DIFICULTADES EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN UN ENFOQUE ALGEBRAICO

Carlos Oropeza Legorreta, Cecilia Crespo Crespo

Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán-UNAM, México
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González", Buenos Aires, Argentina.

coropeza96@hotmail.com, crccrespo@gmail.com

FECHA DE RECEPCIÓN: 29/01/18 FECHA DE ACEPTACIÓN: 11/03/18

RESUMEN

Nuestro estudio pretende dar a conocer las dificultades que los estudiantes enfrentan al resolver problemas de corte algebraico. En este trabajo se reportan algunas experiencias recopiladas en diversos cursos de álgebra para estudiantes de ingeniería, así como de un taller y un diplomado relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En la selección de los problemas se consideraron las recomendaciones vertidas por Polya. Algunos de los resultados obtenidos ponen de manifiesto que la carencia en el manejo de información básica de álgebra provoca en la mayoría de los casos que los estudiantes no logren relacionarla con nuevos conceptos.

ABSTRACT

Our study aims to introduce the difficulties that students face up to solve algebraic problems. In this paper we report some experiences collected in several courses about algebra for undergraduate students, as well as a workshop and a diplomat both related with teaching and learning of mathematics. In the selection of problems we are considerate the recommendations made by Polya. Some of the results obtained show that the lack in handling basic concepts of algebra causes in most cases that students fail to relates them with new concepts.

PALABRAS CLAVE:

dificultades - problemas algebraicos - estrategias - solución

KEYWORDS:

algebraic problems – strategies - solution

INTRODUCCIÓN

Con frecuencia en las escuelas de ingeniería en México, es común escuchar la opinión tanto de profesores como de estudiantes acerca de que los programas de estudio son extensos y atienden con poco énfasis el proceso de construcción de conceptos, análisis, argumentación y creación de ideas, propiciando con ello una visión reduccionista de dichos programas. Al parecer, existe el común denominador de centrar la atención de los cursos en la solución de ejemplos que en su mayoría incluyen soluciones algorítmicas.

Los factores que influyen en la aparición de dificultades en el aprendizaje del álgebra son numerosos y de distinta naturaleza. Por ello se considera importante lograr en los estudiantes bases académicas sólidas que permitan desarrollar posteriormente la disciplina. En el aula, cada vez se reconoce más el valor que posee la introducción de ejercicios, problemas y actividades que representen un reto para los estudiantes y les permitan explorar sus conocimientos matemáticos en busca de soluciones a los cuestionamientos planteados. En su resolución ponen en juego sus estrategias cognitivas y su capacidad de análisis. Deben utilizar todos los recursos que tengan disponibles que les permitan ensayar distintas soluciones y ponerlas a prueba para validarlas hasta obtener la que consideren adecuada.

En la actualidad, los recursos tecnológicos brindan la posibilidad de cerciorarse si la solución obtenida es correcta, pero también permiten visualizar características de los objetos matemáticos involucrados en un problema planteado para poder hacer hipótesis y conjeturas que se orienten a la resolución del mismo. Por un lado, favorecen la motivación y por otro brindan elementos que permiten que los estudiantes comprendan que las matemáticas son una parte fundamental en la formación de ingenieros y que no se encuentran alejadas de lo que los rodea, como muchos las catalogan, porque muchas veces el lugar en que posicionan a las matemáticas se debe a lo poco prácticas y tediosas que se presentan las clases.

En relación al aprendizaje del álgebra realizadas en el marco del PME (Psychology of Mathematics Education), grupo de discusión formado en el ICME (Internacional Congress on Mathematical Education), muchas de las investigaciones se han centrado en la manera en la que los estudiantes abordan la resolución de ecuaciones, identificándose tres tipos de enfoques básicamente: intuitivo, sustitución por tanteo y formal. Los primeros involucran el uso de propiedades numéricas, técnicas de recuento y métodos de recubrimiento. En los problemas que requieren representaciones verbales, es usual la utilización de estrategias informales que no requieran de símbolos algebraicos, de manera que se basan en ensayo y error para encontrar respuestas acertadas. En oportunidades, los alumnos pueden aplicar estrategias informales para lograr la representación numérica de la ecuación algebraica para encontrar la solución (Mayer, 1985), pero los procesos de transición desde lo intuitivo a lo formal suelen resultar complejos para aquellos que aplicaron estrategias informales en un inicio (Heffernan y Koedinger, 1997; Mayer, 1982; Nathan, Kintsh y Young, 1992).

Los fundamentos algebraicos son necesarios para el desarrollo adecuado de un curso de álgebra en escuelas de ingeniería. En nuestra investigación nos orientamos a reflexionar para poder recobrar evidencias que permitan fundamentar la necesidad de profundizar el análisis de las respuestas de los estudiantes, y poder estructurar diseños de situaciones didácticas que promuevan la solución de problemas desde diversas estrategias. En ellas, consideramos que la tecnología debe estar disponible para que ante un problema planteado, pueda ser utilizada como un instrumento de manera adecuada.

FUNDAMENTACIÓN

En la actualidad, las distintas corrientes de la didáctica de la matemática, reconocen el papel que juegan en la construcción del conocimiento matemático, la intuición y el abordaje informal inicial de los conceptos. Para el constructivismo, este proceso es resultado de interacciones previas que se dan en contextos no establecidos formalmente para el aprendizaje de los principios del álgebra. El conocimiento que se obtiene de manera informal se debe ser tenido en cuenta para desarrollar el conocimiento formal de los aspectos semánticos y sintácticos de álgebra. El docente debe tomar conciencia de que los alumnos comprenden los principios del álgebra como resultado de actividades que parten de la aritmética. Estas se trabajan desde los primeros años de la escuela y es en la educación secundaria cuando se comprende la relación con los conceptos de álgebra. El pasaje de la aritmética al álgebra no es inmediato, es un proceso en el cual muchas veces los alumnos pasan por etapas en las que afrontan con éxito problemas de adicción, sustracción y multiplicación, a través de un amplio conjunto de estrategias pero presentan dificultades en el trabajo con operaciones algebraicas que demandan procesos más complejos y abstractos. La comprensión del significado de igualdad, el uso de literales, las relaciones entre los símbolos, son algunas de las dificultades a las que deben enfrentarse los estudiantes. En los niveles en los que se inicia el estudio más formal del álgebra, es donde se encuentra mayor fracaso escolar (Grupo Azarquiel citado por Gavilán Bouzas, 2011). Es el procesamiento lógico y abstracto involucrado en la comprensión de las relaciones entre los símbolos que suponen una conexión con materiales o entidades concretas la que supone una gran complejidad para los alumnos. El enfoque aritmético de un problema supone la descomposición del mismo en subproblemas más sencillos, hasta llegar a la solución; el enfoque algebraico implica la identificación de las variables intervinientes y de los parámetros para, buscar las relaciones entre ellos y conseguir expresarlas en términos algebraicos, dando lugar a una o varias ecuaciones que aún deben ser resueltas (Gavilán Bouzas, 2011).

A continuación se caracterizan las 4 fases que George Polya (2002) menciona en la resolución de problemas:

- 1. Comprensión del problema. La persona que va a solucionar el problema deberá poder separar las principales partes del problema que son la incógnita, los datos y la condición. Se deben considerar estas partes atentamente, repetidas veces y bajo diversos ángulos. Si hay alguna figura relacionada al problema, se debe dibujar y destacar en ella las incógnitas y los datos. Es necesario dar nombres a dichos elementos y por consiguiente introducir una notación adecuada.

- 2. Concepción de un plan. Se tiene un plan cuando se sabe, al menos a “grosso modo”, qué cálculos, qué razonamientos o construcciones se habrán de efectuar para encontrar la incógnita. Lo esencial en la solución de un problema es el concebir la idea de un plan.

- 3. Ejecución del plan. Para lograrlo, hace falta el concurso de toda una serie de circunstancias: conocimientos ya adquiridos, buenos hábitos de pensamiento, concentración, paciencia, etc. Se debe verificar cada paso del plan concebido y asegurarse de su exactitud.

- 4. Visión retrospectiva. Reconsiderando la solución de un problema, reexaminando el resultado y el camino que condujo a ella, se podrían consolidar los conocimientos y desarrollar aptitudes para resolver problemas. Es recomendable verificar la solución, especialmente si existe un medio rápido e intuitivo de asegurar la exactitud del resultado o del razonamiento. Al reconsiderar la solución de un problema se presenta la oportunidad de investigar sus relaciones. Polya (2002, p.5) menciona también:

  Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de cada problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto pero si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar en cuanto el descubrimiento y el goce del triunfo… por ello, un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ello el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello.

En la actualidad, entre los recursos didácticos que se disponen en el aula, se encuentran los recursos tecnológicos que van desde el uso de calculadoras hasta la utilización de software generales o específicos para ciertas áreas de la matemática. El uso que puede hacerse de ellos en el aula es diverso. Rabardel (2011), afirma que pueden desempeñar el papel de simples artefactos cuando se trata de algo susceptible de uso, pero que llegan a convertirse en instrumentos cuando se combina con las habilidades del sujeto que los asume como propios. En el aula, los artefactos deberían convertirse en instrumentos para el para la construcción del conocimiento o su aplicación a la resolución de problemas. El papel del profesor y de las actividades que proponen son fundamentales para este proceso.

MÉTODO

La recopilación de la información que se presenta en este trabajo, es producto de tres puestas en escena de los problemas seleccionados en dos diplomados y un taller impartidos para profesores de bachillerato en la UNAM (Universidad Nacional Autónoma de México). En total se trabajó con aproximadamente 50 profesores. Durante su desarrollo se les solicitó la solución en forma individual de tres problemas uno a uno. Se les pidió bosquejar su solución a partir de su propuesta esquematizada; posterior a ello, modelar las ecuaciones y finalmente su solución. Después se les pidió la conformación de diferentes equipos para que discutieran de esta forma sus propuestas y, una vez unificadas sus opiniones, exponer los planteamientos al resto del grupo. Al término de la participación de cada uno de los equipos se dio tiempo para efectuar una retroalimentación a manera de conclusión. Además, que se aplicó durante dos semestres con estudiantes de ingeniería en la materia de algebra lineal como una herramienta de exploración; durante el periodo de trabajo, se les proporcionaron los mismos ejercicios que fueron entregados a los profesores y se les solicitó que les dieran solución. La diferencia entre profesores y alumnos es que a los alumnos se les pidió resolver los problemas algebraicos haciendo uso de software matemático, siendo estos GeoGebra y Maple. De igual manera que con los profesores, se pidió que conformaran equipos de 5 personas para llevar a cabo la solución de los ejercicios; una vez resueltos, se dio una retroalimentación.

A continuación se muestran algunas de las producciones resultantes de estas instancias, en las cuales se dan evidencias de los desarrollos analizados, los cuales son la base de la exploración que hemos realizado. Los problemas que se plantearon fueron tomados de Perelman (1978) y se muestran las soluciones propuestas para algunos de ellos por uno de los profesores participantes en el taller antes mencionado y por uno de los equipos de alumnos a los que se aplicó esta propuesta.

SOLUCIONES APORTADAS POR LOS PROFESORES

Problema 1

A ambas orillas de un río crecen dos palmeras, la una frente a la otra. La altura de una es de 30 codos, y la de la otra, de 20. La distancia entre sus troncos, 50 codos. En la copa de cada palmera hay un pájaro. De súbito los dos pájaros descubren un pez que aparece en la superficie del agua, entre las dos palmeras. Los pájaros se lanzaron y alcanzaron el pez al mismo tiempo. ¿A qué distancia del tronco de la palmera mayor apareció el pez? Suponer que los dos pájaros vuelan a la misma velocidad.

En la figura 1 se puede ver la propuesta de solución presentada.

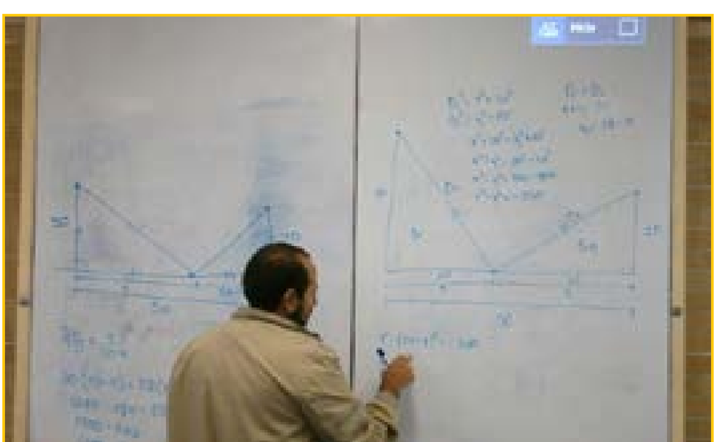

Figura 1. *Propuesta de solución al Problema 1*

En la imagen se puede apreciar que un equipo utilizó dos métodos distintos de solución; en ambos casos comenzaron con una representación gráfica de los datos, en el primer método resuelven el problema a través de razones y proporciones, mientras que en el segundo plantean el teorema de Pitágoras, consideran distancias iguales, asignan variables y desarrollan algebraicamente hasta llegar a la solución.

Problema 2

Un artel de segadores debía segar dos prados, uno tenía el doble de superficie que el otro. Durante medio día trabajó todo el personal del artel en el prado grande; después de la comida, una mitad de la gente quedó en el prado grande; y la otra mitad trabajó en el pequeño. Durante esa tarde fueron terminados los dos tajos, a excepción de un reducido sector del prado pequeño, cuya siega ocupó el día siguiente completo a un solo segador. ¿Con cuántos segadores contaba el artel?

La figura 2 muestra una propuesta de solución.

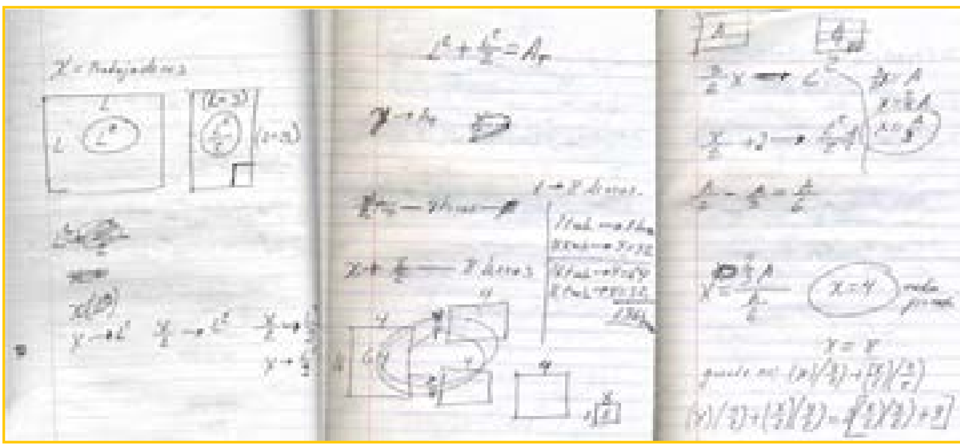

Figura 2.
Propuesta de solución al Problema 2

En este caso, se presentan tres imágenes distintas, todas son soluciones realizadas por el mismo equipo. En las dos primeras imágenes se utilizan los gráficos para representar el problema, en ambas, manifiestan incertidumbre al rayar las posibles soluciones, dando como producto final un problema sin solución aparente. En la tercera imagen, se privilegia el uso del álgebra, tomando información de las dos imágenes anteriores para poder otorgar variables, valores, y de esta manera, llegan al resultado final.

En la figura 3 se puede apreciar el planteamiento de solución de manera resumida por un equipo participante en el diplomado impartido para profesores de nivel bachillerato.

El objetivo del diplomado fue implementar el uso de herramientas tecnológicas en las aulas, utilizar éstas como instrumento verificador de resultados, para mejora en el aprendizaje y entendimiento de las matemáticas en los alumnos. Los participantes mostraron una actitud positiva en su participación, el trabajo en equipo se produjo casi de manera instantánea toda vez de que se manifestaron los roles que asumirían cada uno de ellos, la parte algebraica no presentó problemas salvo al pasar del lenguaje común al lenguaje algebraico y donde los profesores presentaron cierta resistencia fue en el momento de utilizar el software matemático como instrumento verificador de resultados.

Figura 3.
Objetivos y propuesta metodológica implementada por los participantes.

Es necesario mencionar que las propuestas de solución que se expusieron de manera grupal se estructuraron después de haber vivenciado un trabajo en equipo y de llegar a una solución de los problemas planteados. En esta parte de retroalimentación se discutieron cada uno de los procesos utilizados por los participantes y se pudo observar que como primer paso normalmente se recurre a la representación gráfica y visual, ya que de esta manera según ellos es más fácil identificar el problema para solucionarlo, luego comenzó la interpretación algebraica, otorgando valores a incógnitas, en algunos casos hubo que presentar más de una opción para poder llegar a la solución final. Lo más destacado de dicha experiencia fue que los profesores manifestaron un amplio conocimiento teórico de la materia, más no un buen manejo del software matemático.

SOLUCIONES APORTADAS POR LOS ESTUDIANTES

Los alumnos trabajaron en equipos de 5 personas, una vez entregados los ejercicios a resolver procedieron a leerlos y analizarlos, después de eso comenzaron a intercambiar ideas sobre distintas maneras de llegar a la solución, eligieron el procedimiento que desde su punto de vista era el más factible para encontrar el resultado y lo aplicaron hasta obtener un producto final, una vez resueltos los problemas en forma analítica, ingresaron los datos en el software matemático (GeoGebra o Maple, según su preferencia), el sistema arrojó un resultado el cual fue comparado con el obtenido anteriormente y concluyeron que estaban en lo correcto, de lo contrario, corregían hasta encontrar el error en sus operaciones.

Problema 1

En las figuras 4 y 5 se aprecia la solución del enunciado del problema 1, presentada por un equipo de alumnos de primer semestre de la carrera.

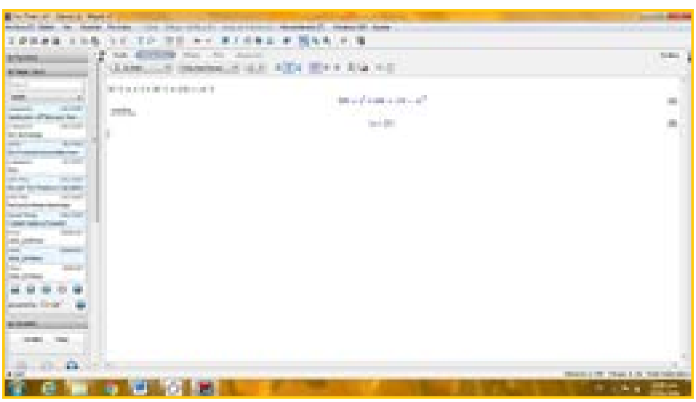

Figura 4.
Solución del problema a través de Maple

Figura 5.
Representación gráfica del problema con el uso de GeoGebra

Las imágenes anteriores muestran la solución del problema 1 a través de software matemático, como podemos notar los estudiantes representan en la figura 5 los datos y consideraciones realizadas en su propuesta, toda vez de que ya lo habían resuelto de manera analítica ingresan los datos en el software para la verificación de estos (figura 4). Como se puede distinguir los estudiantes presentan una clara afinidad por el uso de los recursos tecnológicos y privilegian de manera natural comprobarlos a partir del uso de software.

Problema 2

A continuación se presenta la solución del problema aportado por un equipo de estudiantes de algebra lineal del primer semestre de la carrera.

Solución:

Siendo x el número de segadores del artel y y el área que siega un trabajador en un día: la primer parte del día, los segadores trabajaron el prado grande, con lo que segaron, en términos de x y y, tenemos $x * \frac{y}{2}$ del área de ese prado. Durante la segunda mitad del día, una mitad de los segadores trabajaron en el prado grande y la otra mitad en el pequeño; cada mitad de trabajadores segó $\frac{x}{2} * \frac{y}{2}$ del área de cada prado, con lo cual se concluyó la siega del prado grande y quedó faltando por segar un área pequeña del prado pequeño, la cual ocupó todo el día siguiente a un solo segador. De lo anterior, podemos saber que el área del prado grande es $x * \frac{x}{2} + \frac{y}{2} * \frac{y}{2}$ y la del prado pequeño es $\frac{x}{2} * \frac{y}{2} + y$. Además, sabemos que el prado grande tiene el doble del área que el pequeño, por lo que nos da como resultado $x * \frac{y}{2} + \frac{x}{2} * \frac{y}{2} = 2\left(\frac{x}{2} * \frac{y}{2} + y\right)$.

Mediante esta interpretación, podemos obtener el resultado final con ayuda del software Maple (Figura 6):

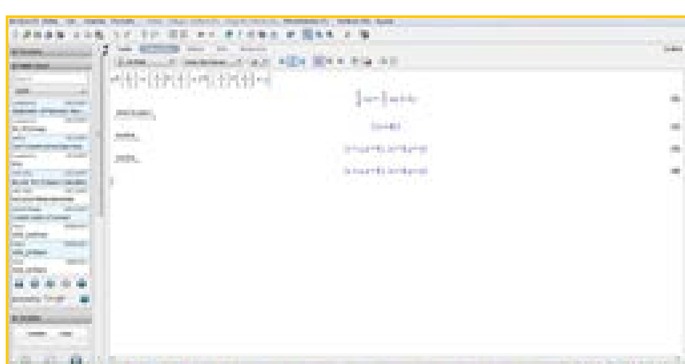

Figura 6.
Solución del ejercicio con Maple.

A través del software, los estudiantes pueden comprobar los resultados que obtuvieron de forma analítica, corregir y obtener visualizaciones más precisas de los elementos que contienen los problemas algebraicos.

Problema 3

En seguida se presenta la solución realizada por un equipo de estudiantes de segundo semestre de álgebra lineal, analíticamente y a través del software matemático. Lo destacado de su participación consiste en que este equipo caracteriza de manera clara la asignación de variables y la relación que guardan entre sí.

Solución: Siendo u, v, w y x las cantidades de rublos de los hermanos en el orden dado en el problema. Tenemos que $u+2$, $v-2$, $2w$ y $\frac{x}{2}$ son iguales.

Igualando las tres primeras cantidades iguales con la cuarta, se tiene que $u=\frac{x}{2}-2$, $v=\frac{x}{2}+2$, $w=\frac{x}{4}$.

Además, sabemos que $u + v + w + x = 45$. Resolviendo este sistema de ecuaciones en Maple, obtenemos la solución del problema. (Figura 7)

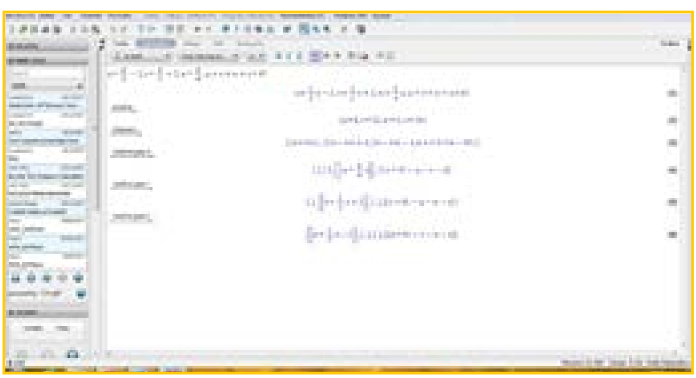

Figura 6.
Solución final del ejercicio con Maple

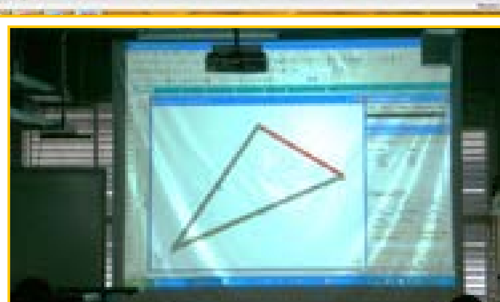

Figura 8.
Uso del software como un instrumento verificador de resultados

En los resultados incluidos por parte de los estudiantes, se pudo observar que los problemas que contienen enunciados con una extensión considerable y que incluyen tres o más variable representan un nivel alto de dificultad. Sin embargo, la solución del problema 3 fue prácticamente la misma que la que presentaron los profesores, de igual manera manifestaron dificultad en el transito del lenguaje común al lenguaje algebraico. Con respecto a la utilización del software matemático, es importante destacar la manera tan natural que los estudiantes manifiestan para manejar la tecnología como un instrumento de apoyo en su formación profesional.

Por otro lado queremos declarar que por motivos de espacio ya no fue posible incluir mayor número de imágenes para continuar con nuestra explicación. También se dejarán abiertas interrogantes con la intención de que los estudiantes reflexionen sobre los tan socorridos métodos mecanicistas. Esto sin dejar de lado lo relevante que resulta hacer un uso adecuado de los procesos algebraicos.

Hasta el momento continuamos realizando algunas modificaciones en cuanto a las condiciones en que los grupos de trabajo resuelven los problemas: tiempo de resolución, número de integrantes, apoyos a los cuestionamientos que hacen durante la actividad, etc.

CONSIDERACIONES FINALES

Actualmente estamos conscientes que hace falta consolidar y tener mayor precisión en la estructura de los diseños incluidos en nuestro trabajo. Sin embargo, con la participación de diversos grupos en esta modalidad estamos seguros de encontrar una serie de recomendaciones que utilizaremos para retroalimentar nuestro proyecto y aportar información que pueda contribuir en la labor docente.

Por otra parte, se vuelve necesario y sumamente relevante enfatizar en la fortaleza que puede alcanzar un alumno, al potenciar racionalmente sus fundamentos algebraicos. Las matemáticas implican, por tanto, estructuras y relaciones que deben manifestarse a partir de experiencias concretas. Las tareas del aprendizaje de las matemáticas involucran innumerables componentes que tienen su origen en la jerarquía de la experiencia y en cada una de las etapas del desarrollo psicomotor del pensamiento cuantitativo.

El objetivo de nuestro estudio es mostrar los beneficios que tiene dar un cambio en la enseñanza de las matemáticas implementando el uso de software matemático; este fue realizado en una comunidad de profesores y estudiantes, a los cuales se les entregó una serie de ejercicios que resolvieron según sus conocimientos, la diferencia entre profesores y alumnos fue que los profesores resolvieron los ejercicios analíticamente y solo utilizaron el software matemático para comparar sus resultados, mientras que los alumnos se apoyaron en el software matemático de su preferencia para complementar y facilitar su trabajo, y así poder llegar al resultado correcto. Por lo tanto, es importante mencionar que hay que potenciar estas capacidades desde una etapa temprana, con ayuda de las recomendaciones adquiridas a través de profesores y alumnos, relacionarlas con el manejo de situaciones cotidianas, el uso de tecnologías, y de software como Maple, GeoGebra y otros, que ayuda a la visualización de los problemas y les facilita a los alumnos en el razonamiento de los ejercicios para poder encontrar la solución, y con esto motivar a los interesados a alcanzar una mayor capacidad de comprensión del álgebra.

En los grupos participantes de ingeniería analizamos que el buen funcionamiento en la parte tecnológica se debe a que ya antes habían tenido algunos otros cursos que hacen uso del software matemático. También concluimos que a pesar de que los recursos tecnológicos motivan a llegar a un resultado correcto las dificultades en la solución de problemas algebraicos siguen existiendo otras variables por atender como por ejemplo: el tránsito entre representaciones.

Con la caracterización de este trabajo se muestra que el uso de software puede ayudar y facilita a los alumnos en la compresión de las matemáticas para la solución de problemas, ya que si llegan a un resultado incorrecto, pueden comprobarlo con ayuda de programas matemáticos. También observamos que cuando en los resultados existía una diferencia al verificarlos por sus propios medios, les impulsaba a buscar el error hasta encontrarlo, este hecho consideramos que podría ser utilizado en otros estudios de áreas diversas lo que podemos considerar como una contribución de nuestra propuesta. Mediante este estudio, se demostró que la mayoría de la comunidad estudiantil está familiarizada con el concepto y uso de software matemático como instrumento de apoyo en el aula, mientras que los profesores participantes muestran resistencia a utilizarlo y pocos son los que manejan este tipo de herramientas en sus cursos de manera convencional.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Connell, M.L. (1995). A constructivist use of technology in pre-algebra. Paper presented at *the Seventeenth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education*. Columbus, OH, October 21-24.

Gavilán Bouzas, P. (2011). Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿puede ayudar el Aprendizaje Cooperativo? *Investigación en la escuela 73*, 95-106.

Heffernan, N. y Koedinger, K.R. (1997). The composition effect in symbolizing: therole of symbol production vs. text comprehension. En M. G. Shafto y P. Langley (Eds.): *Proceedings of the Nineteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 307-312). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (1995). A research base suppporting long term algebra reform? Paper Presented at the *Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Columbus, OH, October 21-24.

Kaput, J. (2000). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Arlington, VA: National Science Foundation.

Koedinger, K.R., Alibali, M.W. y Nathan, M.J. (1999). A developmental model of algebra problem solving: trade-offs between grounded and abstract representations. Paper presented at the *Annual Conference for American Educational Research Association*. Montreal, May 23-26.

Mayer, R. (1982). Different problem-solving strategies for algebra word and equation problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 8, 448-462.

Mayer, R. (1985). Mathematical ability. En R. J. Sternberg (Ed.), *Human abilities: An information processing approach* (pp. 127-150). New York: Freeman.

Nathan, M.J., Kinstch, W. y Young, E. (1992). A theory of algebra word problema comprehension and its implications for the design of computer learning environments. *Cognition and Instruction*, 9, 329-389.

Perelman, Y. (1978). *Álgebra recreativa*. Ed. Mir. Moscú. Traducción al español en 1978.

Polya. G, (2002). *Cómo plantear y resolver problemas*. México. Trillas.

Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos.* Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander.