalidad desde diferentes perspectivas. Del grupo anteriormente mencionado 4 estudiantes (1, 13, 22, 25) sugieren que representa una medida, exponiendo el significado como sigue:

Tamaño o porción de una cantidad

El estudiante (2) dice que la proporcionalidad es un porcentaje. Por su parte, los estudiantes (4, 5) señalan en cuanto al término que todo podría dividirse en partes. En contraste, el estudiante (11) nos permite inferir que para él, la proporcionalidad es un resultado, argumentando que:

(11): *Proporciona la cantidad de alguna ecuación*

En otro orden de ideas, los estudiantes (7, 10, 12, 14, 15, 16, 19) conciben a la proporcionalidad como una relación comparativa, pero no explicitan que es lo que se compara. En este caso, ninguno de los estudiantes exhibe el significado del término de forma acertada. Sin embargo, estos últimos hacen referencia a ideas intuitivas que hacen emerger la definición de proporcionalidad de Eudoxo que se mantiene vigente hasta la actualidad. En este ítem los estudiantes (3, 6, 8, 9, 17, 18, 20, 21, 23, 24) no respondieron y/o explicitaron desconocer la respuesta.

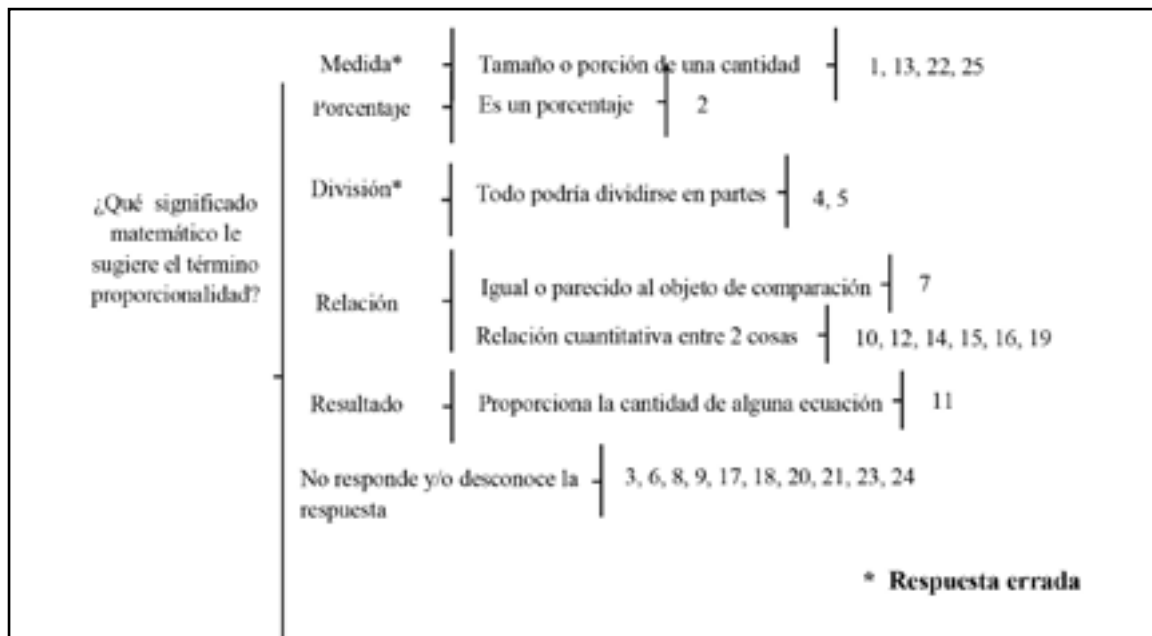


Figura 3:
Red Sistémica de las respuestas de los estudiantes al ítem 9

Análisis Descriptivo de la Pregunta N° 12

Determine la razón de cambio promedio de los derechos de matrícula y gastos adminis-

trativos en instituciones de educación superior durante dos años, haciendo uso del siguiente gráfico: El propósito de la interrogante que precede es verificar la comprensión del concepto en un problema aplicado a la economía.

Análisis. Se encontró que en este ítem 4 estudiantes (8, 15, 19, 23) contestaron al planteamiento mediante lenguaje natural realizando un razonamiento lógico a través de su intuición, el cual resulta errado. Por ejemplo, los estudiantes (15, 19, 23) argumentaron su respuesta de la manera siguiente:

Por cada 2 años aumenta 200\$ la matrícula

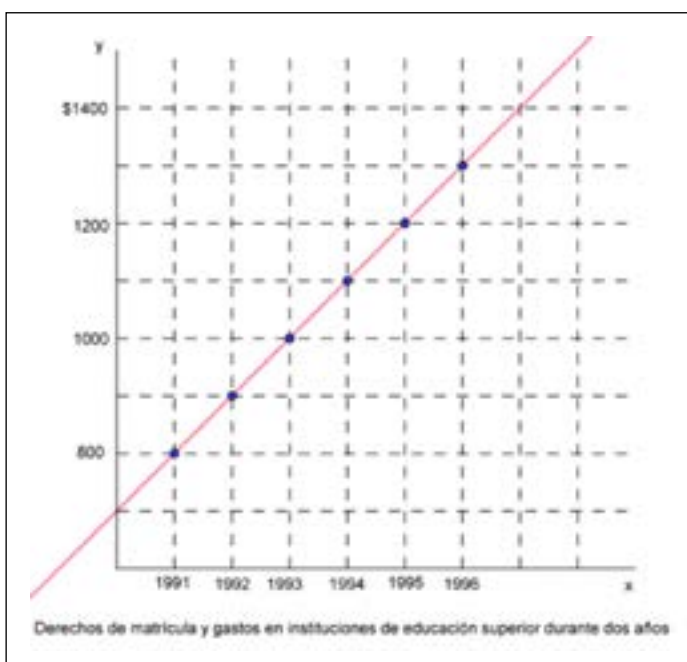


Figura 4:
Situación del problema

En este ítem, estos 4 estudiantes (8, 15, 19, 23) se categorizan como informales dado que aunque no justifican su respuesta vislumbran una relación entre los dos valores que se plantean. Por su parte, el resto de los jóvenes que conforman los 25 estudiantes no respondió y/o contestó aludiendo que desconoce la respuesta.

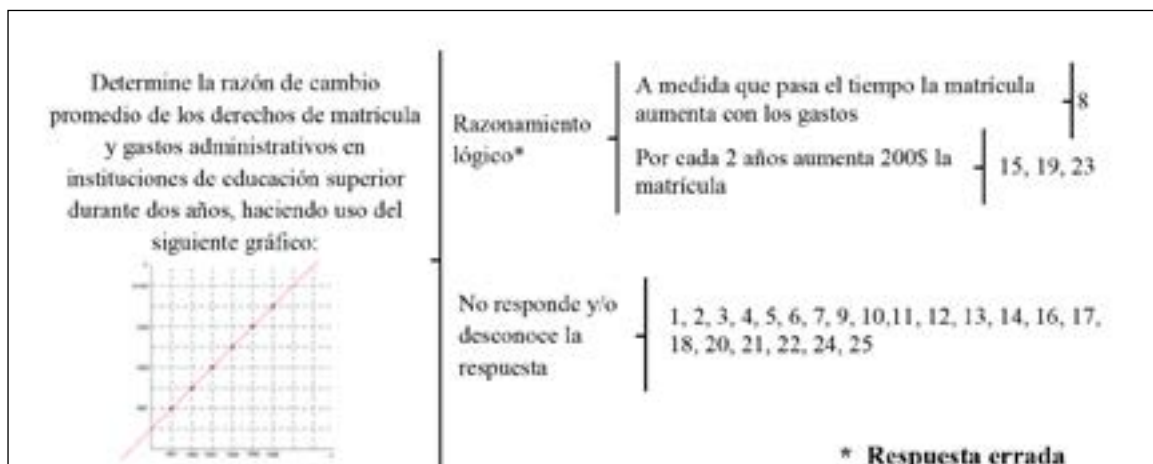


Figura 5:
 Red sistémica de las respuestas de los estudiantes al ítem 12

A partir de las redes sistémicas y el análisis descriptivo de cada una de las respuestas del cuestionario inicial dada por los estudiantes de Matemática I, se extraen seis esquemas conceptuales, cuatro de estos previos (en esta investigación al hacer referencia al esquema conceptual Met-before se usara las iniciales ECM_n, donde “n” representa el número del esquema conceptual Met-before), los cuales son: ECM₁: La razón asociada a una magnitud aritmética; ECM₂: La razón asociada a una magnitud geométrica; ECM₃: La razón asociada a la regla de tres; ECM₄: La razón asociada a una ecuación, EC₁: La razón asociada a relaciones distancia-tiempo y EC₂: La razón asociada a la definición de derivada

El análisis realizado a las respuestas de los 25 estudiantes participantes de la aplicación del cuestionario, permite vislumbrar las ideas, representaciones y procedimientos utilizados para resolver los planteamientos matemáticos, así como los conceptos que asociaron y los contextos desde donde abordaron la situación. Seguidamente, se presenta la caracterización de los 6 esquemas conceptuales.

Caracterización del ECM₁ : La razón asociada a una magnitud aritmética

Ideas: Relación entre valores numéricos enteros con significados de fracción, cociente o número racional.

Representaciones que la hacen emerger: a/b ; $\frac{18}{27}$ y $\frac{27}{18}$

Contexto: Aritmético.

Procedimientos: Aritmético: cálculo de cociente.

Conceptos asociados: fracción, números racionales, números enteros, división.

Caracterización del ECM₂: La razón asociada a una magnitud geométrica

Ideas: Comparación entre las áreas del polígono y del círculo.

Representaciones que la hacen emerger: Gráfica de un polígono inscrito en un círculo.

Contexto: Geométrico

Procedimientos: Geométrico: Relacionar el área del polígono con la del círculo.

Conceptos asociados: Círculo, polígono, área.

Caracterización del ECM₃: La razón asociada a la regla de tres

Ideas: establecer relación entre razones.

Representaciones que la hacen emerger:

60 m 1h; $9650 \times 0,20 = 1930$

4 m..... x $1930 + 9650 = 11580$

Contexto: Aritmético

Procedimientos: Aritmético: Regla de tres, cálculo de porcentaje

Conceptos asociados: porcentaje, propiedad de las proporciones.

Caracterización del ECM₄ : La razón asociada a una ecuación

Ideas: Comparar razones

Representaciones que la hacen emerger:

$$\frac{24}{3} \cdot \chi = 96 \quad \chi = \frac{96}{24} = \frac{288}{24}$$

Contexto: Aritmético y algebraico.

Procedimientos: Aritmético: cálculo de la razón.

Conceptos asociados: Despeje, incógnita, división, multiplicación, propiedades de las proporciones.

Caracterización del EC₁: La razón asociada a relaciones distancia-tiempo

Ideas: Movimiento uniforme

Representaciones que la hacen emerger: establecer relación entre la distancia y el tiempo para un movimiento uniforme.

Representaciones asociadas a la noción: $v = \frac{d}{t}$ $\frac{t: \overset{M_{uf}}{\bullet} \text{-----}}{D: \text{-----}}$

Contexto: Algebraico, aritmético y físico.

Procedimientos: Aritmético: cálculo de la razón, algebraico: representación de la relación entre las magnitudes distancia-tiempo.

Conceptos asociados: distancia, tiempo, desplazamiento, movimiento uniforme

Caracterización del EC₂: La razón asociada a la definición de derivada

La información suministrada por los estudiantes que contestaron esta interrogante no es suficiente para caracterizar el esquema conceptual.

Clasificación de los Actores

A continuación, luego de examinar mediante el análisis descriptivo anteriormente expuesto las respuestas proporcionadas por cada estudiante en el cuestionario se obtiene de

esta manera una categorización según las ideas previas usadas en cada respuesta, asociadas a la noción de razón y proporción, que se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 01. Cuadro de Tipología de los Estudiantes

Categoría	Estudiantes
Estudiante Formal	-----
Estudiante Informal	(1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13, 14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25)
Estudiante Mixto	-----
Estudiante Mixto Puro	-----

DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN: PARTE II

El estudio de la naturaleza de los conceptos de razón y proporción llevada a cabo desde el inicio del trabajo investigativo posibilitó presentar en primer lugar una reconstrucción histórica de estos constructos que abarca desde la Edad de Piedra hasta el Siglo XIX. Este análisis nos permitió contrastar el pensamiento de los estudiantes con el de los matemáticos en la historia así como utilizar en nuestro contexto actual, la redacción de algunos problemas.

Dirigimos nuestra atención a realizar un estudio exploratorio a un conjunto de estudiantes cursantes de la asignatura Matemática I del programa de Economía del DCEE-UCLA, para ello fue aplicado a estos jóvenes como instrumento de recolección de información, un cuestionario con ítems que guardaban relación con las nociones de razón y proporción de forma implícita o explícita. La aplicación del cuestionario inicial permitió vislumbrar y discernir acerca de los conocimientos previos que poseen estos jóvenes en relación a los conceptos de razón y proporción desde distintas representaciones y contextos. Las respuestas emitidas por estos hicieron posible identificar cuatro esquemas conceptuales met-before y dos esquemas conceptuales formales asociados a las definiciones de los conceptos de razón y proporción, para un total de seis esquemas conceptuales. Los esquemas met-before se relacionaron a magnitudes geométricas, magnitudes aritméticas, a una ecuación y al método de la regla de tres, poniendo de manifiesto ideas informales y procedimientos que hacen emerger los conceptos en estudio mediante representaciones que fueron usadas por

los matemáticos a lo largo de la historia, como por ejemplo, la regla de tres que se utilizaba desde la antigüedad por los comerciantes para realizar repartos proporcionales o intercambio de mercancía de una forma implícita.

Por su parte, los esquemas propios se asocian con la relación entre la distancia y el tiempo y la definición de la derivada, donde los estudiantes hacen alusión al concepto de velocidad para establecer la relación distancia-tiempo. Sin embargo, en referencia al concepto de la derivada evocan sólo ideas intuitivas, como que es equivalente a una recta o que se define como la recta tangente de una función. De esta manera se determina que 24 estudiantes emplean ideas informales y formales al resolver planteamientos inherentes al razonamiento proporcional y argumentar acerca de interrogantes que se relacionan con las nociones de razón y proporción permitiendo realizar una aproximación a los esquemas conceptuales asociados a estos conceptos para este grupo de jóvenes. Asimismo, el análisis permitió clasificar a 24 estudiantes dentro de la categoría informal, dado que la mayoría utilizaba ideas de este tipo y un estudiante no se caracterizó en vista de que no contestó ninguno de los ítems del cuestionario.

Considerando lo expuesto anteriormente subyacen las siguientes reflexiones:

El estudio de la génesis de los conceptos de razón y proporción constituye un elemento didáctico de gran importancia en el aprendizaje de los estudiantes puesto que el análisis cognitivo efectuado a los jóvenes que fueron partícipes del estudio trajo como resultado que emergiesen esquemas conceptuales que evocaron ideas intuitivas, símbolos y representaciones usados por los matemáticos desde la antigüedad al ser contrastados con los esquemas conceptuales epistemológicos. Además, nos posibilita entender los planteamientos y argumentaciones suministrados por los estudiantes al entrar en contacto con actividades matemáticas que se les planteen inherente a estos tópicos.

Al realizar una revisión del plan de estudio de la asignatura Matemática I del programa de Economía del DCEE-UCLA y de acuerdo a la información recabada durante se observó que el concepto de la derivada como razón de cambio es trabajada con mayor énfasis en el contexto aritmético y algebraico. Se sugiere como elemento didáctico que para la enseñanza de esta noción se explique el concepto desde cada uno de los contextos: algebraico, aritmético, geométrico y analítico, articulando estos con la evolución histórica considerando, por ejemplo, el triángulo diferencial de Leibniz (pendiente de la recta tangente a la curva) para exponer la definición desde la geometría, las diversas representaciones simbólicas incluyendo la derivada como el límite de un cociente incremental planteada por D' Alembert en el contexto

algebraico, la derivada como una función para modelar situaciones inherentes al campo de la economía desde la rama analítica y las conjunción de todos estos elementos para favorecer la comprensión de la base fundamental del cálculo diferencial durante la formación de los futuros profesionales del país.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Boyer, C. (2003). *Historia de la Matemática*. Madrid: Editorial Alianza.
- Cantor, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo Conceptual del Cálculo*. México: Thomson Editores.
- Chin, E. & Tall, D. (2001). Developing Formal Mathematical Concepts Over Time. In Marja Van Den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations*, 4, 241-248. Utrecht, The Netherlands.
- Colina, M. y Valdivé, C. (2016). *Estudio de los Esquemas Conceptuales asociados a la Evolución Histórica de las definiciones de Razón y Proporción*. Ponencia presentada en el IX Congreso Venezolano de Educación Matemática. Barquisimeto.
- Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En Nesher, P. & Kilpatrick, J. (Eds.), *Mathematics and Cognition*, 113-134. Cambridge: Cambridge University Press.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 3-21. Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.
- Edwards, C. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. 4ta edición. Bogotá – Colombia: McGraw-Hill.
- Lois, A., Milevich, L., Gelsi, L. y González, A. (2009). ¿Función derivada o función pendiente de una curva? P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 913-922.
- Oller A. y Gairín J. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(3), 317-338.
- Pérez R. (2006). *Propuesta didáctica para incorporar el desarrollo del tema del razonamiento proporcional en 8vo grado de educación básica a través de la resolución de problemas*. Trabajo de grado Maestría interinstitucional en Matemática. UCLA-UNEXPO-UPEL. Barquisimeto.
- Rodríguez, G.; Gil, J. y García E. (1999). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.
- Salazar, M. y Díaz, L. (2009). La actividad de medir aporta significados a fracciones y razones. P. Lestón (Ed.),

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 207-215.

Sánchez, J (2010). *Estudio didáctico y epistemológico de la Noción del Número Irrracional*. Trabajo de Grado de Maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Instituto Pedagógico de Barquisimeto. UCLA-UPEL-UNEXPO.

Serres, M. (1999). *Los orígenes de la geometría. Tercer libro de las fundaciones*. México: Siglo XXI.

Tall, D. (2005). The transition from embodied thought experiment and symbolic manipulation to formal proof. *Proceedings of the Delta Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1-16. Frazer, Island, Australia.

Tall, D. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1-16. Bergen, Norway.

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, 48 (2 y 3), 200-238.

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. *Proceedings of the 19th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 61-75. Recife, Brasil.

Tall, D. (1992a). The transition to advanced mathematical thinking functions, limits, infinity, and proof. En Grouws, D. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 495-511. Reston, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics, Inc.

Tall, D. (1992b). *Student's Difficulties in Calculus*. Plenary presentation in Working Group 3, ICME, Québec, August 1992. *Mathematics Education Research Centre*. University of Warwick.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 3-21. Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169

Valdivé, C. (2008). *Esquemas conceptuales asociados a la noción de infinitesimal y su evolución en estudiantes de Análisis Matemático*. Tesis Doctoral no publicada. UCLA-UNEXPO-UPEL.

Valdivé C. y Garbin, S. (2008). Estudio de los Esquemas Conceptuales Epistemológicos Asociados a la Evolución histórica de la Noción de Infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11(3), 413-450.