LAS DEFINICIONES DE RAZÓN Y PROPORCIÓN: PARTE I LA HISTORIA

María Colina y Carmen Valdivé
Unidad Educativa "Carbonero",
Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado (UCLA), Venezuela
mariucolina@hotmail.com, carmenv@ucla.edu.ve

FECHA DE RECEPCIÓN: 08/12/17 FECHA DE ACEPTACIÓN: 23/04/18

RESUMEN

El reporte que se presenta muestra los avances de una investigación donde uno de los propósitos a abordar es estudiar la evolución histórica de los conceptos de razón y proporción desde los distintos contextos matemáticos a través de un análisis histórico-epistemológico. Se determinaron seis momentos históricos: la razón asociada a un número entero, a magnitudes geométricas y aritméticas, a relaciones distancia-tiempo, a cantidades que se aproximan a cero, a la definición de derivada y a un número real.

ABSTRACT

The report presented shows the progress of a research where one of the purposes to be addressed is to study the historical evolution of the concepts of rate and proportion from different mathematical contexts through a historical-epistemological analysis. Six historical moments were determined: the rate associated to an integer number, to geometric and arithmetic magnitudes, to distance-time relationships, to quantities that approach to zero, to the definition of derivative and to a real number.

PALABRAS CLAVE:
razón y proporción - análisis histórico

KEYWORDS:
rate and proportion - historical analysis

INTRODUCCIÓN

Desde la antigüedad diferentes personajes intelectuales han dirigido su interés al estudio de los objetos matemáticos que en la actualidad conocemos y utilizamos en nuestra labor docente, en este caso nuestra atención se centrará en los conceptos de razón y proporción. Su aparición en los libros se remonta a la edad Antigua en el libro V de los Elementos de Euclides, del cual Oller y Gairín (2013) indican:

> La importancia de los Elementos como fuente histórica en cualquier aspecto de la matemática, incluida la proporcionalidad, es indudable. Sin embargo, ha de tenerse muy en cuenta que este texto nos muestra la teoría ya terminada sin pistas sobre el cómo ni mucho menos el por qué. Es decir, aunque los elementos resultan de gran utilidad a la hora de conocer el conocimiento teórico que se poseía en la época respecto a los conceptos estudiados, no nos proporcionan información alguna sobre los problemas concretos que pudieron dar lugar a dicha teoría (p.321).

Estos autores (ob. Cit.) señalan que el razonamiento proporcional es una herramienta que se utilizaba desde tiempos muy remotos. De hecho, Acosta, Rondero y Tarasenko (2010) explican que en culturas como la babilónica, la china y la egipcia se manejaba en actividades como el cobro de impuestos (p. 535-536). Sin embargo, los conceptos de razón y proporción no aparecen en el currículo de las distintas universidades que se encuentran en Venezuela, encontrándose de forma implícita en muchos de los contenidos de matemática que son abordados en el subsistema de educación universitaria, como lo es, por ejemplo, el concepto de derivada como un límite de cociente incremental, que es una pieza de gran importancia que forma parte de la base fundamental del estudio del Cálculo Diferencial.

De forma similar; Salazar y Díaz (2009) explican que "en una mirada histórico-epistemológica, las magnitudes, de gran importancia en los tiempos de Euclides, hoy prácticamente han desaparecido de la enseñanza" (p.209). De lo anterior, se evidencia que no se le da la importancia que cómo objetos matemáticos tienen, estando ausentes en el sistema educativo de nuestro país y en otras latitudes, a pesar de ser usado desde la antigüedad. De esta manera, el concepto de proporcionalidad es básico en la enseñanza de la matemática y por esta razón resulta de gran importancia realizar un análisis histórico epistemológico, dado que la producción de dicho análisis permitirá rescatar la complejidad y ampliar la concepción de los conceptos en las personas. Además, proporcionará herramientas didácticas para mejorar el proceso de enseñanza de los mismos dentro del aula (Bergé y Sessa; 2003).

LOS CONCEPTOS DE RAZÓN Y PROPORCIÓN EN LA HISTORIA

Los conceptos de razón y proporción conocidos en la actualidad no son más que el resultado de saltos epistemológicos ocurridos a lo largo de la historia durante aproximadamente unos 2000 años. De acuerdo con Serres (1996) "El problema de los múltiples orígenes de las formas matemáticas, el desciframiento de las leyendas que los relatan se reúnen en el espacio abierto o cerrado por esta conjunción o esta disposición de separación o de coordinación que diseñan y describen" (p.268). Se conoce que la noción de proporción dada por Eudoxo en el siglo V a.C se mantiene vigente y de la misma se desprenden una serie de propiedades y procedimientos que son útiles para el desarrollo del razonamiento proporcional. Según este autor (ob. cit.) el concepto de proporción se consideró como la gran invención griega y su intervención entre las diferentes disciplinas científicas enriquece su significado, de acuerdo con esto expone que:

> Se desliza de una región a otra: *aritmética*, cuando dos o más fracciones se igualan; *geométrica*: por el teorema de Tales; casi algebraica, en tanto que las series de relaciones sirven a los matemáticos griegos desde los orígenes hasta las fechas más tardías, como lengua universal para la demostración; *musical*, por los intervalos cifrados de la gama, … *astronómica*, por la misma armonía de las esferas,… *física*, por las proporciones definidas por todas partes en relación con los estados físicos primeros de la materia, tierra, agua, aire y fuego (p.266).

En torno a esto, el estudio de la evolución histórica de los conceptos de razón y proporción permitió indagar sobre las ideas, métodos, situaciones y matemáticos que contribuyeron a formalizar esta noción. Este estudio en particular, se realizó a través de seis períodos históricos, los cuales se organizaron de manera cronológica con un título caracterizador para cada segmento.

LA EDAD DE PIEDRA HASTA INICIOS DEL SIGLO V A.C: LA RAZÓN ASOCIADA A UN NÚMERO ENTERO

Inicialmente nos remontamos a la Edad Antigua donde se hace especial énfasis en que el lema de la escuela pitagórica era el de "todo es número" (Boyer, 2003; p.79). Los griegos usaban la palabra número para darle significado a un número entero como un número natural o a un entero positivo (Edwards, 1979; p.06; Boyer, 2003; p.83). A esta escuela se le atribuye el origen de la teoría de proporciones. Boyer (2003) menciona que la teoría de proporciones era uno de los intereses de disertación de los griegos. Durante este período histórico, los matemáticos teóricos griegos consideraban una fracción escrita de la forma ***a/b*** , como una simple entidad y no como un número, pero si como una relación o razón ***a:b*** entre los números (enteros) ***a*** y ***b*** (Edwards, 1979; p.6). Boyer (2003) explica que en Grecia "a las fracciones no se las consideraba como entidades únicas, sino como una razón o relación entre dos números enteros" (p.83).

Además, definieron proporción como la igualdad de dos razones, es decir, ***a:b = c:d*** si a es la misma parte (o partes) o múltiplo de ***b*** como ***c*** es de ***d***. Por ejemplo, ***6:9=10:15***, pues ***6*** es dos veces la tercera parte de ***9***, como ***10*** es dos veces la tercera parte de ***15***. Más formalmente, "***a:b = c:d*** si existen enteros ***p,q,m*** y ***n*** tales que ***a= mp, b= mq, c=np*** y ***d= nq***(así ***a/b*** y ***c/d*** son múltiplos integrales de ***p/q***). Sobre estas bases los Pitagóricos primitivos desarrollaron una elemental teoría de proporcionalidad (Edwards, 1979; p.6).

MEDIADOS DEL SIGLO V A.C: LA RAZÓN ASOCIADA A MAGNITUDES GEOMÉTRICAS Y ARITMÉTICAS

Al realizar un estudio en el contexto geométrico donde se involucraban magnitudes como longitud, área y volumen, los pitagóricos al principio creían que cualquier par de segmentos de rectas son conmensurables, esto es, son múltiplos de una unidad común (Edwards, 1979; p.06, Cantoral y Farfán, 2004; p.18); esto es refutado por Platón que durante su juventud descubre los inconmensurables, produciendo una crisis lógica que arrojaba graves dudas sobre las demostraciones que recurrían a la idea de proporcionalidad, pero la crisis había sido evitada con éxito por medio de los principios enunciados por Eudoxo (Boyer, 2003; p.155). Valdivé y Garbin (2008) indican que para esta misma etapa histórica, Hipócrates de Chíos compara magnitudes entre las áreas de dos polígonos inscritos en dos círculos, concluyendo que están a la misma razón que la de los cuadrados de los radios de los círculos. Sucede igual para las áreas de los círculos (p.429).

Ahora bien, el descubrimiento de los inconmensurables hecho por los Pitagóricos de las proporciones integrales muy usada para la comparación de razones de magnitudes geométricas invalida esas pruebas geométricas que habían utilizado los conceptos de proporcionalidad. De hecho, de acuerdo a Boyer (2003) tal descubrimiento "había producido un verdadero escándalo lógico, al ser la causa de la ruina de la teoría de proporciones" (p.127).

Eudoxo de Cnido, formula por su parte su propia definición de proporcionalidad (de razones de magnitudes geométricas) según Boyer (2003), como sigue:

Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en orden correspondiente (Boyer, 2003; p.127).

Esto es, que "las razones ***a:b*** y ***c:d*** son proporcionales ***a:b = c:d*** probando que, dado cualquier par de enteros positivos ***m*** y ***n*** se sigue que ***na>mbync>mdona=mbync=mdona<mbync<md***"(Edwards, 1979; p.13). La teoría de la proporcionalidad que Eudoxo construyó sobre las bases de la definición anterior es presentada en el libro V de los Elementos de Euclides (Edwards, 1979; p.14). En su obra, Euclides presenta esta definición de proporcionalidad, que constituye formulación del llamado "Axioma de Arquímedes", propiedad que Arquímedes mismo atribuía a Eudoxo. Este matemático afirmaba que "dadas dos magnitudes geométricas comparables ***a y b*** , existe un entero n tal que ***na*** > ***b***" (Edwards, 1979; p.14) la cual generalmente se asocia como un axioma de Arquímedes pero el autor lo llamará "Axioma de Eudoxo". En este sentido, Boyer (2003) manifiesta que "la palabra razón representaba en la matemática griega un concepto esencial indefinido, puesto que la "definición" de razón de Euclides como un cierto tipo de relación en tamaño entre dos magnitudes del mismo tipo pronto se mostró insuficiente" (p.127). Boyer (2003) también plantea que:

> La idea de razón de Eudoxo excluye el cero y clarifica lo que debe entenderse por magnitudes del mismo tipo; un segmento, por ejemplo, no puede compararse en términos de razón con un área, ni un área puede compararse con un volumen. (p.127)

SIGLO XIV HASTA EL SIGLO XV: LA RAZÓN ASOCIADA A RELACIONES DISTANCIA- TIEMPO

Durante la Edad Media "se define el movimiento uniforme, si iguales distancias son descritas en tiempos iguales" (Edwards, 1979; p.87; Boyer, 2003; p.336, Cantoral y Farfán, 2004; p.52). Además, Edwards (1979) define la aceleración uniforme como el incremento de velocidad adquirido en iguales intervalos de tiempo (p.87). Sin embargo, para tal variación de movimiento deben definir velocidad instantánea. En vista de que carecen de la noción de límite de razones sólo pueden definirla en términos de la distancia que sería atravesada por un punto si este se moviese uniformemente sobre un periodo de tiempo con la misma velocidad si la tuviese en ese instante mismo.

Boyer (2003) relata que los filósofos escolásticos dedujeron una formulación para el caso de una velocidad de cambio uniforme que se suele conoce en la actualidad como la “regla del Merton College”, la cual afirma que:

> Si un cuerpo se mueve con un movimiento uniformemente acelerado, entonces la distancia recorrida será la misma que recorrería otro cuerpo moviéndose durante el mismo tiempo con un movimiento uniforme de velocidad igual a la del primer cuerpo exactamente en el punto medio del intervalo de tiempo. (p.336)

Anteriormente se mencionó que en los elementos de Euclides se incluía según Boyer (2003) una teoría de proporciones o de igualdad de razones la cual aplicaron a distintas situaciones, por ejemplo, para un intervalo de tiempo, la distancia recorrida en un movimiento uniforme es directamente proporcional a la velocidad y análogamente para una velocidad dada, el tiempo es inversamente proporcional a la velocidad, en relación a esto Aristóteles pensaba que la velocidad de un objeto sobre la que actúa una fuerza motriz, dentro de un medio resistente, era directamente proporcional a la fuerza motriz e inversamente proporcional a la resistencia, lo cual contradecía el sentido común según los físicos (p.336).

Oresme estudia según Edwards (1979) “medir la cualidad sobre cada punto de un intervalo de referencia por un segmento de recta perpendicular sobre ese punto” (p.88) refiriéndose a dicho intervalo de una cualidad como su longitud, y su intensidad en un punto como su latitud o altitud en él, proponiendo el siguiente tratado expuesto en Cantoral y Farfán (2004) como sigue:

> Cualquier cosa medible, excepto números, es imaginada a manera de una cantidad continua. Por lo tanto, para medir tales cosas, es necesario que puntos, líneas y superficies o sus propiedades sean posibles de imaginar. Para éstas (las entidades geométricas), como los filósofos hacen, la medida o razón es encontrada de inicio …entonces, cualquier intensidad que pueda ser adquirida sucesivamente puede imaginarse como una línea recta perpendicular erigida sobre algún punto del espacio o aquello capaz de intensificarse, esto es una cualidad… (p.53)

De lo anterior, “dado que la cantidad o razón de líneas es mejor conocida y más fácilmente concebible,… entonces iguales intensidades serán designadas por líneas iguales” (Cantoral y Farfán, 2004; p.53). Similarmente, en atención a lo que precede, Boyer (2003) manifiesta que todo lo que varía se sepa medir o no, según Oresme, se podría imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo, para ello

> Oresme dibuja una gráfica velocidad-tiempo en los que los puntos de una recta horizontal representa los sucesivos instantes de tiempo (o longitudes) y, para cada uno de estos instantes traza un segmento (o latitud) perpendicular a la recta de longitudes en dicho punto, cuya longitud representa la velocidad en ese instante. Los extremos superiores de todos estos segmentos están en una recta, tal como lo vio Oresme, y si el movimiento uniformemente acelerado parte del reposo, entonces la totalidad de los segmentos velocidades (que nosotros llamamos ordenadas) cubren el área de un triángulo rectángulo. (p.339)

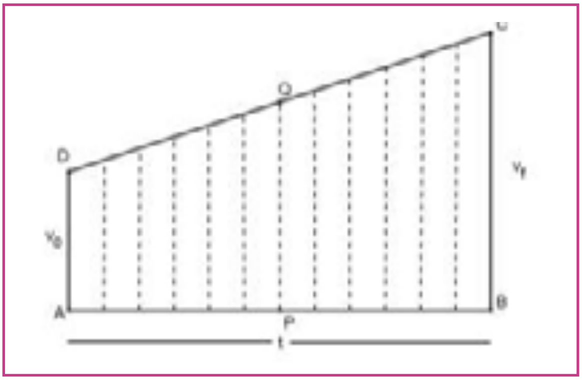

Figura 1: *Representación geométrica del Método de las Latitudes*

Edwards (1979) señala que Oresme observó que la definición de aceleración uniforme implica que en la Fig. 5, ***CD*** sea un segmento de línea recta, así la configuración es un trapezoide con base $AB = t$ y altura $AB = v_0$ y $BC = v_y$. "Él asume sin demostración explicita de ello que el área de ese trapezoide es igual a la distancia total recorrida" (p.89), lo cual de acuerdo con Cantoral y Farfán (2004) supuso basándose en el aspecto visual, observando desde su perspectiva a la configuración como constituida por muchos segmentos verticales o indivisibles, representando cada uno de estos una velocidad continua para un tiempo corto (p.53). En vista que el área de la Fig. 5 representa la distancia recorrida, obtiene Oresme de esta manera una verificación geométrica de la "regla del Merton College", "puesto que la velocidad en el punto medio del intervalo de tiempo es exactamente la mitad de la velocidad final de dicho intervalo" (Boyer, 2003; p.339). Es así, como este autor asegura que debido a los matemáticos Oresme y Bradwardine se obtuvo una concepción muy amplia y general de la proporcionalidad. (p.336). De hecho se menciona en Boyer (2003) que es muy seguro que Galileo estuviera muy familiarizado con la obra de Oresme que se conocía como "la latitud de las formas", dado que en las *Dos Nuevas Ciencias* (el cual es un diálogo sostenido en 1638, por Salviati, Sagredo y Simplicio) utiliza varias veces un diagrama de velocidades muy parecido a la representación gráfica triangular de Oresme dándole la precisión matemática de la que carecía (p.413).

FINALES DEL SIGLO XVII E INICIOS DEL SIGLO XVIII: LA RAZÓN ASOCIADA A CANTIDADES QUE SE APROXIMAN A CERO

En la Edad Moderna, nos encontramos con los trabajos de Fermat, Descartes, Barrow, Newton y Leibniz como grandes aportes para la matemática actual. Fermat "se interesó por muchos aspectos de lo que hoy llamaríamos análisis infinitesimal, tangentes, cuadraturas, volúmenes, longitudes de curvas, centros de gravedad, etc. (Boyer, 2003; p. 444). Cantoral y Farfán (2004) ilustran un método mediante el cual este matemático determinaba el valor extremo de algunas variables, el cual se encuentra inmerso en el método para hallar máximos y mínimos, dicho método se muestra en el siguiente planteamiento: Dado un segmento, hallar el punto sobre él, tal que el rectángulo que tiene por lados los dos segmentos que el punto determina sea de área máxima.

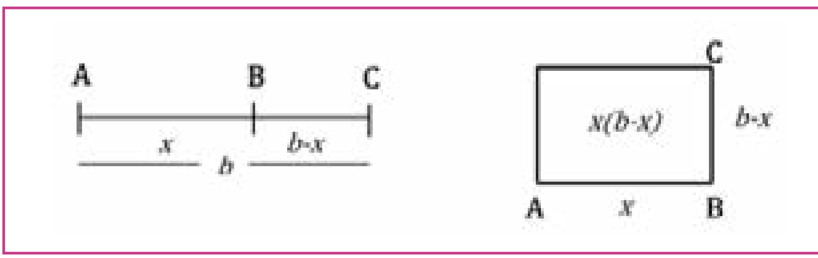

Figura 2: *Representación gráfica del método para determinar máximos y mínimos*

Sea $\overline{AC}$ el segmento dado en la Fig. 2 (izquierda), de longitud b , y sea B un punto sobre $\overline{AC}$. Tomemos como x a la longitud del segmento $\overline{AB}$, así que el segmento $\overline{BC}$ tiene por longitud $b - x$. De lo anterior, el rectángulo formado en la Fig. 6 (derecha) tiene área $x(b\text{-}x)$. Se pretende maximizar la expresión anterior, para lo cual se considera un punto adicional B' sobre $\overline{AC}$ de forma que la longitud $\overline{AB}$ sea distinta de x, es decir llegue, $x + \varepsilon$, y en consecuencia, el segmento $\overline{BC}$ tendrá longitud $b - (x + \varepsilon) = b - x - \varepsilon$. Además, el nuevo rectángulo construido será $AB'C$, con área $(x + \varepsilon)(b - x - \varepsilon)$. Acá, Fermat argumenta que si el punto B hace que el área sea máxima, entonces el valor del área determinada por B' será prácticamente igual al área determinada por B , de donde se obtiene que:

$$x(b-x) \approx (x+\varepsilon)(b - x - \varepsilon) \Rightarrow 0 \approx \varepsilon b - 2\varepsilon x - \varepsilon^2$$

Luego, se cumplirá la igualdad cuando $\varepsilon = 0$ y, por tanto $b = 2x$, de lo cual concluye que el rectángulo es un cuadrado de lado $x = \frac{b}{2}$. Analíticamente, se tiene que si B es un punto máximo (o mínimo) entonces, cuando ε se hace infinitamente pequeño, los valores de la función (en este caso el área del rectángulo construido) en x y en $x + \varepsilon$ van a ser muy cercanos, esto es, tomando a f como la función tratada, tenemos,

$$\varepsilon \approx \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{f(x+\varepsilon)} \approx \boldsymbol{f(x)} \Rightarrow \boldsymbol{f(x+\varepsilon)-f(x)} \approx \boldsymbol{0} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{f(x+\varepsilon)-f(x)}}{\varepsilon} \approx \boldsymbol{0}$$

Concluyendo de esta manera que la igualdad la tendrá cuando $\varepsilon = \boldsymbol{0}$. En notación moderna, si $\boldsymbol{B}$ es el punto máximo (o mínimo), entonces $\boldsymbol{f^1\ (x) = 0}$ cuando $\varepsilon \rightarrow \boldsymbol{0}$. Por su parte, Boyer (2003), presenta con una visión más general, el método en el que una función polinómica de la forma $\boldsymbol{y = f(x)}$ toma un valor máximo o mínimo. Fermat comparaba el valor de $\boldsymbol{f(x)}$ en un cierto punto con el valor $\boldsymbol{f(x+E)}$ en un punto cercano; considerándose estos dos valores claramente distintos, "pero en una "cumbre" o en el fondo de un "valle" de una curva "lisa" la diferencia será casi imperceptible" (p. 440). Por lo tanto, para hallar los puntos que corresponden a los valores máximos o mínimos de la función este matemático iguala a , teniendo en cuenta que estos valores, aunque no son exactamente iguales, son "casi iguales". Cuanto más pequeño sea el intervalo E entre dos puntos, más cerca estará dicha seudo-igualdad de ser una verdadera ecuación; así pues, Fermat, después de dividir todo por $\boldsymbol{E}$, hace $\boldsymbol{E = 0}$. Este resultado le permite calcular las abscisas de los puntos máximos y mínimos de la función polinómica. Además, permite vislumbrar la esencia del proceso que ahora llamamos diferenciación, pues el método de Fermat es equivalente a calcular $\boldsymbol{lim_{E\rightarrow 0}\ \frac{f(x+E)-f(x)}{E}}$ e igualar este límite a cero, pero Fermat aún no disponía del concepto de límite para esa época. Así, de acuerdo con Boyer (2003), el método de Fermat resulta, pues, equivalente a decir que el $\boldsymbol{lim_{E\rightarrow 0}\ \frac{f(a+E)-f(a)}{E}}$ es la pendiente de la curva en el punto $\boldsymbol{x = a}$, pero lo cierto es que Fermat no explicó este procedimiento de una manera satisfactoria, limitándose a decir simplemente que era análogo a su método para determinar máximos y mínimos (p.441).

Asimismo, Descartes quien también trabaja en el contexto geométrico y es considerado uno de los fundadores de la geometría analítica junto con Fermat, se orienta en un principio fundamental de esta ciencia que dice que "cuando en una ecuación dos cantidades desconocidas se encuentran, se tiene un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva" (Cantoral y Farfán, 2004; p.74; Boyer, 2003; p.437). Descartes, explicita en la Géométrie lo siguiente:

> La Geometría no debería incluir líneas (es decir, curvas) que son como cuerdas, en el sentidos de que son a veces rectas y a veces curvas, ya que las razones entre líneas rectas y curvas no son conocidas, y creo que no pueden llegar a ser descubiertas por mentes humanas, y por lo tanto ninguna conclusión que se base en tales razones puede ser aceptada como rigurosa y exacta. (Boyer, 2003: p.432)

Boyer (2003) señala que, Descartes tenía mucha razón, sin duda, al afirmar que el problema de hallar la normal (o, equivalentemente, la tangente) a una curva era de gran importancia, pero el método que desarrolla en la Geómètrie no era tan directo ni fácil de aplicar como el que había desarrollado Fermat al mismo tiempo aproximadamente. Descartes sugería que para hallar la normal a una curva algebraica en un punto fijo P de dicha curva, se debería tomar un segundo punto variable Q sobre la curva, y hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el eje de coordenadas (puesto que utilizaba un único eje de abscisas) y que pase por los puntos P y Q . Igualando entonces a cero el discriminante que determina las intersecciones de la circunferencia con la curva, puede hallarse el centro de la circunferencia tal que Q coincide con P y, conocido el centro, pueden determinarse fácilmente tanto la normal como la tangente a la curva en el punto P.

Posteriormente, Barrow hacia 1670 se interesa por los problemas de tangentes y cuadraturas, los cuales predominaban para ese período, adoptando las concepciones cinemáticas de Torricelli y considerando a las magnitudes geométricas como generadas por un flujo continuo de puntos.

Seguidamente, según Boyer (2003) Barrow se dispone explicar un método para la determinación de tangentes que es prácticamente igual al que se usa en el cálculo diferencial en la actualidad. Este método es muy parecido al propuesto por Fermat, pero en él aparecen dos cantidades, en vez de la única cantidad representada por Fermat por la letra E, (cantidades que en notación moderna se conocen como Δx ***e*** Δy). Barrow explica su regla para la determinación de tangentes esencialmente como sigue:

> Si M es un punto de una curva dada (en notación moderna) por una ecuación polinómica $f(x,y) = 0$ y si T es el punto de intersección de la tangente buscada MT con el eje x, entonces Barrow considera "un arco infinitamente pequeño MN de la curva", las ordenadas correspondientes en los puntos M y N , y el segmento MR paralelo al eje x (Fig. 7). Llamando entonces m a la ordenada conocida de M, t a la subtangente buscada PT y a, e a los catetos vertical y horizontal respectivamente del triángulo rectángulo MRN. Tal como lo expresaríamos hoy, la razón de a para dos puntos infinitamente próximos es la pendiente de la curva (Boyer, 2003; p.488).

Para determinar esta razón Barrow procede de una manera muy parecida a como lo hizo Fermat (aunque los indicios hacen pensar que Barrow no conocía los trabajos de este matemático), sustituye x e en la ecuación $f(x,y) = 0$ por $x + e$ e $y+a$ respectivamente, y en la ecuación resultante elimina todos los términos que no contengan a y e (ya que la suma de todos ellos es cero por la ecuación de la curva), así como los términos de grado mayor que uno en a o en e, y por último reemplaza a por m y e por t. A partir de este resultado puede calcularse la subtangente t en términos de x y de m y si x y m son conocidos, la subtangente t queda determinada, y con ella la tangente TM (ver figura 3).

Newton, según Boyer (2003), reconocía que el trabajo de Barrow no era más que el de Fermat un poco mejorado. Sin embargo, este trabajo le brindó el prestigio necesario para ser considerado uno de los matemáticos que anticiparon fragmentos del cálculo diferencial e integral, pero su insistente lealtad a los métodos geométricos le disuadió de continuar, motivando a Newton que estaba trabajando en los mismos problemas a publicar sus resultados propios (p.489). Newton comienza a pensar en 1665 "en la velocidad del cambio o fluxión de magnitudes que varían de manera continua o fluentes, tales como longitudes, áreas, volúmenes, distancias, temperaturas, etc" (p.493). Explica este autor que al año siguiente aún no había diseñado una notación para las fluxiones, pero ya había formulado un método sistemático de diferenciación que se parecía mucho al que publicó Barrow en 1670 en el cual:

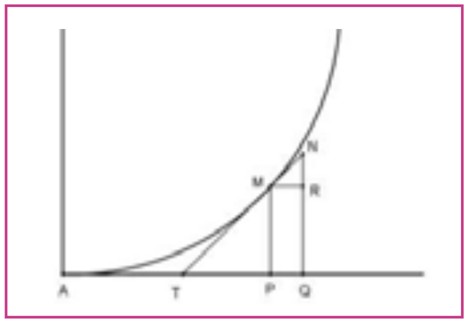

Figura 3: *Representación gráfica del método la determinación de tangentes de Barrow.*

> Sólo necesitaba sustituir la de a Barrow por la qo de Newton y la e de Barrow por la po de Newton para tener la forma inicial que dio Newton al cálculo. Evidentemente, Newton consideraba a o como un intervalo de tiempo muy pequeño, y a po y qo como los incrementos pequeños que experimentan x e y durante dicho intervalo. La razón q/p sería por lo tanto la razón entre las velocidades instantáneas del cambio de y y de x, es decir la pendiente de la curva $f(x,y)= 0$. (Boyer, 2003; p.498)

Sin embargo, al realizar una presentación de sus trabajos inherentes a sus métodos infinitesimales aproximadamente en 1671, consideraba a las variables x e y, como cantidades que van fluyendo, o "fluentes", de las cuales las cantidades x e y son las "fluxiones" o velocidades de variación (Boyer, 2003; p.499).

Para 1676, expone Boyer (2003), que Newton escribió una tercera exposición de su cálculo la cual llevaba como título De quadratura curvarum, y en dicha exposición trató de evitar, tanto las cantidades infinitamente pequeñas como las cantidades a las que llamaba fluentes, reemplazándolas por una teoría de las llamadas "razones primeras y últimas". En relación a esto, el autor explica que:

> Newton calculaba la "razón primera de incrementos nacientes" o la "razón última de

incrementos evanescentes" de la manera siguiente: Supongamos que se quiere hallar la razón entre las variaciones de $\boldsymbol{x}$ y de $\boldsymbol{x^n}$; llamemos $\boldsymbol{o}$ a un incremento dado a la variable $\boldsymbol{x}$, y sea $\boldsymbol{(x + o)^n}$ el incremento correspondiente a $\boldsymbol{x^n}$. Entonces, la razón de estos incrementos será

$$\frac{1}{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} o\, x^{n-2} + \ldots}$$

Y para hallar la razón primera y última se debe dejar "desvanecerse" a $\boldsymbol{o}$, con lo que la razón buscada será $\frac{1}{nx^{n-1}}$. (pp.499-500)

Haciendo referencia a lo anterior, Boyer (2003) señala que "Newton está aquí realmente muy cerca del concepto de límite, aunque la objeción principal que se podía hacer sería al uso impreciso de la palabra ***desvanecerse***: ¿Es que existe realmente una razón entre incrementos que se han ***desvanecido***?" (p.500). Esta interrogante no será clarificada por los matemáticos hasta arribar siglo XVIII.

En 1687 se publica la ***Principia Matemática***, donde Newton trata con límite de razones de cantidades geométricas, de hecho, en la sección I del libro I titulado "El método de las razones primeras y las últimas entre cantidades" establece que "la última razón de cantidades que se aproxima a cero son simplemente el límite de su razón" (Edwards, 1979; p.226). Cantoral y Farfán (2004) hacen énfasis en este aspecto señalando que las últimas razones de cantidades evanescentes, no son las razones de las últimas cantidades sino los límites hacia los cuales se aproximan en menos que cualquier diferencia dada, pero nunca las alcanzan y que las fluxiones son las velocidades de variación de las cantidades a las que llamaba fluentes que actualmente conocemos como la derivada (p. 91-92). Además, Edwards (1979) afirma que Newton en el lema I del libro I de la ***Principia Matemática*** ensaya la definición del concepto de límite estableciendo lo siguiente:

> Las cantidades y las razones de las cantidades, que en cualquier tiempo finito convergen continuamente para la igualdad, y antes y después de ese tiempo se aproxima más cercanamente a otro que para cualquier diferencia dada, convirtiéndose finalmente en una igualdad. (p.225)

Por otro lado, Boyer (2003) manifiesta que hacia 1676 Leibniz había llegado a la misma conclusión a la que había llegado Newton varios años antes. Fuese para una función racional o irracional, algebraica o trascendente (nombre que se debe al mismo Leibniz), siempre se le podían aplicar sus operaciones de formación de sumas y diferencias; pero para ello se hacía necesario desarrollar un lenguaje y una notación adecuados para tratar estos nuevos problemas. Por lo tanto, menciona que:

> Leibniz tuvo siempre una fina apreciación de la importancia que tiene una buena no-

> tación para ayudar a los procesos de pensamiento, y la que eligió en el caso del cálculo era especialmente afortunada. Después de varios ensayos se decidió a representar por dx y dy las diferencias más pequeñas posible (o diferenciales) de las x y de la y, aunque inicialmente había usado en su lugar $\frac{x}{d}$ e $\frac{y}{d}$ para indicar la disminución del grado. (p.506)

Esta notación se ilustra en su método para determinar la longitud de una curva, de acuerdo con Cantoral y Farfán (2004), para determinar el triángulo diferencial de Leibniz de una curva $y = f(x)$se toma un incremento diferencial dx en la variable x y se calcula el incremento correspondiente dy en la variable $y = f(x)$. Finalmente se completa el triángulo donde es el incremento infinitesimal sobre la gráfica de $y = f(x)$ (p. 94) como se muestra en la Fig. 4.

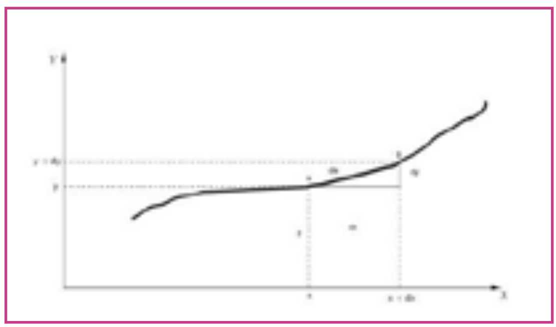

Figura 4: *Representación del triángulo característico de Leibniz*

Leibniz sostenía que, como el arco infinitesimal AB es indistinguible de la cuerda $\overline{AB}$, entonces el triángulo curvo es indistinguible del triángulo rectángulo que forma con ella. Así, Leibniz fue, uno de los mayores creadores de notación en la historia, más aún "fue el primer matemático de importancia en usar un punto para representar la multiplicación, y en representar las proporciones de la forma $a:b = c:d$" (Boyer, 2003; 509)

EL SIGLO XVIII E INICIOS DEL SIGLO XIX: APARECE LA NOCIÓN DE DERIVADA COMO LÍMITE DE UN COCIENTE INCREMENTAL

Al arribar al siglo XVIII, según Edwards (1979) nos encontramos con un Cálculo evidentemente indeciso; tales indecisiones persisten a lo largo de ese siglo, en donde Berkeley responde a que las dificultades asociadas con razones de fluxiones o diferenciales se pueden evitar reemplazando las últimas razones de las cantidades que se aproximan a cero, por razones de segmentos finitos de línea (p.294). Por su parte, Boyer (2003) explicita que:

> La descripción que hace Berkeley del método de las fluxiones es totalmente correcta y sus críticas están bien fundamentadas. En ellas hacía notar que al calcular o bien las fluxiones o las razones de las diferenciales, los matemáticos suponen en primer lugar que se les da ciertos incrementos no nulos a las variables para eliminarlos más tarde suponiéndolos iguales a cero (p. 539).

Este autor indica que el hecho de explicar el cálculo bajo estas premisas le parecía a Berkeley simplemente un juego de compensación de errores, y así "en virtud de un doble error se llega, aunque no a la ciencia, si a la verdad" (Boyer, 2003; p.540). Este matemático reprueba inclusive la explicación de Newton de las fluxiones en términos de razones primeras y últimas, negando la posibilidad de una velocidad literalmente "instantánea" en la que los incrementos de la distancia y del tiempo se han desvanecido para dejar en su lugar el cociente sin sentido ***0/0***. Más aún, en palabras del mismo Berkeley:

> ¿Y que son estas fluxiones? Las velocidades de incrementos evanescentes. ¿Y que son estos incrementos evanescentes? No son ni cantidades finitas ni cantidades infinitamente pequeñas, ni tampoco se reducen a la nada. ¿No podríamos llamarlos los fantasmas de cantidades desaparecidas? (Boyer, 2003; p.540; Edwards, 1979; p.294).

Ahora bien, con la intención de dar respuesta a estas y otras interrogantes de Berkeley, Edwards (1979) sintetiza que:

> El primer paso hacia la resolución de las dificultades de Berkeley definiendo explícitamente la derivada como un límite o un cociente de incrementos, en la manera sugerida pero no establecida con suficiente claridad por Newton, fue tomada por Jean d' Alembert (1717-1783) (p.295).

D' Alembert presenta según Edwards (1979) una representación de la derivada como el límite de un cociente de incrementos, escribiendo $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (p.296). Boyer (2003) por su parte menciona que en el artículo sobre diferencial que escribió para la Encyclopédie, D' Alembert aseveraba que "la diferenciación de ecuaciones consiste simplemente en hallar los límites de las razones de diferencias finitas de dos variables incluidas en la ecuación" (p.567). Además, oponiéndose a los puntos de vista de Leibniz y de Euler, insistía D' Alembert en que "una cantidad es algo o nada; si es algo, aún no se ha desvanecido; si no es nada, ya se ha desvanecido literalmente. La suposición de que hay un estado intermedio entre estos dos es una quimera" (Boyer, 2003; p.567). De acá, el autor señala que:

> Este punto de vista terminaría por excluir la vaga noción de las diferenciales como magnitudes infinitamente pequeñas, y D' Alembert sostenía que la notación de las diferenciales no es más que una manera conveniente de hablar, que depende, para su justificación del lenguaje de los límites. (p.567)

Asimismo, en el artículo del que se hizo mención arriba, se refiere a la obra *De quadratura curvarum* de Newton, en el cual D' Alembert interpreta las expresiones de Newton a las que él denominó "razones primeras y últimas" como límites y no como una primera o última razón de dos cantidades que están exactamente surgiendo al ser o desvaneciéndose, respectivamente.

Podríamos decir que este momento histórico la razón se asocia a la definición de derivada.

SIGLO XIX: CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES COMO CORTADURAS DE DEDEKIND

En otro orden de ideas, durante la Edad Contemporánea, Dedekind, Cantor, Meray y Heine, construyen los números reales. De hecho, "el enfoque de Dedekind estuvo cercanamente relacionado a la definición de Eudoxo de proporcionalidad de razones de magnitudes geométricas" (Edwards, 1979; p.331).

Es así como Dedekind define un concepto de gran importancia en la actualidad como es una cortadura de números racionales explicando que es "una partición (A_1, A_2) de Q en subconjuntos no vacíos y disjuntos, tales que, todo elemento de A_1 es menor que todo elemento de A_2" (Edwards, 1979; p.331). Boyer (2003) hace alusión a esto afirmando que la definición de proporción dada por Eudoxo:

> No está muy alejada de las distintas definiciones de número real que se dieron a finales del siglo XIX puesto que lo que hace es separar la clase de los números racionales $\frac{m}{n}$ en dos subclases, según que $ma \leq nb$ o $ma \geq nb$, lo que genera una cortadura en el sentido de Dedekind (p. 128).

Dedekind se preguntó, según Boyer (2003), ¿qué es lo que distingue a las magnitudes geométricas continuas de los números racionales?, señalando en relación a esta inquietud que:

> En cualquier división de los puntos del segmento en dos clases tales que cada punto pertenezca a una y solo una de las dos clases, y tal que todo punto de una de las dos clases esté a la izquierda de cualquier punto de la otra clase, hay uno y sólo un punto que produce la división. (p.695)

De esta manera, la idea de cortadura de Dedekind en el dominio de los números racionales, o cualquier otra construcción formal equivalente de los números reales, ha venido a reemplazar así la idea de magnitud geométrica como columna vertebral del análisis (Boyer, 2003; p.696). En este período se puede decir que la razón está asociada a un número real.

A MODO DE SÍNTESIS: PARTE I

La aproximación histórica de los conceptos de razón y proporción llevada a cabo desde el comienzo del estudio nos permitió vislumbrar diferentes perspectivas de tales objetos matemáticos a través de cada época de acuerdo al o a los matemáticos representativos de la misma, según el punto de vista que cada uno tuviese. Cada período explica la manera en que los conceptos de razón y proporción evolucionaron a través de la historia desde los distintos contextos matemáticos, como, el aritmético, el geométrico, el algebraico, el físico, el analítico y el topológico hasta llegar a la definición actual de los conceptos en estudio. Encontramos que desde la Edad Piedra se utilizaban cantidades lo más pequeñas posibles a fin de evitar el uso de fracciones, pero los Pitagóricos introducen la notación de fracción y definen la razón como una relación entre dos números enteros (y positivos), además definen a una proporción como la igualdad de dos razones, cuya definición se mantiene vigente hasta nuestros días.

Al arribar a la Edad Antigua, en el siglo V a.C, se asocia la razón a magnitudes geométricas y aritméticas de acuerdo al estudio de diversos matemáticos de la época y sustentándose en la geometría analítica como pilar fundamental de la matemática, acá Eudoxo de Cnido logra acercarse a la definición de proporción conocida en la actualidad. Posteriormente, se produce un salto epistemológico y al alcanzar la Edad Media, a los objetos de investigación se les relaciona al concepto de velocidad en el movimiento uniforme. Sin embargo, durante la edad moderna y hasta inicios del siglo XIX, cambia drásticamente esta idea y se obtiene una estrecha relación de la razón asociada al concepto de derivada, donde se representa a la razón como un límite de cociente incremental, pasando previamente por el trabajo de Barrow, Fermat, Newton y Leibniz con las cantidades que se aproximan a cero y el método de las fluxiones. Finalmente, al encontrarnos en el siglo XIX, se observa cómo los conceptos investigados contribuyen a demostrar una importante propiedad de los números reales, como lo es la completitud de ese conjunto, mediante la definición de las cortaduras de Dedekind.

Percibimos que el análisis epistemológico efectuado podría permitir la comprensión de los conceptos de razón y proporción como objeto de estudio en los diferentes tópicos matemáticos, en especial en el cálculo diferencial, que es tan usado pero al mismo tiempo, es desconocido por los y las estudiantes en vista de que no está contemplado en el currículo. Además, de acuerdo a las distintas perspectivas encontradas en la historia, se debe tener en cuenta como educador, que en el momento de introducir un contenido que tenga implícito los conceptos de razón y proporción en el aula, precisemos concretamente, desde qué contexto se estudiará, a fin de evitar generar dificultades para los y las estudiantes en el futuro.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, J., Rondero, C. y Tarasenko A. (2010). Algunas incongruencias conceptuales sobre la noción de linealidad. P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 535-543.

Bergé, C. y Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisada a través de los siglos. Aporte a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6 (3), 163-197.

Boyer, C. (2003). *Historia de la Matemática.* Madrid: Editorial Alianza.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo Conceptual del Cálculo.* México: Thomson Editores.

Edwards, C. (1979). *The Historical Development of the Calculus.* New York: Springer-Verlag..

Oller A. y Gairín J. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 16(3), 317-338.

Salazar, M. y Díaz, L. (2009). La actividad de medir aporta significados a fracciones y razones. P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22.* México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 207-215.

Valdivé, C. (2008). *Esquemas conceptuales asociados a la noción de infinitesimal y su evolución en estudiantes de Análisis Matemático.* Tesis Doctoral no publicada. UCLA-UNEXPO-UPEL.

Valdivé C. y Garbin, S. (2008). Estudio de los Esquemas Conceptuales Epistemológicos Asociados a la Evolución histórica de la Noción de Infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(3), 413-450.