REPRESENTACIONES BIDIMENSIONALES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS. UNA EXPERIENCIA CON ALUMNOS DEL PROFESORADO.

Carlos F. Pesce

Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González".
Buenos Aires, Argentina
cfpescejvg@gmail.com

FECHA DE RECEPCIÓN: 30/12/17 FECHA DE ACEPTACIÓN: 14/03/18

RESUMEN

En el presente trabajo se presenta una investigación realizada con estudiantes del profesorado en matemática, en la ciudad de Buenos Aires, Argentina, cuyo objetivo es analizar la existencia de prototipos en las representaciones bidimensionales de cuerpos geométricos. En la experiencia se ha elegido el objeto pirámide a efectos de realizar el estudio sobre la base de cuatro consignas concretas a saber: la definición, el dibujo de dos pirámides distintas, la explicación del por qué de esa diferencia y el dibujo del desarrollo plano de las mismas. El análisis y la comparación de los resultados obtenidos se han hecho atendiendo al modelo de Van Hiele y otros trabajos citados.

PALABRAS CLAVE:
tridimensional - pirámide - definición - representación

ABSTRACT

This is a research carried out with students of mathematics teaching in Buenos Aires, Argentina. The objective is to analyze the existence of prototypes in two-dimensional representations of geometric figures. In the experience, the pyramid object has been chosen for the purpose of carrying out the study on the basis of four concrete aspects: the definition, the drawing of two different pyramids, the explanation of the reason for that difference and the drawing of the flat development of the same. The analysis and comparison of the results obtained have been made according to the Van Hiele model.

KEYWORDS:
pyramid - definition - representation

INTRODUCCIÓN
LA GEOMETRÍA EN EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

El discurso matemático escolar de los años 60 y 70, con el advenimiento de la llamada Matemática Moderna, se caracterizó por un enfoque excesivamente riguroso en la enseñanza de la matemática en general y de la geometría en particular (Ferrarós Domínguez, 1998). Con esa tónica se dejaron de lado concepciones intuitivas que constituyen una ventaja para el aprendizaje de las figuras y cuerpos geométricos junto con sus propiedades. De hecho, el surgimiento de la geometría como disciplina experimental se remonta a Egipto, para adquirir posteriormente un carácter puramente abstracto y riguroso con la obra de Euclides en Grecia.

Estudios recientes reconocen en nuestro país que es fundamental retornar a la comprensión de las propiedades geométricas y hacer hincapié en la visualización y en su utilización para la construcción de los conocimientos geométricos no limitando las actividades planteadas en el aula a la aplicación de algoritmos (Crespo Crespo, citada por Blanco, 2009, p.27).

En la enseñanza de la geometría prevalece el rigor propio del esquema axiomático y la deducción. Por otro lado, las aplicaciones prácticas están atravesadas por el manejo de procesos que están alejados de la intuición que conlleva la visualización.

En uno de los textos escolares que caracterizaron durante décadas el discurso escolar de la matemática moderna en Argentina, se da la siguiente definición: "Dado un ángulo poliedro y un plano secante, se llama pirámide a la parte del ángulo poliedro que se encuentra en el semiespacio respecto del plano que contiene al vértice del ángulo poliedro" (Repetto, Linskens y Fesquet, 1968, p.178).

El texto citado consta de una parte importante dedicada al estudio de la geometría del espacio con la estructura tradicional anteriormente descripta. En la definición de pirámide aparecen conceptos geométricos previamente definidos que el alumno debe conocer para entender y comprender que, de ese modo, el objeto geométrico queda unívocamente determinado para diferenciarlo de otros que se definen en capítulos previos y posteriores.

> En geometría, bajo un paradigma basado en el enfoque tradicional, se estudian primero las definiciones y propiedades de los cuerpos geométricos, sin haber tenido antes un acercamiento intuitivo que les permita dotar de significado a las definiciones y propiedades de los mismos (Blanco, 2009, p.29).

Sin lugar a dudas, en la actualidad, en contenidos de matemática en el nivel medio (y también en el superior), hay una marcada tendencia al desarrollo algebraico y al aprendizaje de índole algorítmica en detrimento de lo visual. En consecuencia, se evalúan las acertadas elecciones de "recetas" y la pericia en la aplicación de procedimientos de resolución.

La geometría del espacio es la gran ausente en los programas de matemática de la escuela secundaria. Sólo se trabaja la geometría del plano con los típicos problemas que consisten en el planteo de ecuaciones algebraicas para hallar las medidas de los lados de los polígonos, superficies o volúmenes, despojando a tales situaciones problemáticas del concepto puramente geométrico. Además, se le resta importancia porque los conceptos previos necesarios para asimilar los contenidos de años superiores no requieren del uso de la geometría. “Se considera conveniente usar la visualización creativamente, como una herramienta para el entendimiento. Teniendo en cuenta que la visualización matemática es el proceso de formarse imágenes mentales, con lápiz y papel o con ayuda de la tecnología, y usar tales imágenes en forma efectiva para descubrir conceptos matemáticos e interpretarlos” (Cantoral y Montiel, 2003, p.8).

Pensando en la representación bidimensional de objetos tridimensionales, se requiere un conocimiento y manejo adecuados de la geometría del plano. Sin embargo, según lo expresado más arriba, ese estudio de la geometría en la escuela secundaria queda relegado a nociones básicas que quedan perdidas en el universo de contenidos puramente algebraicos procedimentales y algorítmicos.

> El cambio dimensional, al que definimos como un proceso de identificación de configuraciones de dimensión diferente a la inicial, es fundamental en el desarrollo de las capacidades geométricas [...] hay que considerar que la mayor parte de la información ofrecida por los problemas de geometría es bidimensional, y el cambio dimensional se hace necesario para poder analizar la información desde una perspectiva unidimensional o tridimensional (Torregrosa y Quesada, 2007, p.285).

En este proceso de representaciones, se ponen en juego procesos cognitivos que permiten la interpretación de figuras planas para convertirlas en objetos tridimensionales y de estos objetos para transformarlos en conceptos geométricos, objetos de estudio de la geometría (Gutiérrez, 1998). Este proceso en el que la visualización que involucra la construcción de imágenes mentales no es inmediato, sino que requiere de etapas hasta lograr la construcción del conocimiento geométrico.

LA ADQUISICIÓN DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO EN LA ESCUELA

Dina y Pierre Van Hiele en su modelo sobre el desarrollo del pensamiento geométrico, subdivide en cinco niveles progresivos de adquisición del pensamiento geométrico, a saber: visualización o reconocimiento, análisis, ordenación o clasificación, deducción formal y rigor. En lo que atañe a la enseñanza de la geometría del espacio, se hace imperiosa la necesidad de pensar la metodología empleada a partir del modelo de Van Hiele. Las nociones introductorias de geometría consisten en el estudio de figuras en el plano. El dibujo de un cuerpo geométrico (tres dimensiones) mediante su representación en el plano (dos dimensiones) genera cierta dificultad de comprensión, propiciando ideas erróneas y equivocadas dependiendo del tipo de perspectiva que se utilice.

El modelo de Van Hiele, en relación al trabajo con cuerpos geométricos, puede resumirse de la siguiente manera (Londoño Mejía y Zapata Acevedo, 2013; Guillén Soler, 2004; Vargas Vargas, Gamboa Araya, 2013):

- Nivel 1 (Reconocimiento). Los conceptos geométricos son considerados como entes globales. En este nivel, el alumno adquiere vocabulario, identifica elementos y figuras y cuerpos, pero no es conciente de sus propiedades pues manipula objetos concretos.

- Nivel 2 (Análisis). El alumno comienza a analizar conceptos geométricos y propiedades características de los entes geométricos, identificando y comprobando relaciones entre elementos de una figura o cuerpo. Pero no tiene conciencia de las relaciones entre las propiedades. Pone en juego el descubrimiento, la clasificación y la generalización a partir de la observación de casos y la experimentación.

- Nivel 3 (Clasificación). El alumno realiza clasificaciones de los objetos basadas en propiedades y se descubren nuevas propiedades a partir de otras conocidas. Su razonamiento es no es formal, si bien entiende y reproduce demostraciones formales sencillas, pero no es capaz de comprender el significado de deducciones formales. Recurre a ejemplos y figuras para dar explicaciones.

- Nivel 4 (Deducción Formal). En este nivel, el alumno comprende la importancia y relación entre términos, definiciones, teoremas y demostraciones. Realiza razonamientos lógicos formales y realiza deducciones propias.

- Nivel 5 (Rigor). El alumno puede trabajar en sistemas axiomáticos, comprendiendo a la geometría desde un punto de vista totalmente abstracto.

No en todos los niveles educativos ni en todos los temas de geometría, los estudiantes logran transitar por los cinco niveles. A veces, incluso puede encontrarse en un momento dado en distintos niveles para diversos contenidos.

"En un libro, en un artículo se transmite sólo el producto final, la imagen última con todos los elementos acumulados en ella, lo que resulta extraordinariamente engorroso de interpretar" (Guzmán, citado por Micelli, 2010, p.42). Efectivamente, no se explicita en detalle el trazado parcial de los dibujos de cuerpos geométricos que aparecen en los diversos textos destinados al aprendizaje. Los alumnos acceden de esta manera a representaciones finales rígidas, muchas veces marcadas por la presencia de prototipos de representación (Rey, 2004) característicos de la escuela.

Con una perspectiva que excede los objetivos de la presente investigación, el uso inteligente de la herramienta informática coadyuva indudablemente a entender algunas propiedades de los cuerpos geométricos al permitir su observación desde diferentes ángulos y perspectivas, lo cual representa una gran ventaja a los efectos de crear una imagen bidimensional más real del objeto tridimensional.

Los programas de diseño y animación en 3D promueven el ejercicio de conversión en forma automática a una figura geométrica plana a los efectos de la representación en la pantalla de un objeto de tres dimensiones. Los usuarios de esos utilitarios adquieren la destreza necesaria para que lo visualizado en dos dimensiones adquiera el aspecto y la apariencia de un objeto tridimensional. Por otra parte, la visión binocular permite que el sujeto adquiera la percepción de profundidad mediante el estímulo cerebral combinado de las retinas de ambos ojos en forma simultánea.

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

Se eligieron al azar a 11 estudiantes de primer año del profesorado en matemática en la ciudad de Buenos Aires, Argentina, que participaron de forma voluntaria. Se les propuso una actividad de cuatro consignas, en el siguiente orden:

1. Defina el objeto pirámide.
2. Dibuje dos pirámides distintas.
3. Explique por qué las pirámides dibujadas son distintas.
4. Elabore el desarrollo plano de sus dos pirámides.

Se dispone solo el registro escrito de la actividad en cuestión. Si bien para el análisis sólo cuenta lo vertido en el papel, una de las estudiantes hizo un comentario que resulta interesante considerar. La alumna comentó, al entregar la hoja, que recordaba a un profesor de matemática que hacía referencia a que el dibujo del cuerpo geométrico, sea cual fuere, es sólo una representación, haciendo alusión al carácter bidimensional de tal representación. "El distinguir entre un objeto y su representación determina un momento clave para el aprendizaje de la matemática, pues las representaciones no sólo son necesarias a los fines de la comunicación, sino también para la actividad cognitiva del pensamiento" (Blanco, 2009, p.19).

El objetivo de esta experiencia fue analizar desde el modelo de Van Hiele cuáles son los niveles que transitan los estudiantes en relación a los cuerpos geométricos, en particular de la pirámide.

ANÁLISIS DE LOS TRABAJOS

En la primera consigna, se pidió la definición del objeto pirámide. En los contenidos de matemática de nivel medio no se hace mención explícita al concepto de "definición". En los estudiantes que intervinieron se observa que han logrado tomar conciencia del proceso, a juzgar por lo escrito en cada uno de los casos.

"Crear y usar definiciones matemáticas es una actividad esencial y difícil para los estudiantes." (Rasmunsen, Zandieh, King y Teppo, citados por Escudero, Gavilán y Sánchez Matamoros, 2014, p.9). Sin embargo, por tratarse de futuros profesores, es importante que comprendan la importancia que tienen las definiciones en la construcción de los conceptos matemáticos.

En los contenidos del profesorado el concepto de definición, sus características y modalidades se trata sobre el final de la carrera, en la asignatura denominada Fundamentos de la matemática. Sin embargo, se trabaja con definiciones en el resto de las materias disciplinares desde primer año en el que se cursa ,además, la asignatura Geometría I que trata la geometría del plano y el espacio. En otros planes de estudio, en cambio, ambas asignaturas se cursaban en forma paralela.

"Las definiciones de conceptos matemáticos, las estructuras subyacentes de las definiciones y el proceso de definir deben ser componentes fundamentales del conocimiento de la materia de los profesores de matemáticas" (Zazkis y Leikin, citados por Escudero et al., 2014, p.9).

Todos los estudiantes consideraron a la pirámide integrada por dos partes: la base, formada por un polígono cualquiera y las caras laterales (Figura 1, Figura 5). Todos, salvo uno, indicaron que tales caras son triángulos que confluyen en un punto. La mayoría describió a la base como un polígono cualquiera (Figura 1, Figura 2, Figura 3, Figura 4, Figura 5). En un caso se indicó que el polígono debía ser regular (Figura 6) y, en otro, que la base era cuadrada (Figura 7).

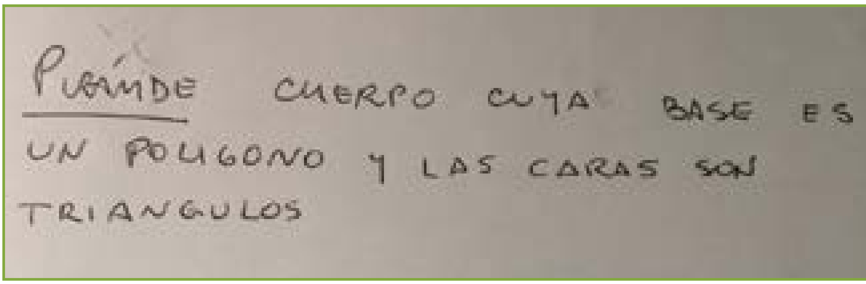

Figura 1: *Definición de pirámide dada por el Alumno A7*

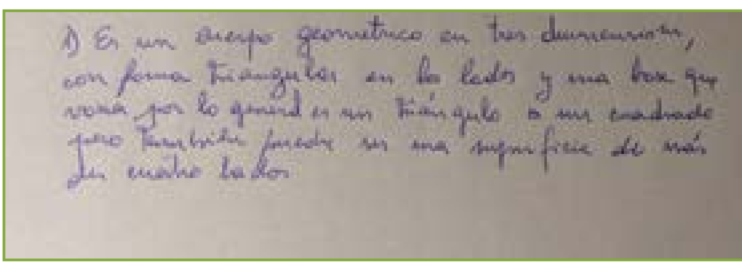

Figura 2: *Definición de pirámide dada por el Alumno A4*

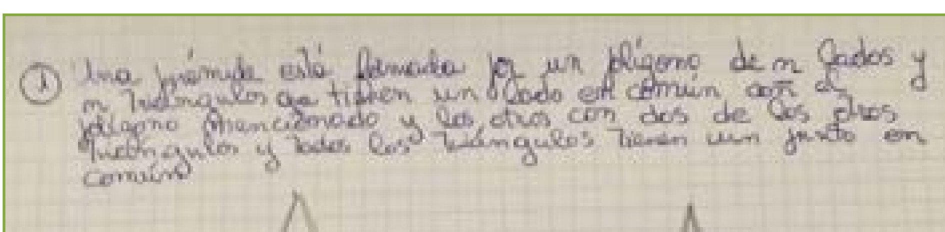

Figura 3: *Definición de pirámide dada por el Alumno A*

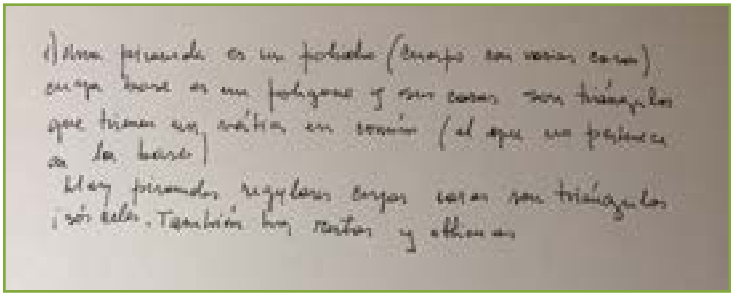
1) Una pirámide es un poliedro (cuerpo con varias caras) cuya base es un polígono y sus caras son triángulos que tienen un vértice en común (el que no pertenece a la base)
Hay pirámides regulares cuyas caras son triángulos isósceles. También hay rectas y oblicuas

Figura 4: *Definición de pirámide dada por el Alumno A5*

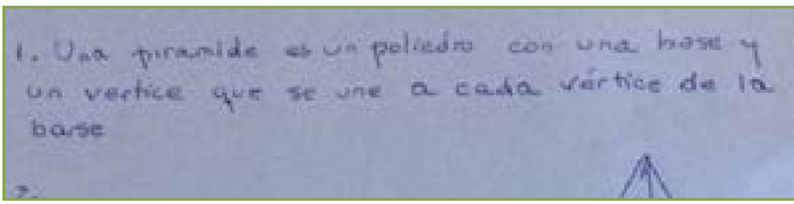
1. Una piramide es un poliedro con una base y un vertice que se une a cada vértice de la base
2.

Figura 5: *Definición de pirámide dada por el Alumno A11*

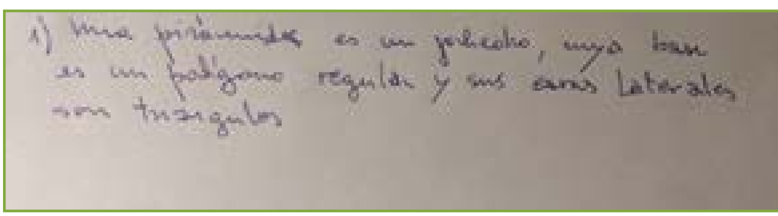
1) Una pirámide es un poliedro, cuya base es un polígono regular y sus caras laterales son triangulos

Figura 6: *Definición de pirámide dada por el Alumno A2*

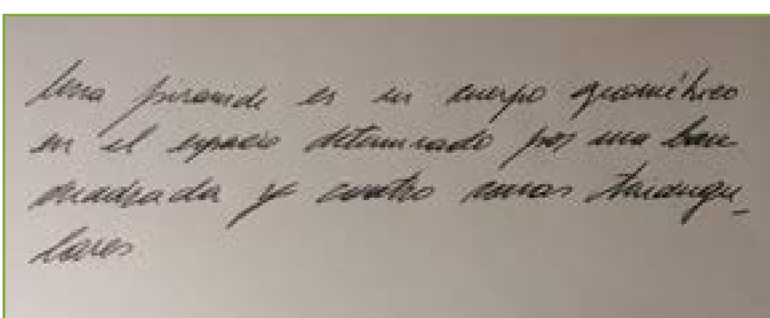
Una piramide es un cuerpo geométrico en el espacio determinado por una base cuadrada y cuatro caras triangu-lares

Figura 7: *Definición de pirámide dada por el Alumno A8*

Las definiciones propuestas se limitan a veces a casos particulares (base cuadrada, base regular). Algunas son realizadas por género próximo y diferencia específica, por medio de la caracterización de ciertos poliedros (Figura 4, Figura 5, Figura 6) o cuerpos geométricos (Figura 1, Figura 2, Figura 7). En un caso, la definición dada es constructiva (Figura 3), ya que describe el objeto pirámide a través de pasos que permitirían su construcción.

En lo referente a definiciones, algunos alumnos muestran estar transitando el nivel 2 de Van Hiele por no lograr aún plena conciencia de las clasificaciones y generalizaciones a partir de propiedades y quedar en casos particulares en las definiciones, mientras que otros ya muestran que lo han superado, encontrándose en niveles superiores, ya que es en el Nivel 3 aquel en el que se logra definir correctamente.

La respuesta se percibe como una descripción del objeto pirámide en la mayoría de los estudiantes si se piensa en los requisitos que debe tener una buena definición, entre ellos, la elegancia. Esta cualidad se caracteriza por el empleo de la menor cantidad de palabras posible, la menor cantidad de símbolos si los hubiere y el uso de los términos generales más básicos, entre otros.

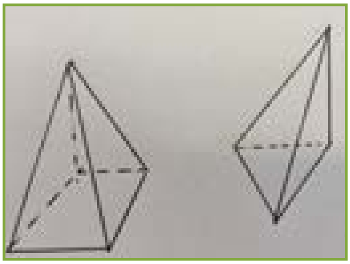

Figura 8:
Pirámides dibujadas por el Alumno A1

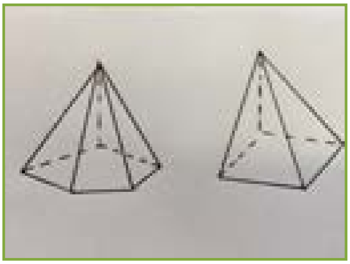

Figura 9:
Pirámides dibujadas por el Alumno A2

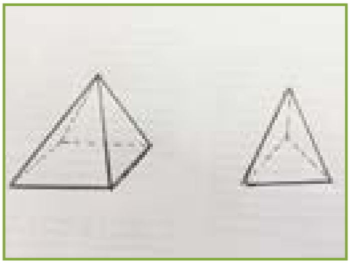

Figura 10:
Pirámides dibujadas por el Alumno A3

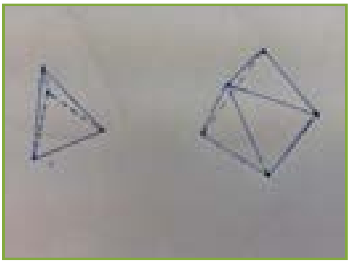

Figura 11:
Pirámides dibujadas por el Alumno A4

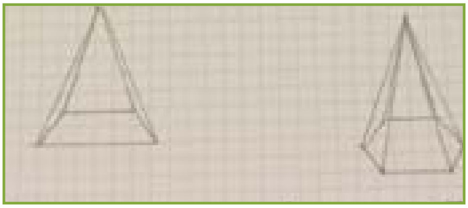

Figura 12:
Pirámides dibujadas por el Alumno A5

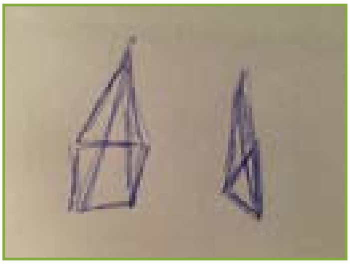

Figura 13:
Pirámides dibujadas por el Alumno A6

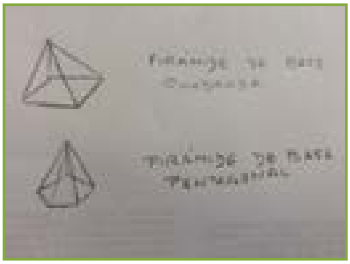

Figura 14:
Pirámides dibujadas por el Alumno A7

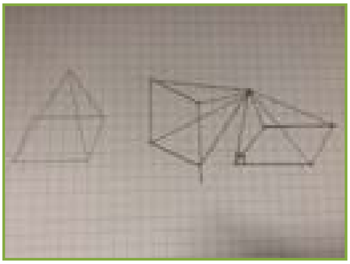

Figura 15:
Pirámides dibujadas por el Alumno A8

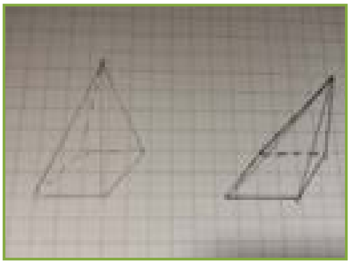

Figura 16:
Pirámides dibujadas por el Alumno A9

Figura 17:
Pirámides dibujadas por el Alumno A11

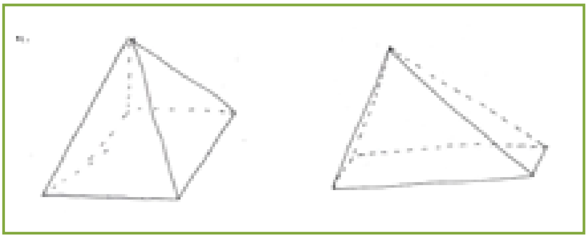

Figura 18:
Pirámides dibujadas por el Alumno A10

En relación a la segunda consigna, consistente en el trazado de dos pirámides distintas, se buscaba no solo analizar la representación gráfica del objeto recién definido, sino la identificación de la presencia de prototipos.

El prototipo de representación de pirámides utilizado usualmente en el discurso matemático escolar que ubica la base de la pirámide apoyada y su otro vértice por encima de ella se encuentra presente en estos dibujos. Asimismo, la convención de las representaciones en los libros de texto en lo que se refiere al trazado de las aristas no visibles con línea punteada es otro ejemplo a tener en cuenta según lo realizado por los alumnos. Los adornos de mesa y las pirámides egipcias constituyen, además, algunos ejemplos concretos más comunes de los que deriva la representación mental del objeto pirámide, colaborando al afianzamiento de estos prototipos.

Por otra parte, también se observa que 15 de las 22 pirámides son de base cuadrada 4 son de base triangular, dos de base pentagonal y una sola de base hexagonal, poniendo en evidencia que el prototipo de pirámide de base cuadrada está fuertemente arraigado.

En lo que atañe a la ubicación del vértice de la pirámide (el vértice del ángulo poliedro en el que confluyen las caras laterales), todos los alumnos, sin excepción, lo dibujaron en la parte superior (Figura 8, Figura 9, Figura 10, Figura 11, Figura 12, Figura 13, Figura 14, Figura 15, Figura 16, Figura 17, Figura 18). Por ejemplo, Hoz, citado por Haydee Blanco en su trabajo (Blanco, 2009), se refiere a la rigidez geométrica, entendida como la única forma de ver y dibujar un objeto geométrico o, en otras palabras, la incapacidad de esbozar un diagrama de manera distinta. Se da el ejemplo de un triángulo rectángulo rotado. En las Figuras 11 y 15, sin embargo, se observa cierto grado de rotación y dinamismo en este sentido.

Las explicaciones que dan estudiantes cuyos dibujos se muestran desde alumno A1 al A7, para fundamentar por qué las pirámides dibujadas son distintas, se refieren a la diferencia de los lados en el polígono de base (Figura 8, Figura 9, Figura 10, Figura 11, Figura 12, Figura 13, Figura 14). Sin embargo el alumno 11 dice que son distintas por tener alturas diferentes (Figura 17) y el alumno A8 por tener distintas alturas y "ángulos comprendidos" (Figura 15). Los alumnos A9 y A10 por tratarse de pirámides rectas u oblicuas (Figura 16, Figura 18), aunque A9 califica a la pirámide recta como "regular".

En relación a los desarrollos planos de las pirámides, el alumno A1 manifestó desconocer lo que representa el desarrollo plano. El resto de los alumnos realizan el desarrollo plano de una de las pirámides o de ambas.

Es posible identificar dos tipos de desarrollos; los que se realizaron a partir del polígono que sirve de base, dibujando luego cada una de las caras laterales denomina vértice de la pirámide (Figura 20, Figura 21, Figura 22 y Figura 23) y aquellos en los que se han dibujado las caras laterales en forma consecutiva con la base compartiendo una arista con alguna de ellas (Figura 19, Figura 24, Figura 26 y Figura 27).

El Alumno A6, presenta un desarrollo que corresponde al nivel 2 de Van Hiele, en el que las representaciones siguen sin dar sensación de profundidad, identificado como etapa esquemática espacial de la evolución de la habilidad de dibujo en perspectiva (Gutiérrez, 1998).

Los alumnos A2 y A5 (Figura 19 y Figura 22) dibujaron además las “aletas para pegar”, así lo manifiesta el último estudiante. Pensaron en el desarrollo a partir de la manera de construir la pirámide haciendo los recortes correspondientes en una cartulina, según se trabaja en la escuela. Esto puede deberse a no diferenciar entre los desarrollos planos y las plantillas de construcción de poliedros o a un exceso en la utilización de materiales didácticos concretos.

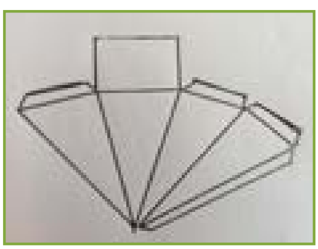

Figura 19:
Desarrollo de pirámide dibujada por el Alumno A2

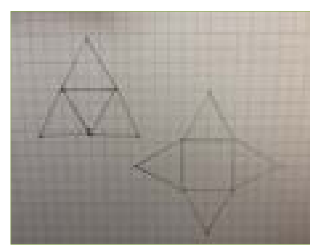

Figura 20:
Desarrollo de pirámides dibujadas por el Alumno A3

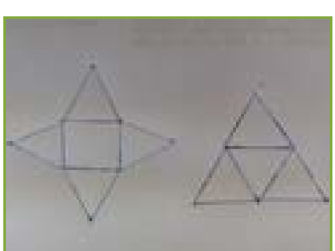

Figura 21:
Desarrollo de pirámides dibujadas por el Alumno A4

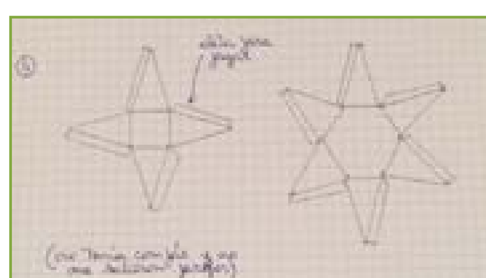

Figura 22:
Desarrollo de pirámides dibujadas por el Alumno A5

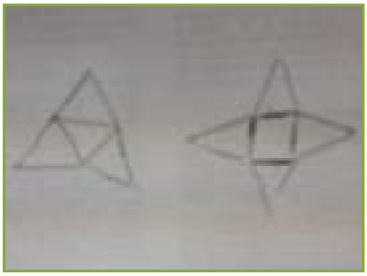

Figura 23:
Desarrollo de pirámides dibujadas por el Alumno A6

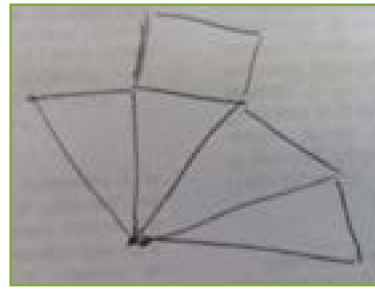

Figura 24:
Desarrollo de pirámide dibujada por el Alumno A7

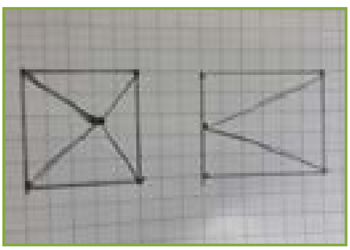

Figura 25:
Desarrollo de pirámides dibujadas por el Alumno A6

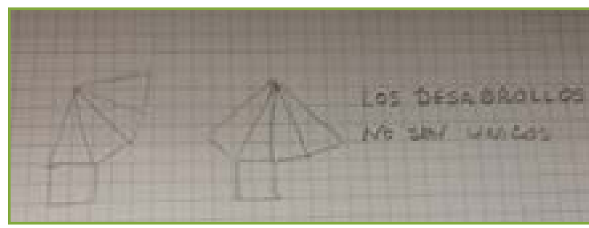

Figura 26:
Desarrollo de pirámide dibujada por el Alumno A7

Figura 27:
Desarrollo de pirámides dibujadas por el Alumno A11

Algo que también puede comentarse de las respuestas obtenidas es que la mayoría de los alumnos utilizó útiles de geometría en las construcciones, llegando incluso A5 a afirmar que no tenía compás, por lo que no le "salieron parejas" las construcciones (Figura 22). Algunos alumnos, sin embargo realizaron las construcciones con carácter de figuras de análisis a mano alzada y sin rigurosidad geométrica (Micelli, 2010).

CONCLUSIONES

Del análisis de los trabajos realizados por los estudiantes se percibe la influencia del discurso matemático escolar pensando no sólo algunas de las características en común que se han evidenciado en las figuras sino también las descripciones vertidas de la tarea realizada.

Se notó el peso que la imagen de la pirámide recta y de base cuadrada, tiene en los alumnos, heredada de la forma en que se ejemplifica en los libros de texto y en las clases de geometría. Por otra parte, la posición en la que fueron dibujadas pone de manifiesto tal influencia. En efecto, la razón de ser de la segunda consigna estaba dada por la identificación de la presencia de prototipos.

Sin lugar a dudas, el material concreto que se utiliza y el armado de los sólidos a partir de sus desarrollos planos dibujados en cartulina, que también figuran en los libros, marcan notablemente la tendencia de las representaciones de los cuerpos geométricos. De todas maneras, no hubo unanimidad en cuanto a las formas de realizar tales desarrollos pensando en los clásicos que figuran en las publicaciones y que conviven.

La mayoría de los estudiantes utilizó la regla para realizar la tarea. Esa costumbre proviene de la lógica exigencia del uso de los elementos de geometría en las clases, en especial, la regla no graduada y el compás en la geometría métrica estudiada en primer año del profesorado.

Algunos alumnos fueron precisos en el lenguaje geométrico empleado en las definiciones. Otros no utilizaron los vocablos específicos pero explicaron bien sus dibujos en líneas generales. A pesar de ello, las definiciones dadas hicieron referencia a casos particulares en su gran mayoría.

A partir del modelo de razonamiento geométrico del matrimonio holandés Van Hiele, algunos alumnos muestran estar transitando, para algunos conceptos matemáticos, el segundo nivel por no haber logrado aún plena conciencia de las clasificaciones y generalizaciones a partir de las propiedades y quedarse en los casos particulares descriptos. Otros estudiantes, en cambio, ya muestran que lo han superado, puesto que en el nivel tres ya logran definir en forma correcta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Blanco, H. (2009). *Representaciones gráficas de los cuerpos geométricos. Un análisis de los cuerpos a través de sus representaciones.* Tesis de Maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Cantoral R. y Montiel, G. (2003) Una representación visual del polinomio de Lagrange. *Números* 55, pp. 3-22.

Escudero, I.; Gavilán, J. y Sánchez Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 17 (1), 7-32.

Ferrarós Domínguez, J. (1998). El enfoque conjuntista en matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* 1(3), 389-412.

Guillén Soler, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática 16* (3), 103-125

Gutierrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista EMA 3* (3), 193-220.

Londoño Mejía, A. y Zapata Acevedo, Y. (2013). *Enseñanza de la pirámide teniendo como base las fases de aprendizaje de Van Hiele.* Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.

Micelli, M. (2010). *Las figuras de análisis en geometría. Su utilización en el aula de matemática.* Tesis de Maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Repetto, C.; Linskens, M. y Fesquet, H. (1968). *Álgebra y Geometría: Tomo 2.* Buenos Aires: Kapelusz.

Rey, J. L. (2004). Dificultades conceptuales generadas por los prototipos geométricos o cuando los modelos ayudan, pero no tanto. *Premisa 6* (22), 3-12.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10* (2), 275-300.

Vargas Vargas, G. y Gamboa Araya, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *UNICIENCIA 27* (1), 74-94.