

SIRVIÉNDONOS DE LA TOPOLOGÍA EN SECUNDARIA Y BACHILLERATO

**Silvia González Galindo, M^a Teresa Moyano Dávila,
Juan Núñez Valdés**

**Dpto. Geometría y Topología, Facultad de Matemáticas,
Universidad de Sevilla, España**

**silviagonzga@gmail.com, maitemoyano@gmail.com,
jnvaldes@us.es**

RESUMEN	ABSTRACT
<p>En este artículo, los autores plantean a los profesores de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato la propuesta de usar la Topología en sus clases para aumentar con ello el interés y la motivación de sus alumnos por la asignatura, con el fin de conseguir diversos objetivos, entre ellos el de hacerles ver que las Matemáticas ayudan a resolver problemas diferentes de los que ellos están acostumbrados. Para ello, se muestran un conjunto de diez juegos topológicos, generalmente desconocidos por esos alumnos, que les van a ser muy útiles para potenciar muchas de sus habilidades y cualidades.</p>	<p>In this article, the authors propose to the teachers of Mathematics of Secondary and Baccalaureate the proposal for using the Topology in their classes to increase the interest and the motivation of their students, in order to achieve several objectives, as let them see that Mathematics can help them to solve some problems different from what they are accustomed To do this, a set of ten topological games are shown, which will be very useful to enhance many of their skills and qualities, while allowing them to develop several of the key competences, different from the mathematics itself.</p>
PALABRAS CLAVE:	KEYWORDS:
<p>Topología en el aula, juegos topológicos, recursos para la enseñanza</p>	<p>Topology in the classroom, topological games, resources for teaching</p>

INTRODUCCIÓN

De manera coloquial, la Topología puede definirse como la rama de las Matemáticas que estudia aquellas propiedades y características de los objetos que se mantienen inalterables tras cambios continuos (traslaciones o giros o combinaciones de ambos), con independencia de su tamaño o apariencia. Y por juegos topológicos pueden entenderse aquellos objetos formados por cuerdas, maderas, anillas, bolas, alambres, etc., en los que una situación aparentemente irresoluble puede resolverse mediante un movimiento continuo sin romper, rasgar o modificar la estructura de los mismos (véase (Prieto, 2005) para mayor precisión).

Al respecto, este es un artículo de ideas para el aula cuyo principal objetivo es el de mostrarles a los profesores de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato diez juegos topológicos, normalmente no conocidos por los alumnos de esos niveles, que pueden ser usados por esos profesores en sus clases para conseguir diferentes objetivos.

Entre esos objetivos destacaríamos, romper con la “rutina habitual” diaria de las clases, introduciendo en ellas materiales novedosos e impensables por esos alumnos para una clase

de Matemáticas, aumentar su interés y motivación por la asignatura, haciéndoles ver cómo las Matemáticas ayudan a resolver problemas diferentes de los que ellos están acostumbrados y potenciar varias cualidades y habilidades de los alumnos, como pueden ser la visión espacial, la agudeza visual, la imaginación y sobre todo, la capacidad de razonamiento y de utilización de estrategias para conseguir un determinado fin, al tiempo que les permiten desarrollar varias de las competencias clave, diferentes a la propia competencia matemática.

Y todo ello con el propósito final de obtener una mayor autoconfianza y autoestima en esos alumnos para el estudio de las Matemáticas. No olvidemos, al respecto, la enorme relación existente el juego y la enseñanza de las Matemáticas, tal como pone de manifiesto el ilustre matemático español, ya fallecido, Miguel de Guzmán (Getafe (Madrid), 1936 – 2004, Catedrático de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid), en su siguiente cita de 1984 (Montoya, 2014, p.5):

El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de la Matemática. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y han disfrutado tanto contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprender la Matemática a través del juego y de la belleza?”

Aparte lo anterior y a fin de contextualizar el marco en el que se desarrolla el contenido de este artículo, es conveniente indicar en primer lugar que en España, patria de los autores, el sistema educativo se compone de cinco grandes tipos de educaciones:

- La Educación Infantil (entre los 0 y los 6 años). Es de carácter no obligatorio; se reparte en dos etapas (1º ciclo de 0 a 3 años y 2º ciclo de 3 a 6 años).

- La Educación Primaria (entre los 6 y los 12 años, aproximadamente). Tiene carácter obligatorio y, por tanto, es gratuita en instituciones públicas, incluidos los libros en algunas Comunidades Autónomas y comprende seis cursos, desde los 6 a los 12 años aproximadamente.

- La Educación Secundaria Obligatoria (conocida como la ESO) consta de cuatro cursos, entre los 12 y los 16 años aproximadamente. Se cursa en los IES (Institutos de Educación Secundaria), en los IESO (Institutos de Educación Secundaria Obligatoria), en los Centros o Colegios de Enseñanza Obligatoria (CEO) o bien en centros privados y concertados.

- La Educación Secundaria Post-obligatoria alude a cuatro enseñanzas independientes entre ellas y que exigen para ser cursadas la posesión del título de la ESO: el bachillerato (dos cursos), la formación profesional de grado medio, las enseñanzas profesionales de artes

plásticas y diseño de grado medio y las enseñanzas deportivas de grado medio.

- La Educación Superior (con distintos criterios para acceder, dependiendo de la enseñanza elegida) comprende, de forma independiente entre ellas, la enseñanza universitaria, las enseñanzas artísticas superiores, la formación profesional de grado superior, las enseñanzas profesionales de artes plásticas y diseño de grado superior y las enseñanzas deportivas de grado superior. Las enseñanzas de régimen especial son la de idiomas, las artísticas y las deportivas.

Dentro de este contexto, los autores creemos que no les debe resultar difícil a los profesores de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato explicarles a sus alumnos, de manera mucho más coloquial que rigorista, que la Topología (propia de la Enseñanza Universitaria) es una rama de las Matemáticas que estudia las propiedades que permanecen invariantes, es decir, que no cambian, en un objeto cuando este cambia de forma sin sufrir roturas, es decir, cuando se modifica su forma “sin romper ni pegar” y que los juegos topológicos son aquellos juegos que plantean un problema geométrico aparentemente imposible de resolver. En ellos, cruces, nudos o lazos fijan los elementos de una determinada manera que, a primera vista, parecen imposibles de separar.

Como características más importantes de estos juegos topológicos están el que son fáciles de construir con materiales corrientes como cuerdas, maderas, alambres, telas,... e incluso de desecho. Y, en general, son difíciles de resolver, por lo que resultan entretenimientos muy atractivos para cualquier persona en general.

Por otra parte, requieren un alto grado de paciencia, un estudio sistemático de todas las posibilidades y, sobre todo, procurar enfocar la solución fuera de los contextos habituales que muchas veces la enmascaran. Su solución puede ser un verdadero enigma (este párrafo y los dos anteriores están tomados, aunque ligeramente modificados por los autores, de la web personal del “Grupo Alquerque” (2005)).

Aunque hay muchos juegos topológicos muy adecuados para estos fines, los diez que se muestran en el artículo son las anillas y las a-nillas, las pirámide enjaulada y de bolas, la serpiente-cubo, las cadenas de canastas, las coronas laberínticas, el desenrollado de cuerda, los enredados y las bolas en fieltro, de cada uno de los cuales se da su descripción, su grado de dificultad (Secundaria o Bachillerato), la principal habilidad que desarrolla en los alumnos, la rama de las Matemáticas con la que está más relacionado y finalmente la manera de resolverlo.

La siguiente Tabla 1 muestra algunas de las características de estos juegos propuestos, realizándose en las siguientes secciones una descripción detallada de cada uno de ellos.

Nombre del juego	Dificultad	Curso educativo	Habilidad a desarrollar	Relación con las Matemáticas
Pirámide enjaulada	Baja	1º ESO	Visión espacial	Aristas, diagonales
Las anillas	Baja	2º ESO	Percepción espacial	Ángulos, perpendicularidad
Pirámide de bolas	Media	3º ESO.	Coordinación “multitasking”	Funciones de una variable
Coronas laberínticas	Media	3º ESO	Percepción espacial	Ángulos perpendicularidad
Cadena de canastas	Media	3º ESO	Pensar ordenadamente, métodos iterativos	Algoritmos
Pirámide de 4 piezas	Media	4º ESO	Visión espacial	Geometría espacial
Serpiente-cubo	Alta	4º ESO	Rotación mental, seguir un proceso	Ángulos, rotaciones
A-nillas	Alta	Bachillerato	Percepción espacial	Topología (“agujeros”)
Enredados	Alta	Bachillerato	Percepción espacial	Topología (“agujeros”)
Bolas en fieltro	Alta	Bachillerato	Visión y agudeza visual	Topología, deformación del espacio

Tabla 1.
Juegos Topológicos tratados en este artículo

Finalmente, nos gustaría indicar que todas las imágenes que aparecen como figuras en este artículo han sido elaboradas y editadas por los propios autores.

ALGUNOS JUEGOS TOPOLÓGICOS

Se describen en los siguientes apartados los 10 juegos topológicos que se proponen.

- La Pirámide Enjaulada

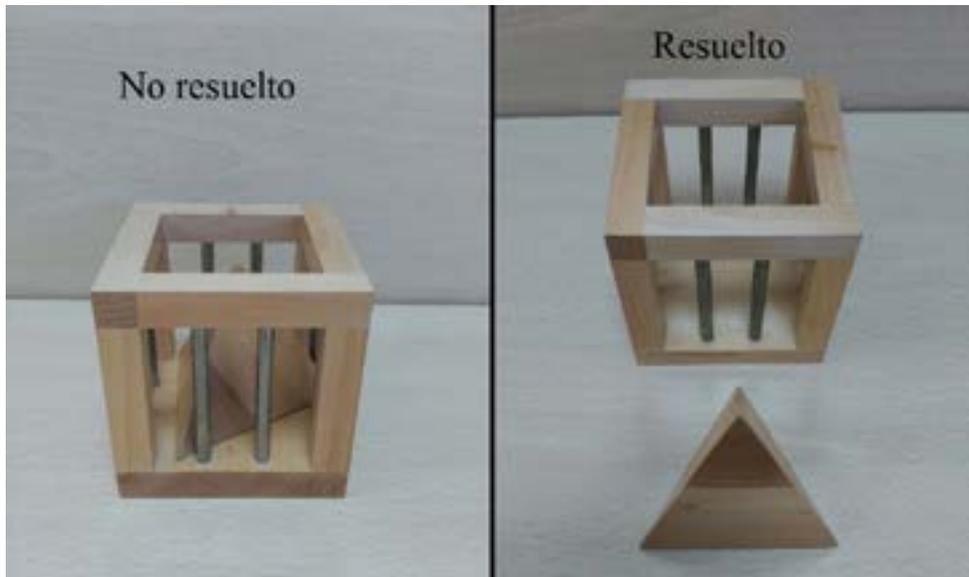


Figura 1.

La Pirámide Enjaulada en su estado inicial y resuelto

Este juego consiste en sacar el tetraedro (pirámide triangular con sus cuatro caras iguales) de la “jaula”, teniendo en cuenta que las aristas del tetraedro son mayores que los lados del cuadrado superior, por donde hay que sacar la pirámide.

Con el mismo se pretende que el alumno desarrolle su visión espacial, ya que este tendrá que ir girando el tetraedro para encontrar la posición en la que es posible sacarlo de la jaula, que es aquella en la que una de las aristas del tetraedro coincide con la diagonal de la abertura cuadrada.

En este juego geométrico se puede ver cómo la diagonal de un cuadrado es la mayor de las longitudes que este contiene, puesto que el tetraedro solo puede salir y entrar a través de la misma. El resto de longitudes, como la de los lados, por ejemplo, son demasiado pequeñas.

- Las Anillas

Este juego se compone de dos anillas idénticas, tal y como se muestra en la Figura 2, entrelazadas entre sí. Se pueden separar si, estando las anillas alineadas de forma que los trozos rectos formen un ángulo de 90° , se tira de ellas en sentidos opuestos.



Figura 2.

Las Anillas en su estado inicial y resuelto

Los alumnos deben entonces recurrir al concepto de la perpendicularidad para darse cuenta de que esa posición es la única en la que hay el suficiente espacio para que las anillas puedan desenlazarse, desarrollando así una cierta percepción espacial.

- Pirámide de Bolas

En este juego se han de construir varias figuras, que aparecen en la cartulina de la Figura 3, mediante unas piezas hechas de bolas de madera. De todas esas figuras, la más clásica de construir es la pirámide triangular, es decir, un tetraedro.

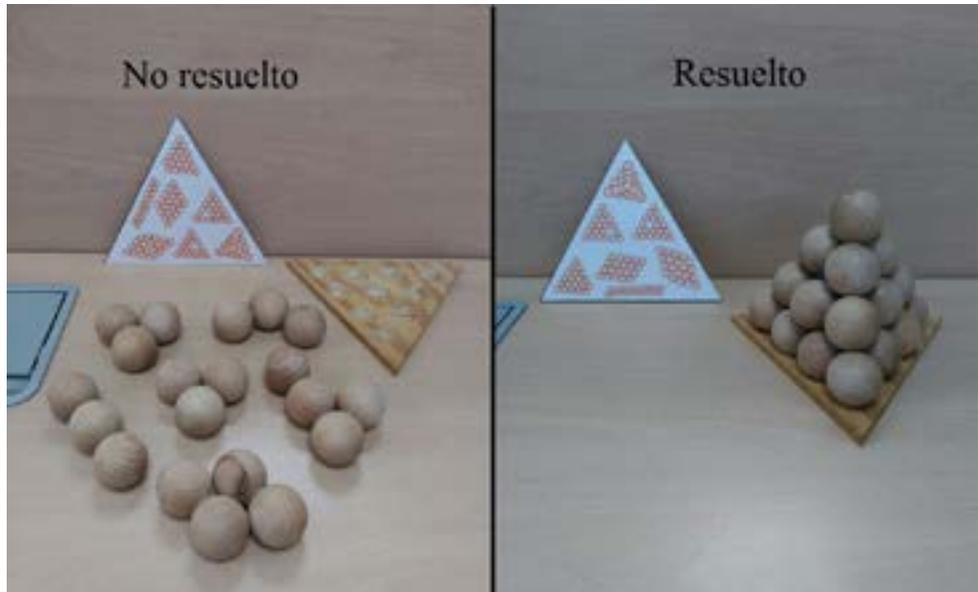


Figura 3.

Pirámide de Bolas en su estado inicial y resuelto

Al realizar estas distintas figuras, se desarrolla en gran medida la visión espacial, puesto que los alumnos han de tener la figura deseada en mente y saber cómo colocar las piezas para obtener el resultado que quieren.

Además, una propuesta muy curiosa que se les puede hacer es preguntarles si hay distintas maneras de poder formar una misma figura. Habrá seguramente alumnos que consideren distinta la misma construcción con una rotación de 60° o 120° , aunque en realidad no lo es. De la misma forma, sí que se admiten distintas construcciones para algunas de las figuras propuestas, aunque no para otras, como la pirámide, por ejemplo.

- Coronas Laberínticas

Este juego está provisto de una corona circular que tiene por cada lado un laberinto distinto. Unido a ella hay otra corona circular con una abertura y dos salientes que son los que tendrán que salir del laberinto para conseguir separar ambas piezas.

Los alumnos tendrán que desarrollar la capacidad conocida en inglés como “multitasking”, es decir, realizar más de una tarea a la vez, ya que no pueden avanzar por el laberinto de una cara sin tener en cuenta el de la cara opuesta, poniendo así a prueba su coordinación y memoria para recordar los movimientos que pueden hacer y los que no en el otro lado del laberinto.

Se puede establecer una analogía entre este juego y una función de dos variables, ya que la solución (separar las coronas) depende de dos laberintos, cada uno con una forma distinta, y aun así, existe una relación en cómo se ha de mover la herradura para llegar al estado deseado.



Figura 4.

Coronas Laberínticas en su estado inicial y resuelto

- Cadena de Canastas

Este juego está provisto de una serie de palos de madera unidos cada uno a una anilla, con forma de canastas, entrelazadas entre sí. El objetivo consiste en sacar la cuerda (con la bola y el aro) de la estructura de madera, tal y como se muestra en la Figura 5.

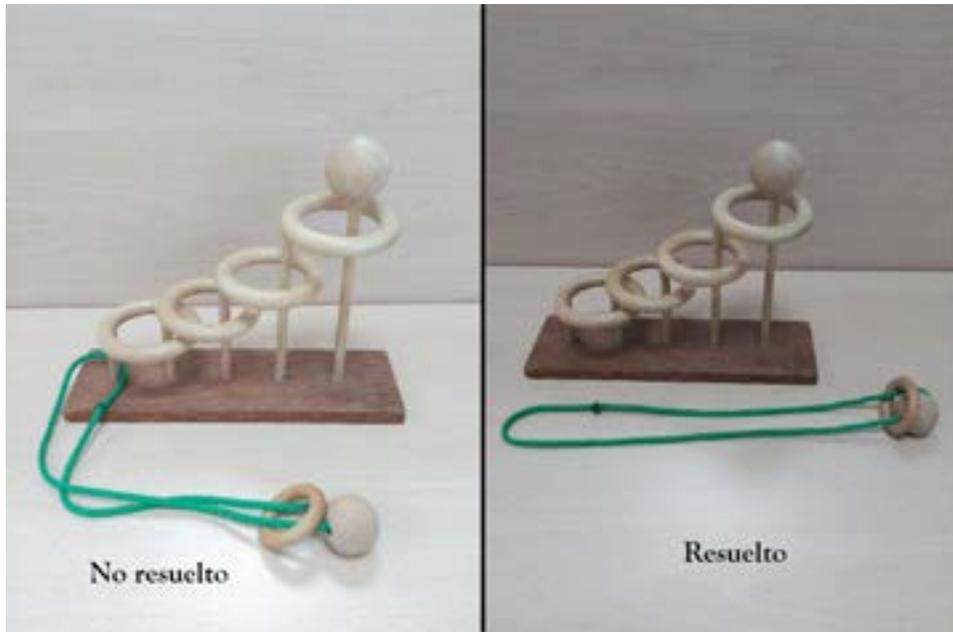


Figura 5.

Cadena de Canastas en su estado inicial y resuelto

Se trata de un juego cuya resolución es iterativa, es decir, una vez conocido el primer paso, basta con repetirlo varias veces para resolverlo. El alumno tendrá que pensar razonadamente cuál será ese método y ser ordenado para que, en cada paso, avance hacia la solución en lugar de retroceder.

Mediante este juego los alumnos tendrán un ejemplo práctico de lo que es un algoritmo y de cómo resolver un problema gracias a él.

La ventaja de este juego es que los alumnos pueden construirlo fácilmente con cinco palos de madera, cinco anillas, una cuerda y una tabla de madera, tal y como se muestra en la figura 5.

- Pirámide de cuatro piezas

Este juego consiste en formar una pirámide triangular a partir de cuatro piezas iguales de madera. Para ello, los alumnos tendrán que razonar cómo deben colocar dichas piezas para obtener el resultado final, teniendo en cuenta que, por ejemplo las caras más pequeñas con forma de cuadrado deben quedar por dentro de la figura (véase Figura 6).

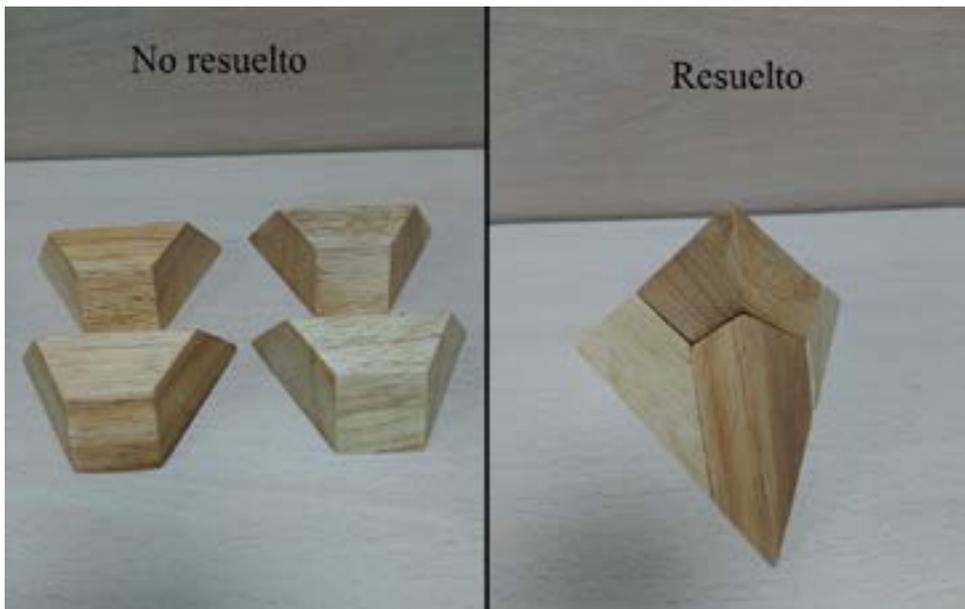


Figura 6.
Pirámide de Cuatro Piezas en su estado inicial y resuelto

De esta forma, los alumnos desarrollarán su visión espacial, ya que para formar la figura deben tener primero una idea en mente de cómo colocar las piezas, y verán que la geometría puede parecer, como en este caso, aparentemente imposible, pero que de la forma adecuada, todas las piezas encajan perfectamente.

- Serpiente-Cubo

El objetivo de este juego es construir un cubo formado por 27 cubos más pequeños unidos entre sí de una determinada forma, de manera que el único movimiento que se puede realizar entre dos cubos unidos entre sí es rotar uno de ellos sobre el otro respecto de la cara por la que están unidos.

Los alumnos tendrán que seguir un proceso lógico de varios pasos para construir el cubo final, teniendo en cuenta que nunca puede haber más de tres cubos alineados (puesto que la figura final tiene tres cubos pequeños de lado), poniendo así en práctica las rotaciones de 90° , 180° y 270° . Esto les permite desarrollar una competencia perteneciente a la inteligencia espacial conocida como *rotación mental*, que es esencialmente la visualización de cómo va a quedar una figura tras rotarla un cierto número de grados en el espacio.

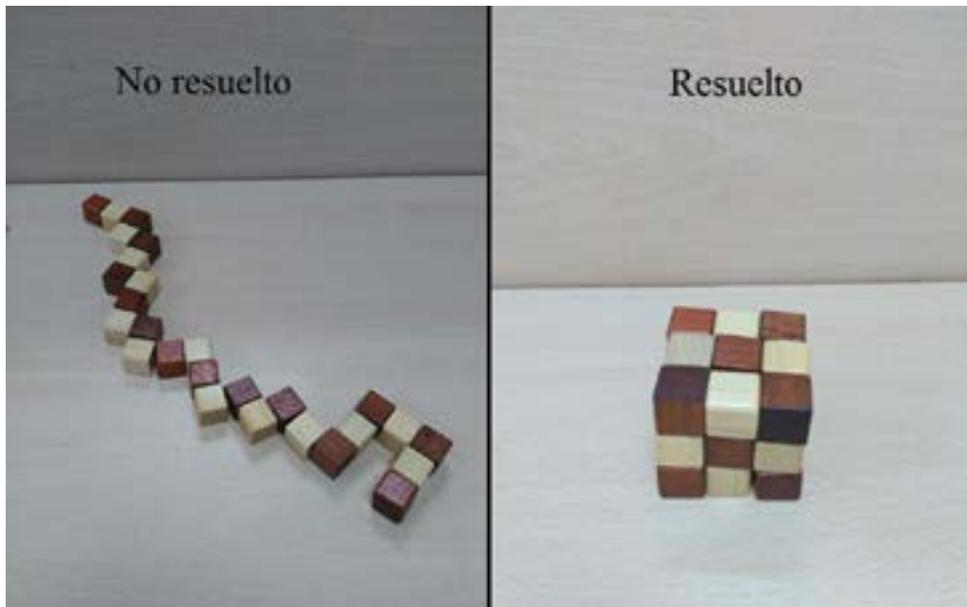


Figura 7.

Serpiente-Cubo en su estado inicial y resuelto

- Anillas

Figura 8.
Anillas en su estado inicial y resuelto

Este juego consiste en dos trozos de alambre que hay que conseguir separar. El primero de ellos está compuesto por dos anillas unidas a otro alambre con forma de A, mientras que el segundo corresponde a la pieza alargada (véase Figura 8).

En él se pueden apreciar ciertos conceptos de Topología, ya que el alambre con forma de A tiene un solo “agujero”, lugar por el que debe salir el segundo alambre. Además, habrá que fijarse en los “agujeros” de las anillas y del segundo alambre para conseguir resolver el problema.

Este juego puede construirse manualmente si disponemos de alambre, dándole la forma que aparece en la Figura 8.

- Enredados

En este juego participan dos personas, interactuando entre sí. Consiste en atar los extremos de una cuerda a las muñecas de una persona y, con otra cuerda, hacer lo mismo con la otra persona, pero de forma que queden entrelazadas, es decir, que ambas personas queden unidas. El objetivo del juego es conseguir desenredar las cuerdas sin quitárselas de las muñecas.

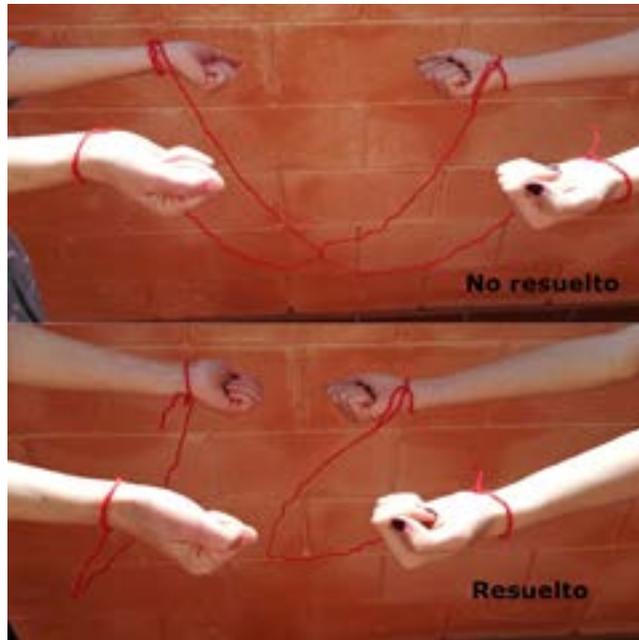


Figura 9.
Juego “Enredados” en su estado inicial y resuelto

Tras los primeros intentos, que suelen ser pasar la cuerda por encima o por debajo de la otra persona y otros diversos malabarismos, los alumnos deberán razonar que tienen que trabajar con las propias cuerdas y no con sus cuerpos, puesto que son como dos aros entrelazados. El único “agujero” existente es el pequeño hueco que queda entre la muñeca y la cuerda atada a ella, que es suficientemente pequeño como para que no se la puedan quitar, pero lo suficientemente grande como para que pueda pasar otro trozo de cuerda por medio.

Este juego es muy atractivo ya que requiere la interacción de dos personas e incluso puede asociarse a la magia matemática. Además, para practicarlo tan sólo se necesitan dos trozos de cuerda y dos personas a las que les gusten los retos.

- Bolas en Fielto

En este juego, tenemos una cuerda con una bola a cada uno de los extremos enlazada en un trozo de fieltro. El objetivo es desenlazarla, de forma que el fieltro y la cuerda queden completamente separados.

El primer intento de los alumnos al serles presentado este juego suele ser pasar la cuerda por encima del fieltro (lo cual no sirve absolutamente para nada, ya que se vuelve a la posición inicial: es como si le hubieran aplicado la identidad), y posteriormente proceden a aplicarle distintos movimientos a la cuerda, sin éxito.

La clave de este juego es que es topológico, por tanto, nada se va a conseguir aplicándole diversos movimientos geométricos. Estando el fieltro tal y como está al principio, no se pueden separar este y la cuerda haciendo movimientos solo con esta. El truco está en deformar el fieltro, pasando la tira central por el hueco por donde salen los extremos de la cuerda. Ahí ya es muy sencillo separar la cuerda.



Figura 10.

Juego de las Bolas en Fielto en su estado inicial y resuelto.

Lo interesante de este juego es que obliga al alumno a pensar de forma diferente; ha de darse cuenta de que es el fieltro lo que debe manipular y no la cuerda, que tiene que operar con su espacio y no con los objetos en él.

ALGUNAS REFLEXIONES DE LOS AUTORES

Ante todo, creemos conveniente indicar que existen muchísimos otros juegos topológicos distintos de los que aquí se muestran, que no se han considerado en este artículo por razones de extensión, todos los cuales contribuyen a potenciar enormemente la visión, agudeza y percepción visual de los alumnos (existe una amplia relación de referencias en la literatura sobre juegos topológicos. Entre ellas, pueden consultarse (Gardner, 1986), (Alsina y Fortuny, 1987), (Martín, 2017) y las páginas webs citadas en las referencias de Bernal y SAEM THALES).

También es conveniente indicar que aunque el contenido de este artículo se ha pensado para ser ejecutado en el sistema educativo español, es fácilmente extrapolable a los niveles de Secundaria y Bachillerato de los sistemas educativos de cualquier otro país.

A la vista del análisis realizado en este artículo, podemos concluir que la resolución de los distintos juegos topológicos presentados y de otros similares favorece al desarrollo de distintas habilidades matemáticas por parte de los alumnos, bien por enfrentarse a un problema distinto a los que quizá acostumbran en el aula, bien por la gran variedad de estrategias y métodos que se pueden aplicar para su resolución. También les permite ver que las Matemáticas además de ser una herramienta, pueden ser un juego divertido que se emplea en muchas ocasiones y que aparece en los lugares más insospechados.

Por todo ello, pensamos que el planteamiento y puesta en práctica en el aula de estos juegos anteriormente comentados y de otros similares es una muy buena idea y debería ser usado como recurso metodológico por parte del profesor de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato por las razones anteriormente expuestas.

REFERENCIAS

- Alsina, C., Fortuny, J.M. (1987). *Invitación a la didáctica de la Geometría*. Madrid, España: Editorial Síntesis.
- Galán, Blanca (2017). *El juego y las Matemáticas en Educación Primaria*. La Rioja, España: Publicaciones de la Universidad de La Rioja.
- Gardner, M. (1986). *Rosquillas anudadas y otras amenidades matemáticas*. Barcelona, España: Editorial Labor.
- Grupo Alquerque (2005). *Juegos Topológicos*. Recuperado, 25 de septiembre de 2018, de http://www.grupoalquerque.es/ferias/2005/topologicos/j_topo.htm

Martín, José Ignacio. Web personal: Zumo de Neuronas. Recuperado, 25 de septiembre de 2018, de <http://www.juegosdelogica.com/index.php/126-mi-coleccion-de-juegos-de-logica-e-ingenio>

Página web de *Juegos Didácticos*. (2017). Recuperado, 25 de septiembre de 2018, de: <http://thales.cica.es/system/files/JUEGOS-THALES.pdf>

Página web de *Juegos Topológicos. Materiales Didácticos Bernal* (2017). Recuperado, 25 de septiembre de 2018, de <http://www.bemal.net/Juegos-topologicos>

Prieto, C. (2005). *Topología Básica*. Estados Unidos: Fondo De Cultura Económica USA.